

Análise Matemática III

Resolução do 1º exame/2º teste - 16 de Janeiro de 2001 - 9h

1. (a)

$$\begin{aligned} \text{vol}(V) &= \int_0^1 \int_1^2 \int_{e^x}^{e^{2x}} 1 dy dx dz \\ &= \int_0^1 \int_e^{e^2} \int_1^{\log y} 1 dx dy dz + \int_0^1 \int_{e^2}^{e^3} \int_1^2 1 dx dy dz + \int_2^1 \int_{e^3}^{e^6} \int_{\frac{1}{3} \log y}^2 1 dx dy dz. \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} M &= \int_1^2 \int_0^{\rho^2} \int_0^{2\pi} 1 \cdot \rho d\theta dz d\rho + \int_2^3 \int_0^{(4-\rho)^2} \int_0^{2\pi} 1 \cdot \rho d\theta dz d\rho \\ &= 2\pi \int_1^2 \rho^3 d\rho + 2\pi \int_2^3 \rho(4-\rho)^2 d\rho = \frac{56\pi}{3}. \end{aligned}$$

2. A função $g : U \rightarrow (-2, -1) \times (0, 1)$ definida por $g(x, y) = (x^3 + 2y, \frac{x^3}{3} + y)$ é uma mudança de coordenadas em U : efectivamente, g é de classe C^∞ , é injectiva (porque é a composição das bijecções $(x, y) \mapsto (x + 2y, \frac{x}{3})$ e $(x, y) \mapsto (x^3, y)$), e tem Jacobiano

$$\det \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = \begin{vmatrix} 3x^2 & 2 \\ x^2 & 1 \end{vmatrix} = x^2,$$

o qual não se anula em U (é fácil ver que U não intersecta o eixo dos yy : para um ponto da forma $(0, y)$ pertencer a U , y teria que satisfazer simultaneamente $-2 < y < -1$ e $0 < y < 1$). Em particular a função inversa $g^{-1} : (-2, -1) \times (0, 1) \rightarrow U$ é também uma mudança de coordenadas com Jacobiano

$$\det \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \left(\det \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right)^{-1} = \frac{1}{x^2}.$$

Portanto podemos aplicar fórmula da mudança de coordenadas:

$$\begin{aligned} \iint_U \frac{x^2(x^3 + 2y)}{(1 + (\frac{x^3}{3} + y)^2)} dx dy &= \int_{-2}^{-1} \int_0^1 \frac{x^2 u}{1 + v^2} \cdot \frac{1}{x^2} dv du \\ &= \left[\frac{u^2}{2} \right]_{-2}^{-1} \left[\arctg v \right]_0^1 = -\frac{3\pi}{8}. \end{aligned}$$

3. (a) Como

$$\frac{\partial f_2}{\partial x} = -\frac{2x}{(x^2 + 1)^2}$$

é diferente de

$$\frac{\partial f_1}{\partial y} = -\frac{2y}{(y^2 + 1)^2}$$

concluimos que \mathbf{f} nem sequer é fechado, e portanto não pode ser gradiente.

(b) Calculando as derivadas cruzadas pode ver-se que \mathbf{g} é fechado; no entanto, como o seu domínio de definição é o conjunto

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 > 1\},$$

que não é um conjunto simplesmente conexo, não podemos para já concluir nada.

O campo \mathbf{g} será gradiente se conseguirmos um potencial ϕ satisfazendo

$$\begin{cases} \frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{xz}{\sqrt{x^2+y^2-1}} + 2e^{2x+y^2} \\ \frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{yz}{\sqrt{x^2+y^2-1}} + 2ye^{2x+y^2} \\ \frac{\partial \phi}{\partial z} = \sqrt{x^2+y^2-1} \end{cases} ;$$

Integrando cada uma das equações do sistema obtemos

$$\begin{cases} \phi = z\sqrt{x^2+y^2-1} + e^{2x+y^2} + \alpha(y, z) \\ \phi = z\sqrt{x^2+y^2-1} + e^{2x+y^2} + \beta(x, z) \\ \phi = z\sqrt{x^2+y^2-1} + \gamma(x, y) \end{cases} ;$$

Portanto um potencial para \mathbf{g} é por exemplo $\phi(x, y, z) = z\sqrt{x^2+y^2-1} + e^{2x+y^2}$, e \mathbf{g} é então um gradiente.

4. Apesar da função f ser contínua em I , não é limitada e portanto não podemos para já concluir nada acerca da sua integrabilidade.

Considere-se a sucessão de funções

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \in]0, \frac{1}{n}[\\ \log x & \text{se } x \in]\frac{1}{n}, 1[\end{cases} .$$

A função f_n é integrável em I , porque é contínua e limitada (logo integrável) em $]0, \frac{1}{n}[$ e em $]\frac{1}{n}, 1[$. Por outro lado, uma vez que $\log x < 0$ para $x \in I$, trata-se de uma sucessão *decrescente*. Como

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = f(x)$$

o teorema da convergência monótona garante-nos que f será integrável *sse* for finito o limite

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_I f_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\frac{1}{n}}^1 \log x dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[x \log x - x \right]_{\frac{1}{n}}^1 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{\log n}{n} - 1 + \frac{1}{n} \right).$$

Como

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 0,$$

concluimos do teorema convergência monótona que f é integrável em I e que

$$\int_I f = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_I f_n = -1.$$

5. (a) Uma parametrização natural de M é $\mathbf{g}(x, y) = (x, y, 2xy)$, definida em $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$. O elemento de área é a norma do vector

$$\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial x} \times \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial y} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ 1 & 0 & 2y \\ 0 & 1 & 2x \end{vmatrix} = (-2y, -2x, 1)$$

e portanto a área de M é dada por

$$\begin{aligned} \text{vol}_2(M) &= \iint_{\{x^2+y^2<1\}} \sqrt{4y^2+4x^2+1} dx dy = \int_0^1 \int_0^{2\pi} \sqrt{4\rho^2+1} \rho d\theta d\rho \\ &= 2\pi \left[\frac{(4\rho^2+1)^{\frac{3}{2}}}{8 \cdot \frac{3}{2}} \right]_0^1 = \frac{\pi}{6} (5^{\frac{3}{2}} - 1). \end{aligned}$$

(b) M é definida no conjunto aberto $\{(x, y) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 < 1\}$ pela equação $F(x, y, z) = 0$, onde $F(x, y, z) = 2xy - z$. Como $\nabla F = (2y, 2x, -1)$ não se anula nunca, este vector forma uma base para o espaço normal a M . A condição do plano tangente ser horizontal é obviamente equivalente à condição do espaço normal ser vertical, i.e., de as duas primeiras componentes de ∇F serem nulas. Logo os pontos pedidos têm que satisfazer $2x = 2y = 0$ e $z = xy = 0$. O único em que o plano tangente a M é horizontal é portanto a origem.

6. (a) Apesar do campo \mathbf{F} ser algo complicado, é fácil ver que $\text{div } \mathbf{F} = 3$. Portanto será conveniente usar o teorema da divergência.

A superfície C é um pedaço de um cone cujo eixo é o eixo dos zz , e o seu bordo é constituído por uma circunferência C_1 de raio 1 contida no plano $z = 0$ e uma circunferência C_2 de raio 2 contida no plano $z = 1$. Para aplicar o teorema da divergência (que só pode ser aplicado a superfícies que limitam volumes), adicionamos a C os dois círculos D_1 e D_2 contidos nos planos $z = 0$ e $z = 1$ e cujos bordos são C_1 e C_2 . A normal unitária indicada corresponde então à normal unitária exterior \mathbf{n} ao volume V limitado por $D_1 \cup C \cup D_2$. Note-se que, em D_1 , $\mathbf{n} = (0, 0, -1)$ e, em D_2 , $\mathbf{n} = (0, 0, 1)$. Por outro lado, $\mathbf{F}(x, y, 0) = (x + 1, y + e^{x^2}, 1)$ e $\mathbf{F}(x, y, 1) = (x + \cos y, y + e^{x^2+1}, 2)$. Pelo teorema da divergência tem-se então

$$\begin{aligned} \iint_{D_1} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} + \iint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} + \iint_{D_2} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} &= \iiint_V \text{div } \mathbf{F} \\ \Leftrightarrow \iint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} &= \iiint_V 3 - \iint_{D_1} (-1) - \iint_{D_2} 2 \\ &= 3 \text{vol}(V) + \text{vol}_2(D_1) - 2 \text{vol}_2(D_2). \end{aligned}$$

Como D_1 e D_2 são círculos de raios 1 e 2, $\text{vol}_2(D_1) = \pi$ e $\text{vol}_2(D_2) = 4\pi$. Por outro lado,

$$\text{vol}(V) = \int_0^1 \int_0^{z+1} \int_0^{2\pi} \rho d\theta d\rho dz = 2\pi \int_0^1 \left[\frac{\rho^2}{2} \right]_0^{z+1} dz = \frac{7\pi}{3}.$$

Logo,

$$\iint_{D_1} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} = 3 \cdot \frac{7\pi}{3} + \pi - 2 \cdot 4\pi = 0.$$

- (b) Note-se que $\text{div } \mathbf{G} = 0$. Como \mathbf{G} está definido em \mathbb{R}^3 , que é um conjunto em estrela, concluimos que \mathbf{G} é um campo rotacional. Se \mathbf{A} é um potencial vector para \mathbf{G} , i.e., se $\mathbf{G} = \text{rot } \mathbf{A}$, então devemos ter

$$\begin{cases} \frac{\partial A_3}{\partial y} - \frac{\partial A_2}{\partial z} = y + z \\ \frac{\partial A_1}{\partial z} - \frac{\partial A_3}{\partial x} = x + z \\ \frac{\partial A_2}{\partial x} - \frac{\partial A_1}{\partial y} = x + y \end{cases} ;$$

Como é sabido, o facto de o potencial vector estar definido a menos de um gradiente permite-nos sempre assumir que uma das componentes deste se anula. Escolhemos por exemplo $A_2 = 0$. Então obtém-se

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial A_3}{\partial y} = y + z \\ \frac{\partial A_1}{\partial z} - \frac{\partial A_3}{\partial x} = x + z \\ \frac{\partial A_1}{\partial y} = -x - y \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} A_3 = \frac{y^2}{2} + zy + f(x, z) \\ \frac{\partial g}{\partial z} - \frac{\partial f}{\partial x} = x + z \\ A_1 = -xy - \frac{y^2}{2} + g(x, z) \end{array} \right.$$

Portanto podemos por exemplo escolher $f(x, z) = 0$ e $g(x, z) = xz + \frac{z^2}{2}$. Um potencial vector para \mathbf{G} é então

$$\mathbf{A} = \left(xz + \frac{z^2}{2} - xy - \frac{y^2}{2}, 0, \frac{y^2}{2} + zy \right).$$

Pelo teorema de Stokes,

$$\iint_C \mathbf{G} \cdot \mathbf{n} = \oint_{C_1} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{g} + \oint_{C_2} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{g}$$

onde as orientações de C_1 e C_2 devem ser compatíveis com a normal unitária \mathbf{n} . Mais precisamente, C_1 deve ser percorrida no sentido directo quando vista do semieixo positivo dos zz , e C_2 no sentido inverso. Uma parametrização para C_1 é então $\mathbf{g}(\theta) = (\cos \theta, \sin \theta, 0)$, e portanto

$$\begin{aligned} \oint_{C_1} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{g} &= \int_0^{2\pi} \left(-\sin \theta \cos \theta - \frac{\sin^2 \theta}{2}, 0, \frac{\sin^2 \theta}{2} \right) \cdot (-\sin \theta, \cos \theta, 0) d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \left(\sin^2 \theta \cos \theta + \frac{1}{2} \sin^3 \theta \right) d\theta = 0. \end{aligned}$$

Uma parametrização para C_2 é $\mathbf{g}(\theta) = (2 \cos \theta, 2 \sin \theta, 1)$; o sentido de C_2 correspondente a esta parametrização é no entanto o contrário áquele que pretendemos, pelo que

$$\begin{aligned} &\oint_{C_2} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{g} \\ &= - \int_0^{2\pi} \left(2 \cos \theta + \frac{1}{2} - 2 \sin^2 \theta - 4 \sin \theta \cos \theta, 0, 2 \sin^2 \theta + 2 \sin \theta \right) \cdot (-2 \sin \theta, 2 \cos \theta, 0) d\theta \\ &= - \int_0^{2\pi} \left(-4 \cos \theta \sin \theta - \sin \theta + 4 \sin^3 \theta + 8 \sin^2 \theta \cos \theta \right) d\theta = 0. \end{aligned}$$

Portanto

$$\iint_C \mathbf{G} \cdot \mathbf{n} = 0.$$

7. A distância à origem é a função contínua $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, e portanto tem máximo e mínimo no conjunto compacto M . Seja p um ponto de mínimo, e suponhamos que M é dada pela equação $F(x, y, z) = 0$ numa vizinhança de p . Então pelo teorema dos extremos condicionados tem-se $\nabla f(p) = \lambda \nabla F(p)$ para algum $\lambda \in \mathbb{R}$. Como

$$\nabla f = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \right),$$

concluimos que as coordenadas (x, y, z) do ponto p satisfazem $(x, y, z) = \mu \nabla F(p)$ para algum $\mu \in \mathbb{R}$ diferente de zero (porque M não contém a origem). Como $\nabla F(p)$ gera o espaço normal a M em p , concluímos que a recta que une p à origem é perpendicular a M em p .