

Análise Matemática II  
2º Teste - 16 de Dezembro de 2006 - 9h  
Duração: 1h30m

**Apresente e justifique todos os cálculos**

- (2 val.) 1. Seja  $F$  uma função real definida em  $\mathbb{R}^2$  por

$$F(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^4+y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Estude  $F$  quanto à continuidade no ponto  $(0, 0)$ .

- (3 val.) 2. Considere a função  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  definida por  $f(x, y) = (\sin(xy^2), e^y, \log(1+x^2))$  e seja  $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  uma função diferenciável em  $\mathbb{R}^3$  tal que

$$Dg(0, e, 0) = [ e \quad -1 \quad e ].$$

Calcule a derivada direccional da função  $g \circ f$  no ponto  $(0, 1)$  na direcção do vector  $v = (1, -1)$ .

- (2 val.) 3. Determine a recta tangente à linha  $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z^2 + 1 = y^2 + x^2 ; z = y + 2\}$  no ponto  $(1, -1, 1)$ .

4. Considere a função  $h(x, y) = x^2 - y^2 + x^3$ .

(2,5 val.) (a) Determine e classifique os pontos de estacionaridade de  $h$  na região  $x^2 + y^2 < 1$ .

(2,5 val.) (b) Justifique que  $h$  tem extremos absolutos na região  $x^2 + y^2 \leq 1$  e determine-os.

5. Considere o sistema

$$\begin{cases} z + \log(y^2 + x^2z) = 1 \\ y - x = 1. \end{cases}$$

(2 val.) (a) Mostre que este sistema define  $y$  e  $z$  como funções de  $x$  em torno do ponto  $(0, 1, 1)$ .

(3 val.) (b) Calcule as derivadas  $\frac{dy}{dx}(0)$  e  $\frac{dz}{dx}(0)$ .

- (3 val.) 6. Seja  $f : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$  uma função de classe  $C^k$  (isto é,  $f$  tem derivadas parciais contínuas até ordem  $k$ ). Assumindo que  $f(0) = 0$  e todas as derivadas parciais de  $f$  de ordem menor ou igual a  $k - 1$  se anulam na origem, mostre que

$$\exists_{C>0} \forall_{x \in B_1(0)} \|f(x)\| \leq C\|x\|^k.$$

### Resolução indicativa

1. Fazendo  $y = x^2$ , temos  $F(x, y) = F(x, x^2) = \frac{1}{2x}$  e, portanto, o limite  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} F(x, y)$  não existe. Dado que  $F(0, 0) = 0$  concluímos que  $F$  não é contínua na origem.

2.

$$\begin{aligned} D_v(g \circ f)(0, 1) &= Dg(f(0, 1))Df(0, 1) \frac{v}{\|v\|} \\ &= Dg(0, e, 0)Df(0, 1) \frac{v}{\|v\|} \\ &= [e \quad -1 \quad e] \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \\ &= \sqrt{2}e \end{aligned}$$

3. A recta tangente pode ser definida pelas equações cartesianas:

$$\begin{cases} (x - 1, y + 1, z - 1) \cdot (-2, 2, 2) = 0 \\ (x - 1, y + 1, z - 1) \cdot (0, -1, 1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z + y - x + 1 = 0 \\ z = y + 2 \end{cases}$$

4. (a) Fazendo  $\nabla h(x, y) = 0$  obtemos os pontos de estacionaridade  $(0, 0)$  e  $(-\frac{2}{3}, 0)$ . Analisando as matrizes Hessianas de  $h$  nestes pontos,

$$H(0, 0) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}, \quad H(-\frac{2}{3}, 0) = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix},$$

concluímos que  $(0, 0)$  é um ponto de sela e  $(-\frac{2}{3}, 0)$  é um ponto de máximo de  $h$ .

- (b) Seja  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$ . Sendo  $h$  uma função contínua e  $D$  um conjunto compacto, pelo Teorema de Weierstrass  $h$  tem máximo e mínimo em  $D$ . Da alínea anterior, a função  $h$  tem apenas um extremo no interior de  $D$ . Os extremos de  $h$  na fronteira de  $D$ , ou seja, no conjunto definido pela equação  $x^2 + y^2 = 1$ , podem ser determinados recorrendo ao método dos multiplicadores de Lagrange.

Assim, definindo  $H(x, y) = x^2 + y^2 - 1$ , teremos

$$\begin{cases} D(h + \lambda H)(x, y) = 0 \\ H(x, y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 3x^2 + 2\lambda x = 0 \\ y(\lambda - 1) = 0 \\ x^2 + y^2 = 1. \end{cases}$$

As soluções deste sistema são os pontos

$$(-1, 0), (1, 0), (0, -1), (0, 1),$$

ou seja, os extremos da função  $h$  em  $D$  são os pontos

$$(-1, 0), (1, 0), (0, -1), (0, 1), (-\frac{2}{3}, 0).$$

Calculando os valores de  $h$  em cada um destes pontos, concluímos que  $h$  atinge o máximo no ponto  $(1, 0)$  e o mínimo nos pontos  $(0, -1)$  e  $(0, 1)$ .

5. (a) Seja  $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  a função de classe  $C^1$  definida por

$$F(x, y, z) = (z + \log(y^2 + x^2z) - 1, y - x - 1).$$

Note-se que  $F(0, 1, 1) = (0, 0)$  e que

$$DF(0, 1, 1) = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Portanto,

$$\det D_{y,z}F(0, 1, 1) = \det \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = -1 \neq 0$$

e, pelo Teorema da Função Implícita, o sistema dado define  $y$  e  $z$  como funções de classe  $C^1$  de  $x$  em alguma vizinhança do ponto  $(0, 1, 1)$ .

(b) Da alínea anterior, fazendo  $y = y(x)$  e  $z = z(x)$  e derivando a função  $F(x, y(x), z(x))$  em  $x = 0$ , obtemos

$$\begin{cases} 2 \frac{dy}{dx}(0) + \frac{dz}{dx}(0) = 0 \\ \frac{dy}{dx}(0) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{dz}{dx}(0) = -2 \\ \frac{dy}{dx}(0) = 1 \end{cases}$$

6. Para cada uma das funções componentes  $f_j : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}, j = 1, \dots, n$ , pela fórmula de Taylor, existem pontos  $a_j, j = 1, \dots, n$ , no segmento de recta com extremos na origem e no ponto  $x \in B_1(0)$  e constantes  $A_j > 0, j = 1, \dots, n$ , tais que

$$\begin{aligned} |f_j(x)| &= \left| \frac{1}{k!} D^k f_j(a_j) x^j \right| \\ &\leq \frac{1}{k!} \sum_{i_1=1}^k \sum_{i_2=1}^k \cdots \sum_{i_k=1}^k \left| \frac{\partial^k f_j}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \cdots \partial x_{i_k}}(a_j) \right| |x_{i_1}| |x_{i_2}| \cdots |x_{i_k}| \\ &\leq A_j \|x\|. \end{aligned}$$

Portanto, existe uma constante  $C > 0$  tal que

$$\|f(x)\| \leq \sum_{j=1}^n |f_j(x)| \leq C \|x\|.$$