Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Análise Matemática II

1º Teste - 28 de Outubro de 2006 - 9h
Duração: 1h30m

Apresente e justifique todos os cálculos

1. Calcule os integrais seguintes:

(1 val.) (a) $\displaystyle\int_1^e \frac{\sqrt{\ln x}}{x}\,dx$

(2 val.) (b) $\displaystyle\int_0^1 x \arctan x\,dx$

(2 val.) (c) $\displaystyle\int_{\ln\frac{3}{4}}^{\ln\frac{15}{16}} \frac{1}{\sqrt{1-e^x}}\,dx.$

(2 val.) 2. Seja $R \in \mathbb{R}^2$ a região do 1º quadrante limitada pelas rectas $y = 4 - x$, $y = x$ e $y = 3x$. Esboce a região R e calcule a sua área.

(1 val.) 3. Calcule o comprimento do arco da curva de equação $y = \cosh x$ compreendido entre os pontos de abcissas 0 e 1.

(2 val.) 4. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^1 tal que $f(0) = 0$ e $f'(0) = 1$. Mostre que a função $\phi(x) = \displaystyle\int_x^{x^2} f(t)\,dt$ tem um extremo local em $x = 0$ e classifique-o.

(3 val.) 5. Considere a função $f(x) = \displaystyle\int_0^x \operatorname{sen}(t^2)dt$. Escreva a série de Taylor de f em torno da origem e determine as derivadas $f^{(7)}(0)$ e $f^{(8)}(0)$.

(2 val.) 6. Calcule $\log(1.1)$ com erro inferior a 10^{-3}.

(2 val.) 7. Considere a função $g(x, y) = \dfrac{1}{\sqrt{(1-x^2-y^2)(x^2+y^2)}}$. Determine o interior e a fronteira do domínio de g e indique se é aberto ou fechado.

(3 val.) 8. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função crescente. Mostre que, para qualquer inteiro $n > 0$,

$$\int_0^{n-1} f(x)\,dx \le \sum_{i=1}^{n-1} f(i) \le \int_1^n f(x)\,dx.$$

Resolução indicativa

1. (a)

$$\int_1^e \frac{\sqrt{\ln x}}{x}\,dx \quad = \quad \left[\frac{2}{3}(\ln x)^{2/3}\right]_1^e = \frac{2}{3}.$$

(b) Começando or integrar por partes obtemos

$$\begin{aligned}\int_0^1 x\arctan x\,dx &= \left[\frac{x^2}{2}\arctan x\right]_0^1 - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2}\,dx = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2}\int_0^1 1 - \frac{1}{1+x^2}\,dx = \\ &= \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2}\left[x - \arctan x\right]_0^1 = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

(c) Fazendo a substituição $t = \sqrt{1-e^x}$ obtemos

$$\int_{\ln\frac{3}{4}}^{\ln\frac{15}{16}} \frac{1}{\sqrt{1-e^x}}\,dx \quad = \quad \int_{1/4}^{1/2} \frac{2}{1-t^2}\,dt = \int_{1/4}^{1/2} \frac{1}{1-t} + \frac{1}{1+t}\,dt = \left[\ln\left(\frac{1+t}{1-t}\right)\right]_{1/4}^{1/2} = \ln\frac{9}{5}.$$

2. A área de R é dada por

$$A(R) = \int_0^1 3x - x\,dx + \int_1^2 4 - x - x\,dx = [x^2]_0^1 + [4x - x^2]_1^2 = 2.$$

3. O comprimento da curva é dado por

$$\ell = \int_0^1 \sqrt{1 + (f'(x))^2}\,dx = \int_0^1 \sqrt{1 + \sinh^2(x)}\,dx = \int_0^1 \cosh x\,dx = [\sinh x]_0^1 = \sinh 1.$$

4. Como a função f é contínua, podemos usar o Teorema Fundamental da Análise para calcular a derivada

$$\phi'(x) = f(x^2)2x - f(x).$$

Para $x = 0$ obtemos $\phi(0) = 0$, logo este é um ponto de estacionaridade. Para o classificar usamos a segunda derivada de ϕ.

$$\phi''(x) = f'(x^2)4x^2 + 2f(x) - f'(x).$$

Portanto $\phi''(0) = -1$ e podemos concluir que $x = 0$ é um ponto de máximo.

5. Usamos a série de Taylor de $\sin t = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!}$ para determinar a série de Taylor de f:

$$f(x) = \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{t^{4n+2}}{(2n+1)!}\,dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!(4n+3)} x^{4n+3},$$

donde podemos concluir que $f^{(7)}(0) = -5!$ e $f^{(8)}(0) = 0$.

6. Sabemos que $f(x) = P_n(x) + E_n(x)$, onde $P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^k(a)}{k!}(x-a)^n$ é o polinómio de Taylor de ordem n no ponto a e $E_n(x)$ é o resto. Vamos usar a fórmula do resto de Lagrange para estimar o erro. Essa estimativa vai indicar-nos qual a ordem do polinómio de Taylor que devemos usar de modo a garantir que o erro seja inferior a 10^{-3}. Neste exemplo temos $f(x) = \ln x$, $x = 1.1$ e $a = 1$.

   Assim obtemos,

$$|E_n(x)| = \left| \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(10^{-1})^{n+1} \right| = \frac{n!c^{-n-1}}{(n+1)!}10^{-(n+1)},$$

   com $c \in [1, 1.1]$, logo $c^{-n-1} < 1$. Portanto

$$|E_n(x)| < \frac{10^{-n-1}}{(n+1)},$$

   e vemos que basta escolher $n = 2$. Logo

$$\begin{aligned} \ln 1.1 &\approx f(0) + f'(0)(0.1) + \frac{f''(0)}{2}(0.1)^2 \\ &= 0 + 0.1 - 0.005 = 0.095. \end{aligned}$$

7. O domínio de g é dado por $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (1 - x^2 - y^2)(x^2 + y^2) > 0\}$, ou seja, $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1 \wedge (x, y) \neq (0, 0)\}$. Temos $\text{int}D = D$ logo D é aberto. A fronteira de D é o conjunto $\partial D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1 \vee (x, y) = (0, 0)\}$.

8. Se compararmos o integral da esquerda com o somatório vemos que, por a função ser crescente, esta soma é uma soma superior para o integral de f no intervalo $[0, n-1]$, ou seja, é uma aproximação por excesso do valor do integral, isto porque em cada subintervalo do tipo $[i, i+1]$, tomamos o valor de f no ponto $x = i + 1$ que é o máximo de f nesse subintervalo. Por outro lado este somatório é uma soma inferior para o integral de f no intervalo $[1, n]$, ou seja, é uma aproximação por defeito do valor desse integral.