Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Análise Matemática II

1º Teste - 29 de Outubro de 2005 - 13h
Duração: 1h30m
(Cursos: LEAe, LEAN, LEBM, LCI, LEC, LEIC, LEFT, LET, LMAC)

Apresente e justifique todos os cálculos

1. Calcule os integrais seguintes:

(1 val.) a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{3x^2}{(x^3+2)^4}\,dx$

(1 val.) b) $\displaystyle\int_0^1 x\cos(\pi x)\,dx$

(2 val.) c) $\displaystyle\int_{-1}^3 \frac{\sqrt{x+1}}{x+5}\,dx$, fazendo $t=\sqrt{x+1}$.

Resolução:

a) Por primitivação directa,

$$\int_0^1 \frac{3x^2}{(x^3+2)^4}\,dx = \left(\frac{(x^3+2)^{-3}}{-3}\right)_{x=0}^{x=1} = \frac{1}{24}-\frac{1}{81}.$$

b) Integrando por partes,

$$\int_0^1 x\cos(\pi x)\,dx = \frac{1}{\pi}x\,\mathrm{sen}(\pi x)\Big|_0^1 - \frac{1}{\pi}\int_0^1 \mathrm{sen}(\pi x)\,dx = 0+\frac{1}{\pi^2}\cos(\pi x)\Big|_0^1 = -\frac{2}{\pi^2}.$$

c) Por um lado, sendo $x=t^2-1$, temos $\dfrac{dx}{dt}=2t$. Por outro, se $x=-1$ então $t=0$ e se $x=3$ temos $t=2$. Logo,

$$\int_{-1}^3 \frac{\sqrt{x+1}}{x+5}\,dx = \int_0^2 \frac{2t^2}{t^2+4}\,dt = \int_0^2 (2-\frac{8}{t^2+4}) = 4-4\arctan(1) = 4-\pi.$$

***

(2 val.) 2. Seja $A\subset\mathbb{R}^2$ a região limitada pelas linhas $y=x^2$ e $y=x+2$. Esboce A e calcule a respectiva área.

Resolução:

$$\text{Área}(A) = \int_{-1}^2 (x+2-x^2)\,dx = \frac{9}{2}.$$

***

(2 val.) 3. Calcule o volume do sólido representado pelo conjunto

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x \geq 0\,;\; y \geq 0\,;\; z \geq 0\,;\; x + y \leq 1 - z^2\}.$$

Note que a intersecção de S com um plano horizontal ou é um triângulo ou é vazia.

Resolução:

A intersecção de S com um plano horizontal, com $0 \leq z \leq 1$, é um triângulo definido por $x + y \leq 1 - z^2$. Logo,

$$Vol(S) = \int_0^1 (1 - z^2)^2\, dz = \frac{4}{15}.$$

***

(2 val.) 4. Mostre que a função

$$f(x) = 1 + \int_0^x \frac{\operatorname{sen} t}{1 + t}\, dt$$

tem um mínimo na origem.

Resolução:

Pelo teorema fundamental do cálculo, como $\dfrac{\operatorname{sen} t}{1 + t}$ é uma função contínua numa vizinhança de $t = 0$,

$$f'(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{1 + x}.$$

Temos, de facto, $f'(0) = 0$, pelo que $x = 0$ é um ponto de estacionaridade. Calculando a segunda derivada,

$$f''(x) = \frac{(1 + x)\cos x - \operatorname{sen} x}{(1 + x)^2},$$

obtemos $f''(0) = 1 > 0$. Logo, $x = 0$ é um mínimo.

***

(2 val.) 5. Determine a série de Taylor da função $\dfrac{1}{1 - 4x}$ em torno da origem e calcule o respectivo raio de convergência.

Resolução:

$$\frac{1}{1 - 4x} = \sum_{n=0}^{\infty} (4x)^n, \qquad \text{para } |4x| < 1,$$

ou seja, o raio de convergência é $\frac{1}{4}$.

***

(3 val.) 6. Calcule $\operatorname{sen}(0.1)$ com erro inferior a 10^{-4}.

Resolução:

$$\operatorname{sen}(0,1) = 0.1 - \frac{10^{-3}}{3!}$$

***

(2 val.) 7. Calcule ou mostre que não existe $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3+2y^4}{x^2+y^2}$.

Resolução:

Sendo

$$\left|\frac{x^3+2y^4}{x^2+y^2}\right| \leq \left|\frac{x^3}{x^2+y^2}\right| + \left|\frac{2y^4}{x^2+y^2}\right| \leq |x| + 2\,|y|^2 \leq \|(x,y)\| + 2\|(x,y)\|^2$$

concluimos que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3+2y^4}{x^2+y^2} = 0.$$

***

(3 val.) 8. Mostre que se tem

$$\frac{\pi^3}{24} - \frac{\pi^7}{5376} \leq \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}(x^2)\,dx \leq \frac{\pi^3}{24}.$$

Resolução:

Note-se que

$$\operatorname{sen}(x^2) = x^2 + E_1(x)$$

e

$$\operatorname{sen}(x^2) = x^2 - \frac{x^6}{3!} + E_2(x)$$

em que $E_1(x) < 0$ e $E_2(x) > 0$ são os erros cometidos nas respectivas aproximações. Assim,

$$x^2 - \frac{x^6}{3!} \leq \operatorname{sen}(x^2) \leq x^2$$

e, portanto,

$$\int_0^{\pi/2} (x^2 - \frac{x^6}{3!})dx \leq \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}(x^2)\,dx \leq \int_0^{\pi/2} x^2 dx,$$

ou seja,

$$\frac{\pi^3}{24} - \frac{\pi^7}{5376} \leq \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}(x^2)\,dx \leq \frac{\pi^3}{24}.$$