

## Análise Matemática II

2º Teste e 1º Exame - 4 de Janeiro de 2006 - 17h

Duração: Teste 1h30m, Exame: 3h  
(Cursos: LEIC, LEC, LET, LENA)

### Resolução resumida

1. Calcule os integrais seguintes:

(1 val.) a)  $\int_1^2 x \log x \, dx$

(1 val.) b)  $\int_0^1 \frac{e^{\sqrt{1+x}}}{\sqrt{1+x}} \, dx$

(1 val.) c)  $\int_1^2 \frac{e^x}{1+e^{2x}} \, dx.$

### Resolução:

a)  $\int_1^2 x \log x \, dx = \frac{x^2}{2} \log x \Big|_1^2 - \int_1^2 \frac{x}{2} \, dx = 2 \log 2 - \frac{3}{4}.$

b)  $\int_0^1 \frac{e^{\sqrt{1+x}}}{\sqrt{1+x}} \, dx = 2e^{\sqrt{1+x}} \Big|_0^1 = 2(e^{\sqrt{2}} - e).$

c)  $\int_1^2 \frac{e^x}{1+e^{2x}} \, dx = \arctan e^x \Big|_1^2 = \arctan e^2 - \arctan e.$

(1 val.) 2. Seja

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^3 \leq y \leq x, x \geq 0\}.$$

Esboce  $A$  e calcule a respectiva área.

### Resolução:

$A$  é a região compreendida entre o gráfico de  $y = x^3$  e o gráfico de  $y = x$  com  $0 \leq x \leq 1$ .

Logo,

$$\text{area}(A) = \int_0^1 (x - x^3) \, dx = \frac{1}{4}.$$

3. Seja  $f(x) = \text{sen}(x^2) - x^4$ .

(1 val.) a) Escreva a série de Taylor de  $f$  em  $x = 0$ .

(1 val.) b) Determine a derivada  $f^{(40)}(0)$ .

### Resolução:

a) Temos a série de Taylor,

$$f(x) = \operatorname{sen}(x^2) - x^4 = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(x^2)^{2k+1}}{(2k+1)!} - x^4 = x^2 - x^4 + \frac{x^6}{3!} - \dots$$

b) O coeficiente de  $x^{40}$  da série de Taylor será igual a  $\frac{f^{(40)}(0)}{40!}$ . Ora,  $2(2k+1) = 4k+2 \neq 40, \forall k = 0, 1, 2, \dots$ . Logo,  $f^{(40)}(0) = 0$ .

(1.5 val.) 4. Calcule  $\frac{1}{1.1}$  com um erro inferior a  $10^{-3}$ .

### Resolução:

Tem-se  $\frac{1}{1.1} = f(-0.1)$  com

$$f(x) = \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n.$$

O módulo do erro de ordem  $n$  na fórmula de Taylor de  $f$  é dado por

$$|r_n(-0.1)| = \left| \frac{(-0.1-0)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c) \right| \leq 10^{-(n+1)},$$

onde  $c \in [-0.1, 0]$  e onde utilizámos  $|f^{(j)}(c)| = \left| \frac{j!}{(1-c)^{j+1}} \right| \leq j!$ . Para termos um erro inferior a  $10^{-3}$  basta então tomarmos  $n = 3$ , obtendo

$$\frac{1}{1.1} = 1 - 0.1 + 0.01 - 0.001 + \dots$$

(1 val.) 5. Determine os pontos de estacionaridade de

$$g(x) = \int_0^{x^2} \cos(t^3) dt.$$

### Resolução:

Sendo a integranda uma função contínua, pelo teorema fundamental do cálculo vamos ter

$$g'(x) = 2x \cos(x^6).$$

Os pontos de estacionaridade serão então dados por  $g'(x) = x \cos(x^6) = 0$ , ou seja,  $x = 0$  ou  $x = \left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right)^{\frac{1}{6}}$ , com  $k = 0, 1, 2, \dots$

(1.5 val.) 6. Utilizando a fórmula de Taylor calcule

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x^3)}{\operatorname{sen}(x^2) - x^2}.$$

### Resolução:

recorrendo à fórmula da Taylor,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x^3)}{\operatorname{sen}(x^2) - x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \left(1 - \frac{x^6}{2} + o(x^{12})\right)}{x^2 - \frac{x^6}{3!} + o(x^{10}) - x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-3! x^6}{2 x^6} = -3.$$

**VSFF**

## 2º Teste

- (1 val.) 7. Determine o gradiente de  $f(x, y) = x^2 - y^3 + 12y$  e calcule a sua derivada segundo o vector  $v = (4, 2)$  no ponto  $(x, y) = (1, 1)$ .

### Resolução:

$$\begin{aligned}\nabla f(1, 1) &= \left( \frac{\partial f}{\partial x}(1, 1), \frac{\partial f}{\partial y}(1, 1) \right) = (2, 9) \\ \frac{\partial f}{\partial v}(1, 1) &= (2, 9) \cdot (4, 2) = 26\end{aligned}$$

- (1.5 val.) 8. Sejam  $g(u, v) = (\frac{u^2}{2}, \frac{v^2}{2}, uv)$  e  $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  com

$$Df(x, y, z) = \begin{bmatrix} 2x & 2y & 0 \\ z & 0 & x \end{bmatrix}.$$

Calcule  $D(f \circ g)(-1, 1)$ .

### Resolução:

$$D(f \circ g)(-1, 1) = Df(g(-1, 1))Dg(-1, 1) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

9. Seja  $S \subset \mathbb{R}^3$  a superfície definida por  $x - x^2 - y^2 - 1 - z = 0$ .

- (1 val.) a) Determine o plano tangente a  $S$  no ponto  $(2, 1, -4)$ .

### Resolução:

Seja  $F(x, y, z) = x - x^2 - y^2 - 1 - z$ . A direcção da normal a  $S$  no ponto  $(2, 1, -4)$  é dada pelo vector  $\nabla F(2, 1, -4) = (-3, -2, -1)$ . Portanto, o plano tangente a  $S$  no ponto  $(2, 1, -4)$  será definido pela equação

$$(-3, -2, -1) \cdot (x - 2, y - 1, z + 4) = 0,$$

ou seja,

$$3x + 2y + z = 4.$$

- (1 val.) b) Determine o ponto de  $S$  em que o respectivo plano tangente é horizontal.

### Resolução:

No ponto em que o plano tangente é horizontal a normal deverá ser vertical. Sendo a normal dada pelo gradiente da função  $F(x, y, z) = x - x^2 - y^2 - 1 - z$ , deveremos ter

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial x} &= 1 - 2x = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial y} &= -2y = 0,\end{aligned}$$

ou seja,  $x = \frac{1}{2}$ ,  $y = 0$  e  $z = -\frac{3}{4}$ .

10. Considere a função  $g(x, y) = x^2 + y^2 - y^3$ .

(1 val.)

- a) Determine e classifique os pontos de estacionaridade de  $g$  na região  $x^2 + y^2 < 1$ .

### Resolução:

Os pontos de estacionaridade são dados pelas condições

$$\begin{aligned}\frac{\partial g}{\partial x} &= 2x = 0 \\ \frac{\partial g}{\partial y} &= 2y - 3y^2 = 0,\end{aligned}$$

de onde obtemos

$$(0, 0), \left(0, \frac{2}{3}\right).$$

Note-se que estes dois pontos estão na região considerada.

Para classificar os pontos de estacionaridade recorreremos à matriz Hessiana

$$D^2g(x, y) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 - 6y \end{bmatrix}$$

em cada um dos pontos.

Assim, teremos

$$D^2g(0, 0) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Sendo  $D^2g(0, 0)$  uma matriz diagonal, os respectivos valores próprios são as entradas da diagonal principal e, portanto, o ponto  $(0, 0)$  é um mínimo de  $g$ .

Para o ponto  $(0, \frac{2}{3})$ , teremos

$$D^2g\left(0, \frac{2}{3}\right) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

e, portanto, será um ponto em sela.

(1 val.)

- b) Justifique que  $g$  tem extremos absolutos na região  $x^2 + y^2 \leq 1$  e determine-os.

### Resolução:

Seja  $g$  uma função contínua e a região dada por  $x^2 + y^2 \leq 1$  um conjunto compacto, pelo teorema de Weierstrass, haverá pontos de máximo e de mínimo de  $g$  nesta região. No interior desta região os extremos de  $g$  estarão localizados nos pontos de estacionariedade determinados na alínea anterior, ou seja, o ponto  $(0, 0)$  será um ponto de mínimo de  $g$ .

Na fronteira desta região os extremos de  $g$  serão determinados pelo método dos multiplicadores de Lagrange, ou seja, pelas equações

$$\begin{cases} 2x + 2\lambda x = 0 \\ 2y - 3y^2 + 2\lambda y = 0 \\ x^2 + y^2 = 1. \end{cases}$$

Da primeira equação obtemos  $x = 0$  ou  $\lambda = -1$ . Destas duas condições conclui-se imediatamente que os pontos a considerar serão

$$(0, -1), (0, 1), (-1, 0), (1, 0).$$

Seja  $g(-1, 0) = g(1, 0) = 1$ ,  $g(0, -1) = 2$  e  $g(0, 0) = g(0, 1) = 0$ , concluímos que  $(0, -1)$  é o ponto de máximo e  $(0, 0)$  e  $(0, 1)$  são pontos de mínimo.

11. Considere a equação  $x^2y^3 - 2xz^2 + y^4z = 0$ .

(1 val.)

- a) Justifique que a equação determina  $z$  como função de  $(x, y)$ , ou seja  $z = f(x, y)$ , numa vizinhança de  $(1, 1, 1)$ .

### Resolução:

Seja  $F(x, y, z) = x^2y^3 - 2xz^2 + y^4z$ . Esta função é de classe  $C^1$  em  $\mathbb{R}^3$  e  $F(1, 1, 1) = 0$ . Sendo  $\frac{\partial F}{\partial z}(1, 1, 1) = -3 \neq 0$ , pelo teorema da função implícita concluímos que existe uma vizinhança de  $(1, 1, 1)$  em que o conjunto dado por  $F(x, y, z) = 0$  é o gráfico de uma função  $f$ , de classe  $C^1$ , tal que se tem  $z = f(x, y)$ .

(1 val.)

- b) Calcule  $\nabla f(1, 1)$ .

### Resolução:

Dado que numa vizinhança de  $(1, 1, 1)$  temos  $z = f(x, y)$ , da equação  $F(x, y, f(x, y)) = 0$ , obtemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x}(1, 1, 1) + \frac{\partial F}{\partial z}(1, 1, 1) \frac{\partial f}{\partial x}(1, 1) &= 0 \\ \frac{\partial F}{\partial y}(1, 1, 1) + \frac{\partial F}{\partial z}(1, 1, 1) \frac{\partial f}{\partial y}(1, 1) &= 0, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1,1) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(1,1,1)}{\frac{\partial F}{\partial z}(1,1,1)} = 0$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(1,1) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}(1,1,1)}{\frac{\partial F}{\partial z}(1,1,1)} = \frac{7}{3}$$

e, portanto,

$$\nabla f(1,1) = \left(0, \frac{7}{3}\right).$$

- (1.5 val.) 12. Sejam  $A$  e  $B$  duas superfícies compactas em  $\mathbb{R}^3$ . Seja  $d > 0$  a distância mínima entre  $A$  e  $B$ , e sejam  $p \in A, q \in B$  tais que  $\|p - q\| = d$ . Mostre que o plano tangente a  $A$  em  $p$  é paralelo ao plano tangente a  $B$  em  $q$ .

### Resolução:

Seja  $f(x) = \|x - q\|^2$  a função que mede o quadrado da distância de  $x \in \mathbb{R}^3$  a  $q \in B$ . Por definição de  $p$  e  $q$ , a função  $f$ , restringida à superfície  $A$ , terá um mínimo em  $x = p$ . Assim, o ponto  $p$  será um extremo condicionado de  $f$  em  $A$ , ou seja, será solução do sistema

$$\begin{cases} \nabla f(x) = \lambda \nabla F(x) \\ F(x) = 0 \end{cases}$$

em que  $\lambda \in \mathbb{R}$  e  $F$  é uma função de classe  $C^1$  que descreve, localmente em torno do ponto  $p$ , a superfície  $A$ .

Sendo  $\nabla F(p)$  um vector normal à superfície  $A$  em  $p$ , a primeira equação diz-nos que o vector  $\nabla f(p)$  é também normal a  $A$  em  $p$ .

Notando que  $\nabla f(p) = 2(p - q)$ , concluímos que o vector  $p - q$  é normal a  $A$  em  $p$ . Do mesmo modo, se conclui que o vector  $p - q$  é normal a  $B$  em  $q$ .

Dado que o plano tangente num ponto é perpendicular ao vector normal nesse ponto, é claro que o plano tangente a  $A$  em  $p$  é paralelo ao plano tangente a  $B$  em  $q$ .