Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Análise Matemática II

2º Exame - 18 de Janeiro de 2006 - 17h
Duração: 3h
(Cursos: LEIC, LEC, LET, LEAN)

Apresente e justifique todos os cálculos

1. Calcule os integrais seguintes:

(1 val.) (a) $\displaystyle\int_1^2 \frac{\log y}{y}\, dy$

(1 val.) (b) $\displaystyle\int_0^1 xe^x\, dx$

(1 val.) (c) $\displaystyle\int_1^2 \frac{x^2+1}{(x+2)^2}\, dx.$

(1 val.) 2. Esboce e calcule a área do conjunto $\{\, (x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x \geq 0\,,\, x^2 \leq y \leq \sqrt{x}\,\}$.

(2 val.) 3. Calcule o volume do sólido representado pelo conjunto

$$\{\, (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x^2+y^2 < z < 1\,\}.$$

(2 val.) 4. Calcule $e^{-0.1}$ com um erro inferior a 10^{-4}.

(1 val.) 5. Determine os pontos de estacionaridade da função $f(x) = \displaystyle\int_0^{\cos x} \frac{1}{1+t^6}\, dt$.

(1.5 val.) 6. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função crescente. Mostre que, para qualquer inteiro $n > 0$,

$$\int_0^{n-1} f(x)\, dx \leq \sum_{i=1}^{n-1} f(i) \leq \int_1^n f(x)\, dx.$$

(1 val.) 7. Determine e classifique os pontos de estacionaridade da função $f(x,y) = 4y^2 - x^2 + 4x + y$.

(1 val.) 8. Considere a função $f(x,y) = x^2 + y^4$ e seja $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ uma função de classe C^1 tal que $g(0,0,0) = (2,1)$ e

$$Dg(0,0,0) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

Calcule $\dfrac{\partial(f \circ g)}{\partial \vec{w}}(0,0,0)$ em que $\vec{w} = (1,0,1)$.

(1.5 val.) 9. Determine o plano tangente à superfície $z = \cos(x^2+y^2)$ no ponto $(0,0,1)$.

(1 val.) 10. Seja C a elipse definida pela equação $x^2 + 4xy + 5y^2 = 2$. Determine os extremos da função $f(x,y) = y$ em C.

11. Considere o sistema

$$\begin{cases} e^{v\log u} - x^2 = 0 \\ \log(uv) - 2y = 0. \end{cases}$$

(1.5 val.) (a) Mostre que este sistema define (u, v) como função de (x, y), de classe C^1, em torno do ponto $(x, y, u, v) = (1, 0, 1, 1)$.

(1.5 val.) (b) Calcule as derivadas $\dfrac{\partial u}{\partial x}(1, 0)$ e $\dfrac{\partial v}{\partial x}(1, 0)$

(2 val.) 12. Seja $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^2 tal que a equação $F(x, y, z) = 0$ define implicitamente z como função de x e y, ou seja, $z = \phi(x, y)$. Mostre que se (a, b) for um ponto de estacionaridade de ϕ então tem-se

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y}(a, b) = -\frac{\dfrac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}(a, b, c)}{\dfrac{\partial F}{\partial z}(a, b, c)}$$

em que $c = \phi(a, b)$.