Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Análise Matemática II

2º Exame - 18 de Janeiro de 2006 - 13h
Duração: 3h
(Cursos: LEA, LCI, LEFT, LMAC, LEBM)

Apresente e justifique todos os cálculos

1. Calcule os integrais seguintes:

(1 val.) a) $\displaystyle\int_0^3 \frac{x\,dx}{\sqrt{1+x^2}}$

(1 val.) b) $\displaystyle\int_1^2 \frac{dx}{x^2(1+x^2)}$

(1 val.) c) $\displaystyle\int_1^2 \log^2(x)\,dx$

(1 val.) 2. Esboce e calcule a área do conjunto $\left\{\,(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,:\, x^2 \le y \le 8-x^2\,\right\}$.

(2 val.) 3. Calcule o volume do sólido representado pelo conjunto

$$\left\{\,(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \,:\, x+y<z<1\,,\; x>0\,,\; y>0\,\right\}.$$

(2 val.) 4. Calcule $e^{0.2}$ com um erro inferior a 10^{-3}.

(1 val.) 5. Determine os pontos de estacionaridade da função

$$f(x)=\int_0^{\operatorname{sen} x} \frac{1}{1+t^{10}}\,dt.$$

(1.5 val.) 6. Uma harpa é formada por uma haste vertical ao longo do eixo Oy, por uma parte superior C_1 ao longo da linha $y=2-x$ e por uma parte inferior C_2 ao longo da linha $y=x$. Entre C_1 e C_2 estão esticadas na vertical, com um intervalo de 0.02, as cordas da harpa. Justifique que o comprimento total ℓ das cordas da harpa satisfaz a estimativa

$$100\int_{0.02}^{1}(1-x)\,dx \le \ell \le 100\int_0^{0.98}(1-x)\,dx$$

(1 val.) 7. Determine e classifique os pontos de estacionaridade da função $f(x,y)=x^2-y^2+x+y$.

(1 val.) 8. Considere a função $f(x,y,z)=e^x yz$ e seja $g:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$ uma função de classe C^1 tal que $g(0,0)=(0,1,2)$ e

$$Dg(0,0)=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

Calcule $\dfrac{\partial(f\circ g)}{\partial\vec{v}}(0,0)$ em que $\vec{v}=(1,2)$.

(1 val.) 9. Determine o plano tangente à superfície definida pela equação $z = \log(1 + x^2 + y^2)$, no ponto $(0, 0, 0)$.

10. Seja C a elipse definida pela equação $x^2 + 2xy + 2y^2 = 2$.

(1 val.) (a) Calcule os valores máximo e mínimo da função $f(x, y) = x$ em C.

(1 val.) (b) Uma faixa vertical em $\mathbb{R}^2$ é um conjunto da forma $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b\}$. Determine a menor faixa vertical que contém C.

11. Considere a equação

$$z \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y + y = 0.$$

(1 val.) (a) Mostre que esta equação define, numa vizinhança de $(0, 0, 1)$, y como função de (x, z), ou seja $y = g(x, z)$, de classe C^1.

(1.5 val.) (b) Calcule $\nabla g(0, 1)$.

(2 val.) 12. Considere a função $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definida por $g(x, y, z) = f(x - y, x + z)$, em que $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ é uma função de classe C^2. Justifique que g verifica a equação

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} - 2\frac{\partial^2 g}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2 g}{\partial z^2}.$$