Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Análise Matemática II

2º Teste e 1º Exame - 4 de Janeiro de 2006 - 13h
Duração: Teste 1h30m, Exame: 3h
(Cursos: LEA, LCI, LEFT, LMAC, LEBM)

Apresente e justifique todos os cálculos

1. Calcule os integrais seguintes:

(1 val.) a) $\displaystyle\int_0^{\sqrt{\pi}} x \operatorname{sen}(x^2)\, dx$

(1 val.) b) $\displaystyle\int_1^4 x^4 \log x \, dx$

(1 val.) c) $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)}\, dx.$

(1 val.) 2. Seja
$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x + y \geq 1,\ y \leq 2 - 2x^2,\ x \geq 0\}.$$
Esboce A e calcule a respectiva área.

3. Seja $f(x) = e^{x^2} - x^2$.

(1 val.) a) Escreva a série de Taylor de f em $x = 0$.

(1 val.) b) Determine a derivada $f^{(40)}(0)$.

(1.5 val.) 4. Calcule $\frac{1}{0.9}$ com um erro inferior a 10^{-3}.

(1 val.) 5. Determine os pontos de estacionaridade de
$$g(x) = \int_0^{x^3} \operatorname{sen}(t^2)dt.$$

(1.5 val.) 6. Calcule ou mostre que não existe
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\operatorname{sen}(x^2+3y^2)+x^3}{x^2+3y^2}.$$

VSFF

2º Teste

(1 val.) 7. Determine o gradiente de $f(x,y) = y^2 - x^3 + 3x$ e calcule a sua derivada segundo o vector $v = (2,3)$ no ponto $(x,y) = (2,2)$.

(1.5 val.) 8. Sejam $f(x,y,z) = x^2 + y^2 - z$ e $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ com $g(1,2) = (1,1,1)$ e

$$Dg(u,v) = \begin{bmatrix} 2u & 2v \\ u^2 & 0 \\ v & u \end{bmatrix}.$$

Calcule $D(f \circ g)(1,2)$.

9. Seja $S \subset \mathbb{R}^3$ a superfície definida por $e^{z-xy} - 1 = 0$.

(1 val.) a) Determine o plano tangente a S no ponto $(1,4,4)$.

(1 val.) b) Determine o ponto de S em que o respectivo plano tangente é horizontal.

10. Considere a função $g(x,y) = 1 - x^3 + x^2 + y^2$.

(1 val.) a) Determine e classifique os pontos de estacionaridade de g na região $x^2 + y^2 < 4$.

(1 val.) b) Justifique que existem extremos absolutos de g na região $x^2 + y^2 \leq 4$ e determine-os.

11. Considere a equação $-2x^2z + xy^4 + y^3z^2 = 0$.

(1 val.) a) Justifique que a equação determina x como função de (y,z), ou seja $x = f(y,z)$, numa vizinhança de $(1,1,1)$.

(1 val.) b) Calcule $\nabla f(1,1)$.

(1.5 val.) 12. Sejam A e B duas superfícies compactas em $\mathbb{R}^3$. Seja $d > 0$ a distância mínima entre A e B, e sejam $p \in A, q \in B$ tais que $||p-q|| = d$. Mostre que o vector $p-q$ é perpendicular a A em p e perpendicular a B em q.