

## Cálculo Diferencial e Integral II

### Exercícios de Auto-Avaliação (Teorema da Função Inversa, Teorema da Função Implícita)

1. Considere a função  $f(x, y) = (x^2 - y^2, 2xy)$ .
  - a) Mostre que  $f$  não é injectiva no seu domínio.
  - b) Determine os pontos em torno dos quais a função  $f$  é injectiva.
  - c) Calcule a derivada de  $f^{-1}$  no ponto  $(-2, 0)$ .
2. Seja  $F(x, y, z) = (x + y + z, x \cos(y^2 + z^2) + z)$  e considere o sistema de equações  $F(x, y, z) = (0, 0)$ .
  - a) Que pares de variáveis se devem escolher para se descreverem as soluções do sistema, numa vizinhança da origem, como funções da terceira variável ?
  - b) Para essas escolhas, determine as derivadas das funções implícitas na origem.
3. Seja  $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  uma função de classe  $C^1$ . Supondo que a equação  $F(x, y) = 0$  define  $y$  como função de  $x$ , ou seja,  $y = y(x)$ , em torno da origem, calcule as derivadas  $y'(0)$  e  $y''(0)$  em termos de derivadas parciais de  $F$ .
4. Considere a equação  $xy + e^z + e^{yz} = 2$ .
  - a) Mostre que esta equação define, numa vizinhança da origem,  $z$  como função de  $x$  e de  $y$ , ou seja,  $z = z(x, y)$ .
  - b) Mostre que a função  $z$  tem um mínimo no ponto  $(x, y) = (0, 0)$ .
  - c) Escreva o polinómio de Taylor de  $z$  de grau dois em torno da origem.
5. Num ecossistema convivem quatro espécies animais com densidades populacionais determinadas pelas variáveis  $x, y, u, v$ . Determinou-se que estas variáveis estão relacionadas pelas equações:

$$\begin{cases} u &= 2 \cos(\pi(x^2 + y^2)) - x^2y \\ v &= 3 \sin(\pi(x^2 + y^2)) + 2xy^2 \end{cases} .$$

Em regime normal as densidades populacionais assumem os valores  $x = 1, y = 1, u = 1, v = 2$ . Nas perguntas seguintes assume-se que o sistema está a funcionar suficientemente próximo do regime normal.

- a) Será possível determinar as densidades populacionais  $x, y$  medindo  $u, v$  ?
  - b) Se a densidade populacional  $v$  aumentar um pouco as populações das espécies com densidades  $x$  e  $y$  aumentam, diminuem ou ficam aproximadamente constantes?
6. Repita as questões do problema anterior para o ecossistema determinado pelas equações

$$\begin{cases} 11e^{-2+x+u} - y^2v^2 - 10v = 0 \\ 5e^{-1+y} - 5e^{-1+x} + 10(u-1)v = 0, \end{cases}$$

em torno do ponto  $(1, 1, 1, 1)$ .