



INSTITUTO SUPERIOR TÉCNICO
Universidade Técnica de Lisboa

O Grupo Fundamental do Complementar de um Arranjo de Hiperplanos Complexos

Iara Cristina Alvarinho Gonçalves

Dissertação para obtenção do Grau de Mestre em
Matemática e Aplicações

Júri

Presidente: Doutor Rui António Loja Fernandes

Orientador: Doutor Gustavo Rui Gonçalves Fernandes de Oliveira Granja

Vogal: Doutora Maria Joana Bordalo Mendes Ventura

Setembro 2007

Agradecimentos

Ao Professor Gustavo Granja pela disponibilidade e apoio ao longo de todas as etapas do trabalho.

Ao Ruben Martins pelo esclarecimento de dúvidas em relação à utilização do LaTeX e à elaboração das figuras.

À minha família pela presença constante e confiança em todos estes anos.

Resumo

Neste trabalho dá-se uma demonstração detalhada de um Teorema de W. Arvola que calcula o grupo fundamental do complementar de uma união finita de hiperplanos afins em \mathbb{C}^n . Apresenta-se um exemplo detalhado de cálculo do complementar de uma união de quatro linhas em \mathbb{C}^2 . Finalmente estuda-se a correspondência entre arranjos de hiperplanos e os grafos que lhes são associados para obter a apresentação do grupo fundamental. Analisa-se completamente alguns casos simples e obtêm-se restrições gerais para os grafos quanto à distribuição dos vértices.

Palavras Chave

Arranjos de Hiperplanos, Grupo Fundamental.

Abstract

We give a detailed proof of a Theorem of W. Arvola which computes the fundamental group of the complement of a finite union of affine hyperplanes in \mathbb{C}^n . We also present a detailed example of the computation for a union of four lines in \mathbb{C}^2 . Finally we study the correspondence between hyperplane arrangements and the graphs which are associated to them in order to obtain a presentation for the fundamental group. We analyse completely some simple cases and obtain general restrictions on the graphs regarding the distribution of its vertices.

Keywords

Hyperplane Arrangements, Fundamental Group.

Índice

1	Introdução	1
2	Preliminares	3
2.1	O Grupo Fundamental	3
2.2	O Espaço Projectivo	5
2.3	Grafos	6
3	O Teorema de Arvola	7
3.1	O Teorema de Zariski	7
3.2	O Grafo de um Arranjo de Hiperplanos	8
3.3	Cálculo do Grupo Fundamental	13
4	Exemplo	27
5	A Correspondência entre Arranjos e Grafos	37
5.1	Arranjos com um ou dois hiperplanos	37
	Dois hiperplanos paralelos	37
	Dois hiperplanos concorrentes	38
5.2	Arranjos com três hiperplanos	38
	Três hiperplanos paralelos	38
	Dois hiperplanos paralelos e o terceiro concorrente	39
	Três hiperplanos concorrentes num ponto.	49
	Três hiperplanos concorrentes em três pontos	50
5.3	Restrições sobre os vértices de um grafo admissível	50

Lista de Figuras

2.1	Conjugações num plano perfurado.	4
3.1	Geradores	15
3.2	projecção da faixa M_i no plano x_1, x_2	25
3.3	Imagem em $\mathbb{C} \setminus \{\lambda_1(H_{j+1}), \dots, \lambda_1(H_k)\}$ de $G(i-1)$ e $G(i)$	26
4.1	Aplicação de varrimento f	28
4.2	O grafo Γ_f^2	35
5.1	Hiperplanos paralelos	38
5.2	Γ_f^2 no caso $\{r, v, v, v, v, r\}$	41
5.3	Gráfico de f	42
5.4	Região para os ângulos β e γ no caso $\{r, v, v, v, v, r\}$	44
5.5	Γ_f^2 no caso $\{v, r, v, v, r, v\}$	44
5.6	Região para os ângulos β e γ no caso $\{v, r, v, v, r, v\}$	46
5.7	Γ_f^2 no caso $\{r, v, v, r\}$	47
5.8	Região para os ângulos β e γ no caso $\{r, v, v, r\}$	49
5.9	Γ_f^2 para três hiperplanos com um único ponto múltiplo.	49

Capítulo 1

Introdução

Um arranjo de hiperplanos complexos é uma união finita de hiperplanos afins num espaço vectorial complexo de dimensão finita. Apesar da simplicidade desta definição, o estudo destes objectos constitui toda uma área da Matemática que se mantém presentemente bastante activa (ver por exemplo [5]) e que apresenta fortes ligações com muitas áreas da Matemática tais como Álgebra, Geometria Algébrica, Combinatória e Topologia.

O objectivo deste trabalho é dar uma demonstração detalhada de um Teorema de W. Arvola [1] que dá uma apresentação para o grupo fundamental do complementar de um arranjo de hiperplanos complexos. O problema do cálculo do grupo fundamental foi primeiro considerado por R. Randell [6] que obteve a solução do problema apenas no caso em que o arranjo se obtém de um arranjo de hiperplanos reais através da operação de complexificação. A demonstração que daremos segue a demonstração de Arvola na sua organização mas os principais cálculos necessários para a aplicação do Teorema de Van Kampen são realizados de forma diferente de [1, 5].

Este trabalho encontra-se organizado da seguinte forma.

No Capítulo 2 definimos o grupo fundamental de um espaço topológico e enunciamos o Teorema de Seifert-Van Kampen - a principal ferramenta que utilizaremos no cálculo do grupo fundamental. Provamos ainda uma relação entre certos elementos do grupo fundamental de um plano perfurado que será utilizada na demonstração do Teorema de Arvola no capítulo seguinte. Finalmente revemos a noção de grafo e espaço projectivo que serão necessárias mais tarde.

No Capítulo 3 provamos o Teorema de Arvola. Começamos por enunciar um Teorema de Zariski que reduz o problema do cálculo do grupo fundamental do complementar de um arranjo de hiperplanos em \mathbb{C}^n ao cálculo do grupo fundamental do complementar de uma união de linhas complexas em \mathbb{C}^2 . O cálculo deste grupo fundamental é então realizado em duas etapas.

Primeiro explicamos como associar ao arranjo um objecto combinatório - um grafo linear por troços em \mathbb{R}^2 com um conjunto distinguido de vértices (os vértices virtuais) aos quais é atribuído um sinal. Depois aplicamos o Teorema de Van Kampen para obter uma apresentação do grupo fundamental a partir deste grafo.

O Capítulo 4 consiste numa aplicação do Teorema de Arvola ao cálculo do grupo fundamental do complementar de um conjunto específico de 4 linhas em \mathbb{C}^2 .

No Capítulo 5 estudamos a correspondência entre arranjos e grafos utilizada na demonstração do Teorema de Arvola. Apresentamos ainda o grupo fundamental de todos os arranjos com até três hiper-

planos e analisamos completamente a correspondência entre arranjos e grafos no primeiro caso não trivial, nomeadamente, o caso de três hiperplanos em que dois deles são paralelos. Finalmente, obtemos restrições gerais sobre o grafo associado a um arranjo. Em particular mostramos que o número de vértices virtuais de um grafo admissível é sempre par e damos um majorante para o número de vértices virtuais em termos do número de hiperplanos no arranjo.

Capítulo 2

Preliminares

2.1 O Grupo Fundamental

Um dos principais problemas da topologia consiste em determinar se dois espaços topológicos dados são ou não homeomorfos.

Mostrar que dois espaços são homeomorfos significa construir uma aplicação contínua, de um espaço no outro, com inversa contínua. Apesar de ser um problema de certa dificuldade são conhecidas técnicas para o resolver. O problema de mostrar que dois espaços não são homeomorfos parece à partida bem mais complicado, uma vez que implica mostrar que não existe nenhuma função contínua, com inversa contínua, de um dos espaços no outro.

Um método muito utilizado para resolver esta questão envolve o *grupo fundamental* de um espaço, que é um invariante topológico e portanto permite mostrar que dois espaços não são homeomorfos.

Por uma questão de completude incluímos aqui as definições básicas e refere-se o leitor a [4] para mais detalhes.

Um **caminho** num espaço topológico X é uma aplicação contínua $\alpha: [0, 1] \rightarrow X$. Se α, β são caminhos em X com $\alpha(1) = \beta(0)$, define-se a **concatenação** de α e β por

$$(\alpha * \beta)(t) = \begin{cases} \alpha(2t) & \text{se } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \beta(2t - 1) & \text{se } \frac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Uma **homotopia de caminhos** entre $\alpha, \beta: [0, 1] \rightarrow X$ com $\alpha(0) = \beta(0) = x_0$ e $\alpha(1) = \beta(1) = x_1$ é uma função contínua $H: [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow X$ com

$$H(s, 0) = \alpha(s) \quad ; \quad H(s, 1) = \beta(s)$$

$$H(0, t) = x_0 \quad ; \quad H(1, t) = x_1.$$

A relação de homotopia de caminhos é uma relação de equivalência no conjunto dos caminhos em X denotada por \cong e a operação de concatenação está bem definida nas classes de equivalência.

Seja X um espaço e x_0 um ponto de X . Um caminho em X que começa e termina em x_0 é chamado um **laço** baseado em x_0 .

O conjunto das classes de homotopia de caminhos dos laços baseados em x_0 , com a operação de

concatenação $*$, é um grupo chamado o **grupo fundamental** de X em x_0 denotado por

$$\pi_1(X, x_0).$$

Uma aplicação contínua $f: X \rightarrow Y$ determina por composição um homomorfismo

$$\pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(Y, y_0).$$

A principal ferramenta utilizada no cálculo do grupo fundamental é o seguinte Teorema.

Teorema 2.1.1 (Seifert-Van Kampen). *Seja $X = U \cup V$, com U e V abertos em X . Assuma-se que U , V e $U \cap V$ são conexos por arcos e que $x_0 \in U \cap V$. Seja*

$$j: \pi_1(U, x_0) * \pi_1(V, x_0) \rightarrow \pi_1(X, x_0)$$

o homomorfismo a partir do produto livre determinado pelos homomorfismos j_1 e j_2 induzidos pelas inclusões de U e V em X .

Então o homomorfismo j é sobrejectivo e o seu núcleo é o menor subgrupo normal N do produto livre que contém as palavras da forma

$$i_1(g)^{-1}i_2(g)$$

com $g \in \pi_1(U \cap V, x_0)$ e $i_1: U \cap V \hookrightarrow U$ e $i_2: U \cap V \rightarrow V$ as inclusões.

O seguinte lema será utilizado no próximo capítulo no cálculo do grupo fundamental de um arranjo de hiperplanos. Neste lema e no resto do trabalho usamos a seguinte notação para conjugação de um elemento g por um elemento h num grupo:

$$g^h = h^{-1}gh.$$

Lema 2.1.2. *Seja $X = \mathbb{R}^2 \setminus \{a, b\}$ com $a \neq b$. Considerem-se os laços α , β e γ em X representados na figura, onde $\gamma = \lambda * \nu_e * \nu_d * \lambda^{-1}$, $\alpha = \kappa * \nu_d * \nu_e * \kappa^{-1}$ e o ponto de base comum x_0 se encontra à esquerda da figura.*

Verificam-se as seguintes relações em $\pi_1(X, x_0)$:

$$\gamma = \alpha^\beta, \quad \alpha = \gamma^{\beta^{-1}}.$$

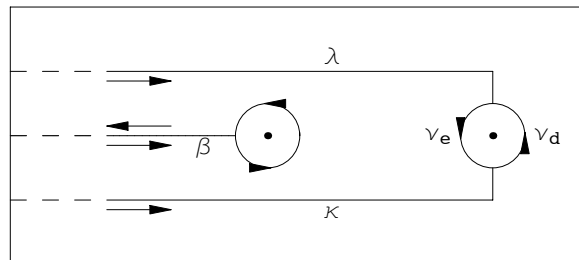


Figura 2.1: Conjugações num plano perfurado.

Demonstração. É claro da figura que

$$\lambda \cong \beta^{-1} * \kappa * \nu_e^{-1}$$

e portanto

$$\gamma = \lambda * \nu_e * \nu_d * \lambda^{-1} = \beta^{-1} * \kappa * \nu_e^{-1} * \nu_e * \nu_d * \nu_e * \kappa^{-1} * \beta = \beta^{-1} * \kappa * \nu_d * \nu_e * \kappa^{-1} * \beta = \beta^{-1} * \alpha * \beta.$$

□

2.2 O Espaço Projectivo

Nesta secção revemos a noção de espaço projectivo e explicamos a correspondência entre hiperplanos no espaço projectivo e hiperplanos no espaço afim que será necessária no Capítulo 3 quando aplicarmos o Teorema de Zariski.

Definição 2.2.1. *Seja \mathbb{K} um corpo. O espaço projectivo $\mathbb{K}P^n$ é o conjunto quociente*

$$\mathbb{K}P^n = (\mathbb{K}^{n+1} \setminus \{0\}) / \sim$$

onde \sim é a relação de equivalência definida por

$$(z_0, \dots, z_n) \sim (\lambda z_0, \dots, \lambda z_n) \quad \lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}.$$

A classe de equivalência em $\mathbb{K}P^n$ determinada por (z_0, \dots, z_n) denota-se por $[z_0 : \dots : z_n]$.

Definição 2.2.2. *Uma hipersuperfície projectiva em $\mathbb{K}P^n$ é um conjunto da forma $p(z_0, \dots, z_n) = 0$ com p um polinómio homogéneo em z_0, \dots, z_n . Um hiperplano projectivo H em $\mathbb{K}P^n$ é uma hipersuperfície determinada por um polinómio linear não nulo. Um hiperplano no espaço afim é um subconjunto de \mathbb{K}^n da forma*

$$\{(w_1, \dots, w_n) \in \mathbb{K}^n : a_1 w_1 + \dots + a_n w_n = b\}$$

com $(a_1, \dots, a_n) \neq 0$.

Lema 2.2.3. *Seja L um hiperplano projectivo em $\mathbb{K}P^n$. Existe uma bijecção*

$$\phi_L : \mathbb{K}P^n \setminus L \rightarrow \mathbb{K}^n$$

que leva hiperplanos projectivos em hiperplanos afins.

Demonstração. Consideremos primeiro o caso especial do hiperplano L_0 definido por $z_0 = 0$. Neste caso podemos definir

$$\phi_{L_0} : \mathbb{K}P^n \setminus L_0 \rightarrow \mathbb{K}^n$$

pela expressão

$$\phi_{L_0}([z_0 : \dots : z_n]) = \left(\frac{z_1}{z_0}, \dots, \frac{z_n}{z_0} \right)$$

que tem inversa

$$\phi_{L_0}^{-1}(w_1, \dots, w_n) = (1, w_1, \dots, w_n).$$

Dado um hiperplano L definido pela equação $A_0z_0 + \dots + A_nz_n = 0$, seja $B = [b_{ij}]_{i,j=0}^n$ uma matriz invertível com entradas em \mathbb{K} tal que $b_{0j} = A_j$. B determina uma bijecção de $\mathbb{K}P^n$

$$\psi_B: \mathbb{K}P^n \rightarrow \mathbb{K}P^n$$

determinada pela expressão

$$\psi_B([z_0: \dots: z_n]) = \left[\sum_{j=0}^n b_{0j}z_j: \dots: \sum_{j=0}^n b_{nj}z_j \right].$$

Então temos

$$[z_0: \dots: z_n] \in L \Leftrightarrow \psi_B([z_0: \dots: z_n]) \in L_0$$

e definimos

$$\phi_L = \phi_{L_0} \circ \psi_B.$$

Claramente ψ_B leva hiperplanos projectivos em hiperplanos projectivos. A imagem de um hiperplano projectivo $A_0z_0 + \dots + A_nz_n = 0$ por ϕ_{L_0} é o hiperplano no espaço afim definido pela equação

$$A_0 + A_1w_1 + \dots + A_nw_n = 0$$

o que conclui a demonstração. □

É claro da demonstração que a aplicação do lema anterior determina uma correspondência biunívoca entre hiperplanos afins em \mathbb{K}^n e hiperplanos em $\mathbb{K}P^n$ diferentes de L .

Observe-se que quando o corpo \mathbb{K} em questão é \mathbb{R} ou \mathbb{C} , \mathbb{K}^n dispõe de uma topologia natural que induz em $\mathbb{K}P^n$ a topologia quociente. As aplicações definidas no lema anterior e as suas inversas são contínuas para estas topologias e portanto quando $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} , a aplicação ϕ_L é um homeomorfismo.

2.3 Grafos

Definição 2.3.1. Um **grafo** é um par de conjuntos (V, E) , com E um conjunto de pares de pontos distintos de V . V diz-se o conjunto dos **vértices** e E o conjunto das **arestas**. Dado $e = \{v_1, v_2\} \in E$ diz-se que v_1 e v_2 são as **extremidades** da aresta e .

Capítulo 3

O Teorema de Arvola

Neste capítulo definimos o conceito de arranjo de hiperplanos e damos uma demonstração detalhada do Teorema de W. Arvola que calcula o grupo fundamental do complementar de um arranjo de hiperplanos complexos.

Definição 3.0.2. *Seja \mathbb{K} um corpo e $V_{\mathbb{K}}$ um espaço vectorial de dimensão l . Um **hiperplano** H em $V_{\mathbb{K}}$ é um espaço afim de dimensão $(l - 1)$. Um **arranjo de hiperplanos** $\mathcal{A}_{\mathbb{K}}$ é um conjunto finito de hiperplanos em $V_{\mathbb{K}}$.*

No caso em que $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ o complementar em $V_{\mathbb{K}}$ de um arranjo de hiperplanos é um espaço topológico e o objectivo deste capítulo é dar uma apresentação do grupo fundamental deste espaço. Para simplificar a notação, omitimos o símbolo \mathbb{K} quando $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Definição 3.0.3. *Define-se a **variedade** de \mathcal{A} como*

$$N(\mathcal{A}) = \bigcup_{H \in \mathcal{A}} H$$

*Define-se o **complementar** de \mathcal{A} como*

$$M(\mathcal{A}) = V \setminus N(\mathcal{A}).$$

Neste trabalho estamos interessados no estudo da topologia de $M(\mathcal{A})$.

3.1 O Teorema de Zariski

De modo a reduzir a complexidade do problema é possível, de acordo com o Teorema de Zariski que enunciamos em seguida, analisar a questão numa dimensão mais baixa, assumindo que \mathcal{A} é um arranjo de linhas complexas em \mathbb{C}^2 .

Teorema 3.1.1 (Zariski [2]). *Seja F uma hipersuperfície projectiva em $\mathbb{C}P^n$ e L um hiperplano genérico em $\mathbb{C}P^n$. Então a inclusão*

$$L \setminus F \hookrightarrow \mathbb{C}P^n \setminus F$$

induz um isomorfismo de grupos fundamentais desde que $n > 2$.

O sentido da palavra genérico no enunciado anterior é o seguinte. O conjunto dos hiperplanos em $\mathbb{C}P^n$ identifica-se naturalmente com um espaço projectivo $\mathbb{C}P^n$ através da correspondência

$$A_0 z_0 + \dots + A_n z_n = 0 \leftrightarrow [A_0 : \dots : A_n]$$

e portanto tem uma topologia natural. O significado de genérico é que o conjunto dos hiperplanos L para os quais o enunciado do Teorema é satisfeito forma um conjunto aberto e denso em $\mathbb{C}P^n$.

Corolário 3.1.2. *Seja $n > 2$ e $\mathcal{A} = \{H_1, \dots, H_k\}$ um arranjo de hiperplanos complexos em \mathbb{C}^n . Então existe um subespaço afim $S \subset \mathbb{C}^n$ de dimensão 2 tal que a inclusão*

$$S \setminus \cup_{i=1}^k H_i \hookrightarrow M(\mathcal{A})$$

induz um isomorfismo de grupos fundamentais.

Demonstração. Pelo Lema 2.2.3 temos um homeomorfismo

$$\phi_{L_0}^{-1}: M(\mathcal{A}) \rightarrow \mathbb{C}P^n \setminus (L_0 \cup \cup_{i=1}^k \phi_{L_0}^{-1}(H_i)).$$

Sejam p_i polinómios lineares homogéneos que definem os hiperplanos $\phi_{L_0}^{-1}(H_i)$. Então a equação

$$z_0 p_1(z_0, \dots, z_n) \cdots p_k(z_0, \dots, z_n) = 0$$

define o conjunto $F = L_0 \cup \cup_{i=1}^k \phi_{L_0}^{-1}(H_i)$ que é portanto uma hipersuperfície projectiva.

Como $n > 2$, pelo Teorema de Zariski, existe um hiperplano $L \subset \mathbb{C}P^n$ que não está contido em qualquer dos hiperplanos contidos em F e tal que

$$L \setminus F \hookrightarrow \mathbb{C}P^n \setminus F$$

induz um isomorfismo entre os grupos fundamentais.

Conclui-se que

$$\phi_{L_0}(L) \setminus (H_1 \cup \dots \cup H_n) \hookrightarrow M(\mathcal{A})$$

induz um isomorfismo de grupos fundamentais. Como $\phi_{L_0}(L)$ é um hiperplano afim de \mathbb{C}^n , é isomorfo como espaço afim a \mathbb{C}^{n-1} e como $L \not\subset \phi_{L_0}^{-1}(H_i)$ os hiperplanos afins H_i intersectam L em planos afins de dimensão $n - 2$.

Desde que $n - 1 > 2$ podemos repetir o argumento acima para o arranjo de hiperplanos $\{H_1 \cap L, \dots, H_k \cap L\}$ em L e prosseguindo desta maneira obtemos o resultado pretendido. \square

3.2 O Grafo de um Arranjo de Hiperplanos

Vamos utilizar as coordenadas z_1 e z_2 para pontos de \mathbb{C}^2 e x_1, x_2, y_1, y_2 para pontos de \mathbb{R}^4 , tal que $z_1 = x_1 + i y_1$ e $z_2 = x_2 + i y_2$. Ser-nos-á também útil definir as seguintes projecções: ϕ^2, ϕ^3, ϕ , onde $\phi^2 = \phi \circ \phi^3$.

$$\begin{aligned} \phi^2: \mathbb{R}^4 &\rightarrow \mathbb{R}^2 & \phi^2(x_1, y_1, x_2, y_2) &= (x_1, x_2), \\ \phi^3: \mathbb{R}^4 &\rightarrow \mathbb{R}^3 & \phi^3(x_1, y_1, x_2, y_2) &= (x_1, x_2, y_2), \\ \phi: \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbb{R}^2 & \phi(x_1, x_2, y_2) &= (x_1, x_2). \end{aligned}$$

Definição 3.2.1. Um **ponto múltiplo** de \mathcal{A} é um ponto que pertence a dois ou mais hiperplanos distintos de \mathcal{A} . Designa-se o conjunto dos pontos múltiplos por P .

Note-se que P é sempre um conjunto finito.

A ideia principal para o cálculo do grupo fundamental é "varrer" \mathbb{C}^2 por hiperplanos reais usando a coordenada x_1 como parâmetro. A coordenada x_1 será utilizada para separar \mathbb{C}^2 em intervalos, cada um dos quais conterá no máximo um ponto múltiplo. O Lema 3.2.2 garante a existência de coordenadas que permitem esta decomposição de \mathbb{C}^2 .

Lema 3.2.2. Fazendo uma transformação linear apropriada pode assumir-se que \mathcal{A} satisfaz as seguintes condições:

1. Não existe nenhum hiperplano em \mathcal{A} da forma $z_1 = c$ com $c \in \mathbb{C}$.
2. Se p e $p' \in P$ são pontos múltiplos distintos então $x_1(p) \neq x_1(p')$.

Demonstração. Para satisfazer a condição 1 podemos efectuar uma mudança de coordenadas da forma

$$\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z'_1 \\ z'_2 \end{bmatrix}.$$

A linha $Az_1 + Bz_2 = C$ é transformada em $Az'_1 + (\lambda + B)z'_2 = C$ e portanto todos os valores de λ , excepto um número finito, farão com que as linhas satisfaçam a condição 1. nas novas coordenadas.

Para que \mathcal{A} satisfaça a condição 2 podemos efectuar uma mudança de coordenadas da forma

$$\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z'_1 \\ z'_2 \end{bmatrix}.$$

Sejam $p_1, \dots, p_n \in \mathbb{C}^2$ os pontos múltiplos de \mathcal{A} . Queremos ver que existe $\theta \in [0, 2\pi[$ de modo que, escrevendo $A_\theta = \begin{bmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, as partes reais da primeira coordenada dos pontos $A_\theta p_1, \dots, A_\theta p_n$ sejam diferentes.

Seja $p_i = (x_{1i}, y_{1i}, x_{2i}, y_{2i})$. Duas das partes reais serão iguais quando existirem $i \neq j$ tais que

$$\begin{aligned} \cos \theta x_{1i} + \operatorname{sen} \theta y_{1i} &= \cos \theta x_{1j} + \operatorname{sen} \theta y_{1j} \\ \cos \theta (x_{1i} - x_{1j}) &= \operatorname{sen} \theta (y_{1i} - y_{1j}) \\ \tan \theta &= \left(\frac{x_{1i} - x_{1j}}{y_{1i} - y_{1j}} \right). \end{aligned}$$

Assim, existem no máximo $2 \binom{n}{2}$ valores de θ para os quais algum par de pontos tem a mesma coordenada x_1 , após rotação por θ , e portanto é sempre possível encontrar um valor de θ que satisfaça a condição pretendida.

Finalmente notamos que a mudança de coordenadas A_θ preserva a condição 1 do Lema. \square

Vamos agora definir em \mathbb{C}^2 um grafo associado a \mathcal{A} que contém toda a informação necessária para o cálculo do grupo fundamental. Este grafo é definido utilizando uma função linear por troços $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ chamada **aplicação de varrimento**. Para efeitos de cálculo do grupo fundamental só estaremos interessados em funções que satisfaçam algumas condições que são enunciadas em seguida.

Definição 3.2.3. A função linear por troços $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ diz-se **adequada** a \mathcal{A} se

$$p \in P \Rightarrow y_1(p) = f(x_1(p))$$

isto é, o gráfico de f em \mathbb{R}^2 contém as primeiras coordenadas complexas de todos os pontos múltiplos de \mathcal{A} .

Suponha-se que $P = \{p_1, \dots, p_r\}$. A função f diz-se **plana** se existem números reais u_i, v_i tais que

$$x_1(p_i) < v_i < u_i < x_1(p_{i+1}) \quad 1 \leq i \leq r-1$$

e

$$\begin{aligned} -\infty < t \leq v_1 &\Rightarrow f(t) = y_1(p_1), \\ u_{i-1} \leq t \leq v_i &\Rightarrow f(t) = y_1(p_i), & 2 \leq i \leq r-1, \\ u_{r-1} \leq t < \infty &\Rightarrow f(t) = y_1(p_r). \end{aligned}$$

ou seja, f é constante numa vizinhança dos pontos múltiplos e de infinito, e linear no complementar da vizinhança.

A partir de agora consideraremos apenas funções de varrimento planas e adequadas e abreviamos $N(\mathcal{A})$ por N .

Em seguida considere-se a família de linhas complexas $K_t(f)$, dependentes de $t \in \mathbb{R}$

$$K_t(f) = \{q \in \mathbb{C}^2 \mid z_1(q) = t + i f(t)\} = \{q \in \mathbb{R}^4 \mid x_1(q) = t \text{ e } y_1(q) = f(t)\}.$$

Definição 3.2.4. Seja $\Gamma_f^4 = \bigcup_{t \in \mathbb{R}} N \cap K_t(f)$ e defina-se as suas projecções como

$$\Gamma_f^3 = \phi^3(\Gamma_f^4), \quad \Gamma_f^2 = \phi^2(\Gamma_f^4).$$

Como assumimos que os hiperplanos $H \in \mathcal{A}$ não são da forma $z_1 = c$, para cada $t \in \mathbb{R}$, o conjunto $N \cap K_t(f) = (\bigcup_{H \in \mathcal{A}} H) \cap K_t(f)$ possui no máximo n elementos, onde n é o numero de hiperplanos do arranjo \mathcal{A} considerado.

Na realidade, excepto quando t é a primeira coordenada de algum ponto múltiplo, $N \cap K_t(f)$ tem exactamente n elementos e quando t é a primeira coordenada de um ponto múltiplo (que é único pelo Lema 3.2.2), $N \cap K_t(f)$ contém exactamente $n - k + 1$ elementos onde k é o número de hiperplanos que se intersecta no ponto múltiplo.

É assim possível associar uma estrutura de grafo a Γ_f^4 , com conjunto de vértices, $V^4 = P$ e conjunto de arestas, E^4 , formado por caminhos (em \mathbb{C}^2 , contidos em N) que unem os vértices, definidos pela fórmula

$$\epsilon(t) = H \cap \Gamma_t(f)$$

com $H \in \mathcal{A}$. As arestas dividem-se em limitadas (quando unem dois vértices) e ilimitadas (quando se iniciam num vértice e continuam para o infinito). Naturalmente cada aresta está contida num único hiperplano H e portanto cada duas arestas, ou são disjuntas, ou se encontram num vértice. Para cada H , $\Gamma_f^4 \cap H$ é uma união de arestas.

Chama-se ao par $(\mathbb{R}^4, \Gamma_f^4)$ o grafo-4 de \mathcal{A} .

Em $K_t(f)$ a coordenada y_1 pode ser determinada a partir de x_1 , pois $y_1 = f(x_1)$, e portanto a restrição da projecção $\phi|_{\Gamma_f^4}$ é uma bijecção entre Γ_f^4 e Γ_f^3 . Podemos assim dar a Γ_f^3 uma estrutura de grafo com conjunto de vértices $V^3 = \phi^3(V^4)$ e conjunto de arestas dado por $E^3 = \phi^3(E^4)$. Chama-se a $(\mathbb{R}^3, \Gamma_f^3)$ o grafo-3 de \mathcal{A} .

De acordo com a condição 2 do Lema 3.2.2 as coordenadas x_1 dos ponto múltiplos são distintas e logo a restrição da projecção $\phi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ a V^3 é um monomorfismo. No entanto, no interior das arestas $E \in E^3$, ϕ pode não ser um monomorfismo e portanto não é possível dar imediatamente a Γ_f^2 uma estrutura de grafo. Para que se possa ter uma estrutura de grafo em Γ_f^2 , adequada ao cálculo de $\pi_1(M)$, é necessário impor certas condições às funções f e ϕ , procedendo, se necessário, a uma mudança de coordenadas.

Escrevemos $|X|$ para a cardinalidade de um conjunto X .

Definição 3.2.5. *O conjunto dos vértices virtuais de Γ_f^2 é o conjunto*

$$Q = \{q \in \Gamma_f^2 \mid |\phi^{-1}(q)| > 1\}.$$

O conjunto dos vértices reais de Γ_f^2 é o conjunto

$$P = \phi(V^3).$$

O conjunto dos vértices de Γ_f^2 é o conjunto

$$V = P \cup Q.$$

Recorde-se que $\phi^2: P \rightarrow P$ é uma bijecção, isto é os vértices reais correspondem biunivocamente aos pontos múltiplos de \mathcal{A} .

Por outro lado, a existência de vértices virtuais depende da posição relativa dos hiperplanos em \mathbb{C}^2 e da escolha da função f .

Denotamos o interior de uma aresta E de um grafo por $\text{int } E$.

Lema 3.2.6. *É possível escolher coordenadas e uma função de varrimento f tais que as seguintes condições sejam satisfeitas:*

1. $|\phi^{-1}(m)| \leq 2$ para todo o $m \in \Gamma_f^2$.
2. se $p \in P$ então $|\phi^{-1}(p)| = 1$.
3. se E e E' são arestas em Γ_f^3 e $q \in \phi(\text{int } E) \cap \phi(\text{int } E')$, então $\phi(E)$ e $\phi(E')$ intersectam-se transversalmente em q .
4. o conjunto dos vértices virtuais, Q , de Γ_f^2 é finito.

*Neste caso Γ_f^2 é dito **regular**.*

Demonstração. Fazendo uma mudança de coordenadas da forma

$$\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\theta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z'_1 \\ z'_2 \end{bmatrix}.$$

as primeiras três condições são verificadas para um valor de θ genérico.

Se $\mathbf{q} \in \mathbf{Q}$, então $\mathbf{q} \in \phi(\text{int } E) \cap \phi(\text{int } E') \subset \Gamma_f^2$. Como f é plana temos apenas um número finito de arestas e logo um número finito de vértices virtuais, pelo que a condição 4 também se verifica. \square

Definição 3.2.7. Para cada $H \in \mathcal{A}$, seja $\mathbf{H} = \phi^2(H \cap \Gamma_f^4)$ o **traço** de H em Γ_f^2 . Seja $\mathbf{A} = \{\mathbf{H} \mid H \in \mathcal{A}\}$. Os pontos de \mathbf{H} correspondentes aos pontos em que o declive de f muda são chamados de **nós**. O conjunto de todos os nós em Γ_f^2 designa-se \mathbf{N} .

Corolário 3.2.8. Se Γ_f^2 é regular, então:

1. o vértice real $\mathbf{p} \in \mathbf{P}$ está contido nos traços $\mathbf{H}_1, \dots, \mathbf{H}_k$ se e só se o único ponto múltiplo $p \in P$ com $\mathbf{p} = \phi^2(p)$ está contido nos hiperplanos H_1, \dots, H_k ;
2. se $\mathbf{q} \in \mathbf{Q}$ é um vértice virtual, então está contido em exactamente dois traços \mathbf{H} e \mathbf{H}' e esses traços intersectam-se transversalmente em \mathbf{q} .

Demonstração. 1. Uma vez que, se $\mathbf{p} \in \mathbf{P}$, então $|\phi^{-1}(\mathbf{p})| = 1$ (pelo Lema 3.2.6), e recordando que ϕ^3 restrito a Γ_f^4 é um isomorfismo, $\mathbf{p} = \phi^2(p) = \phi(\phi^3(p))$ é único. Se $\mathbf{p} \in \mathbf{H}_1, \dots, \mathbf{H}_k$, então $\phi^2(p) \in \phi^2(H_1 \cap \Gamma_f^4), \dots, \phi^2(H_k \cap \Gamma_f^4) \Leftrightarrow p \in (H_1 \cap \Gamma_f^4), \dots, (H_k \cap \Gamma_f^4) \Rightarrow p \in H_1, \dots, H_k$.

2. Se $\mathbf{q} \in \mathbf{Q}$, então $|\phi^{-1}(\mathbf{q})| = 2$, o que significa que $\phi^{-1}(\mathbf{q})$ pertence a exactamente duas arestas de Γ_f^3 . Como Γ_f^3 e Γ_f^4 são isomorfos, arestas em Γ_f^3 correspondem biunivocamente a arestas em Γ_f^4 . Visto que $H \cap \Gamma_f^4$ é uma união de arestas, então \mathbf{q} está contido em exactamente dois traços \mathbf{H} e \mathbf{H}' , que se encontram transversalmente em \mathbf{q} por 3 do Lema 3.2.6. \square

Lema 3.2.9. Após uma conveniente escolha de coordenadas e de números reais u_i, v_i para a aplicação de varrimento plana f , é possível assumir que Γ_f^2 é um grafo regular cujo conjunto de vértices \mathbf{V} e o conjunto de nós \mathbf{N} satisfazem as seguintes condições:

1. se $\mathbf{v}, \mathbf{v}' \in \mathbf{V}$ são vértices distintos, então $x_1(\mathbf{v}) \neq x_1(\mathbf{v}')$;
2. se $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$ e $\mathbf{n} \in \mathbf{N}$, então $x_1(\mathbf{v}) \neq x_1(\mathbf{n})$.

Demonstração. 1. $\mathbf{V} = \mathbf{P} \cup \mathbf{Q}$. Esta condição é satisfeita após uma mudança de coordenadas

$$\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z'_1 \\ z'_2 \end{bmatrix},$$

com θ suficientemente pequeno. Se as condições dos Lemas 3.2.2 e 3.2.6 se verificam para um arranjo \mathcal{A} , também se verificam para arranjos suficientemente próximos. Logo, desde que θ seja suficientemente pequeno, estas condições continuam a verificar-se após a mudança de coordenadas.

2. Uma vez que os vértices são em número finito é sempre possível escolher u_i, v_i tais que esta condição se verifique. \square

Considere-se em \mathbb{C}^2 o arranjo \mathcal{A} de n hiperplanos. Seja $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$ um vértice (real ou virtual) tal que $\mathbf{v} \in H_j \cap \dots \cap H_k$.

Escolham-se $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ tais que $t_1 < x_1(\mathbf{v}) < t_2$ e de modo que não exista nenhum outro vértice na faixa $S = \{m \in \mathbb{R}^2 \mid t_1 \leq x_1(m) \leq t_2\}$. Seja $C_1 = \{m \in \mathbb{R}^2 \mid x_1(m) = t_1\}$ e $C_2 = \{m \in \mathbb{R}^2 \mid x_1(m) = t_2\}$. É óbvio que, para cada $H_i \in \mathcal{A}$, $\{C_j \cap H_i\}$, com $i = 1, 2$, corresponde a apenas um ponto. Defina-se $E(i) = (e_1(i), \dots, e_n(i))$, com $i = 1, 2$, como o conjunto das arestas de Γ_f^2 que intersectam C_i , ordenadas de modo crescente de acordo com o valor da sua coordenada x_2 em C_i .

Tome-se $e_k(1) \in E(1)$. Se $v \notin e_k(1)$ então $e_k(1)$ intersecta tanto C_1 como C_2 e logo $e_k(1) \in E(2)$ igualmente. Se $v \in e_k(1) \in E(1)$ então sabemos que existe uma única aresta em $E(2)$ que também contém v e pertence ao mesmo traço que $e_k(1)$ (os pontos iniciais e finais das arestas são determinados pelos vértices e portanto o mesmo traço de um hiperplano pode conter um número variável de arestas de acordo com os vértices que possui).

Sabendo desta relação, vamos então tentar escrever $E(2)$ a partir de $E(1)$.

Proposição 3.2.10. *Seja j o primeiro índice para o qual $e_j(1)$ contém v e seja k o último índice para o qual o mesmo se passa. Seja e'_l a aresta adjacente em v a $e_l(1)$. Então*

$$E(2) = (e_1(1), \dots, e_{j-1}(1), e'_k, e'_{k-1}, \dots, e'_{j+1}, e'_j, e_{k+1}(1), \dots, e_n(1)).$$

Demonstração. Como f é plana, f é constante numa vizinhança de $x_1(v)$. Uma vez que escolhemos C_1 e C_2 de modo a que não existisse mais do que um vértice no interior de S , sabemos que os traços dos $(k - j + 1)$ hiperplanos que contém v formam um "lápiz linear" numa sua vizinhança e portanto, logicamente, intersectam C_2 na ordem inversa pela qual intersectam C_1 . Assim, as arestas que pertencem aos traços dos mesmos hiperplanos surgem em $E(2)$ pela ordem inversa à que se encontravam em $E(1)$, ou seja $e_j(2) = e_k(1) = e'_{k-1}, e_{j+1}(2) = e_{k-1}(1) = e'_{k-2}, \dots, e_k(2) = e_j(1) = e'_j$. Para os hiperplanos que não contém v a ordem pela qual intersectam C_1 e C_2 é a mesma e logo, para $i < j$ e $k > i$, $e_i(1) = e_i(2)$. \square

Apesar da introdução dos vértices virtuais, o grafo Γ_f^2 não contém ainda toda a informação do grafo-3 $(\mathbb{R}^3, \Gamma_f^3)$. Para expressar em Γ_f^2 toda a informação do grafo-3 é necessário atribuir aos vértices virtuais um sinal da forma explicada na definição seguinte.

Seja $q \in \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}^2$ um vértice virtual e sejam $q \in H$ e $q' \in H'$ tais que $\phi^2(q) = \phi^2(q') = q$. Então os traços H e H' em Γ_f^2 intersectam-se transversalmente em q e $x_1(q) = x_1(q') = x_1(q)$ e $x_2(q) = x_2(q') = x_2(q')$. Temos também que $y_1(q) = f(x_1(q)) = y_1(q')$ e portanto a única coordenada em que q e q' diferem é y_2 .

Definição 3.2.11. *Suponha-se que $q \in \mathbb{Q}$ é um vértice virtual num grafo regular Γ_f^2 . Escolha-se um número real $c < x_1(q)$ suficientemente próximo de q . Recorde-se que $H \cap K_c(f)$ e $H' \cap K_c(f)$ são pontos de Γ_f^4 . Assuma-se que H e H' são tais que $x_2(H \cap K_c(f)) < x_2(H' \cap K_c(f))$. Se $y_2(q) < y_2(q')$, o vértice virtual q diz-se **positivo**, e **negativo** caso contrário.*

*Denomina-se um grafo regular Γ_f^2 **admissível** se a sua aplicação de varrimento é plana, os seus vértices e nós satisfazem as condições do Lema 3.2.9, e os seus vértices estão marcados com um sinal da maneira explicada acima.*

A partir de agora todos os grafos considerados são admissíveis.

3.3 Cálculo do Grupo Fundamental

Recorde-se que a variedade M está definida como o complementar do arranjo \mathcal{A} . Para prosseguir o nosso estudo vamos representar M como uma união de subespaços.

Escolha-se um conjunto finito de números reais $T = \{t_0, \dots, t_s\}$ tal que:

1. o conjunto dos nós, $N \subset T$,

2. se $v, v' \in V$, com $x_1(v) < x_1(v')$ então existe $t \in T$ tal que $x_1(v) < t < x_1(v')$.

Definição 3.3.1. *Seja $L_i = \{m \in M \mid x_1(m) = t_i\}$ e definam-se subespaços de M do seguinte modo:*

$$M_{-\infty} = \{m \in M \mid x_1(m) \leq t_0\}$$

$$M_i = \{m \in M \mid t_{i-1} \leq x_1(m) \leq t_i\} \quad 1 \leq i \leq s$$

$$M_{\infty} = \{m \in M \mid t_s \leq x_1(m)\}.$$

Note-se que $L_i = M_i \cap M_{i+1}$ e que $M_{-\infty}$ e M_{∞} não contêm pontos múltiplos.

O cálculo de $\pi_1(M)$ será feito no Teorema 3.3.6 aplicando o Teorema de Van Kampen a esta divisão de M em subespaços. É necessário portanto calcular os grupos fundamentais dos conjuntos M_i e L_i assim como os homomorfismos induzidos pelas inclusões entre estes conjuntos.

Vamos, em primeiro lugar, definir os pontos de base para os grupos fundamentais de M_i e L_i . Escolha-se $J \in \mathbb{R}$ suficientemente grande de modo que $-J < y_2(m)$ para todos os pontos m no conjunto compacto $\{m \in \Gamma_f^4 \mid t_0 \leq x_1(m) \leq t_s\}$.

De seguida considere-se o seguinte conjunto:

$$B = \{m \in M \mid t_0 \leq x_1(m) \leq t_s, y_1(m) = f(x_1(m)), y_2(m) = -J\}. \quad (3.1)$$

O conjunto B é um subespaço contráctil de M o mesmo sucedendo com as suas intersecções com M_i e L_i . Podemos assim utilizar qualquer ponto de B como ponto de base para $\pi_1(M_i)$ e $\pi_1(L_i)$ uma vez que há isomorfismos canónicos entre os grupos fundamentais baseados em pontos distintos em B .

Seja $K_i = K_{t_i}(f)$, $U_i = K_i \cap M$ e $B_i = B \cap U_i$. Logo U_i é o complementar dos n pontos pertencentes ao conjunto $\{K_i \cap H \mid H \in \mathcal{A}\}$ e B_i é uma linha em U_i .

Lema 3.3.2.

1. *O conjunto L_i é o complementar de n linhas em \mathbb{R}^3 que não se intersectam duas a duas.*
2. *$U_i \subset L_i$ é o complementar de n pontos no plano real K_i .*
3. *U_i é um retrato por deformação forte de L_i e portanto $\pi_1(L_i)$ é um grupo livre com n geradores.*

Demonstração. O espaço $L'_i = \{m \in \mathbb{R}^4 \mid x_1(m) = t_i\}$ pode ser identificado com \mathbb{R}^3 . De acordo com a escolha feita inicialmente para os pontos t_i , com $0 \leq i \leq s$, não existem pontos múltiplos em L'_i . Logo as linhas $\{H \cap L'_i \mid H \in \mathcal{A}\}$ são disjuntas. Existe um homeomorfismo do conjunto L'_i nele próprio, que mantém K_i fixo e torna as linhas paralelas entre si, mas ainda intersectando K_i . A projecção de L'_i em K_i na direcção das linhas restrita a L_i é um retrato por deformação forte. \square

Escolham-se geradores para $\pi_1(U_i)$, $G(i) = (g_1(i), \dots, g_n(i))$ como na Figura 3.1, ordenados de forma crescente de acordo com o valor da sua coordenada x_2 em L_i . O retrato por deformação forte de L_i em U_i induz um isomorfismo entre $\pi_1(U_i)$ e $\pi_1(L_i)$.

Notando que $C_i = \phi^2(K_i)$ verificamos que existe uma correspondência biunívoca entre as arestas em $E(i)$ e os geradores em $G(i)$: o gerador $g_k(i)$ dá uma volta ao ponto $H_j \cap K_i$ se e só se $\phi^2(H_j \cap K_i) \in e_k(i)$ (isto é, $e_k(i) \in H_j = H_j = \phi^2(H_j \cap \Gamma_f^4)$).

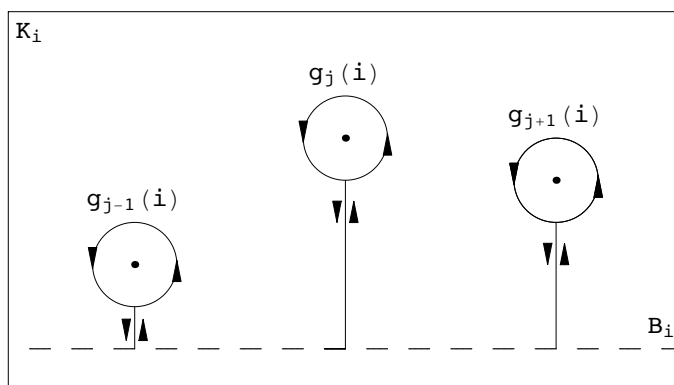


Figura 3.1: Geradores

É esta correspondência entre as arestas e os geradores do grupo fundamental que nos vai permitir descrever o grupo fundamental de M em termos do grafo Γ_f^2 .

Vamos agora calcular o grupo fundamental de M_i e os homomorfismos induzidos pelas inclusões $L_{i-1} \hookrightarrow M_i$ e $L_i \hookrightarrow M_i$.

Seja $S_i = \phi^2(M_i) \in \mathbb{R}^2$ a faixa compreendida entre C_{i-1} e C_i . De acordo com a escolha feita para o conjunto T , cada faixa S_i contém no máximo um vértice de Γ_f^2 . Vamos primeiro considerar o caso mais simples em que S_i não contém nenhum vértice ou contém um vértice virtual.

Recorde-se que usamos a notação $u^v = v^{-1}uv$.

Lema 3.3.3. *Suponhamos que S_i não contém um vértice real. Então*

1. *Os homomorfismos $\pi_1(L_{i-1}) \rightarrow \pi_1(M_i)$ e $\pi_1(L_i) \rightarrow \pi_1(M_i)$ induzidos pelas inclusões são isomorfismos e portanto $\pi_1(M_i)$ é um grupo livre com geradores $G(i-1)$ ou $G(i)$.*
2. *A relação entre os geradores $G(i-1)$ e $G(i)$ em $\pi_1(M_i)$ é a seguinte:*

(i) *Se S_i não contém qualquer vértice, então $g_k(i) = g_k(i-1)$,*

(ii) *Se S_i contém o vértice virtual $\mathfrak{q} \in \mathbf{Q}$ positivo nas arestas $e_j(i-1)$ e $e_{j+1}(i-1)$, então*

$$\begin{aligned} g_k(i) &= g_k(i-1) \text{ se } k < j \text{ ou } k > j+1, \\ g_j(i) &= g_{j+1}(i)^{g_j(i)}, \\ g_{j+1}(i) &= g_j(i-1). \end{aligned}$$

(iii) *Se S_i contém o vértice virtual negativo \mathfrak{q} nas arestas $e_{j+1}(i-1)$ e $e_j(i-1)$, então*

$$\begin{aligned} g_k(i) &= g_k(i-1) \text{ se } k < j \text{ ou } k > j+1, \\ g_j(i) &= g_{j+1}(i), \\ g_{j+1}(i) &= g_j(i-1)^{g_{j+1}(i)^{-1}}. \end{aligned}$$

Demonstração. 1. Seja $\mathbb{R}_f^3 = \{m \in \mathbb{R}^4 \mid y_1(m) = f(x_1(m))\}$ e $M'_i = M_i \cap \mathbb{R}_f^3$. M'_i é então um retrato por deformação forte de M_i e $M'_i \cap L_{i-1} = U_{i-1}$, $M'_i \cap L_i = U_i$.

M'_i é a porção de Γ_f^3 entre $t_{i-1} \leq x_1 \leq t_i$. Como M_i não contém nenhum ponto múltiplo M'_i é o complementar em R_f^3 de n segmentos que não se intersectam e portanto as inclusões

$$U_{i-1} \subset M'_i \quad \text{e} \quad U_i \subset M'_i$$

são também equivalências de homotopia. Isto é temos um diagrama de inclusões

$$\begin{array}{ccccc} U_{i-1} & \xrightarrow{\sim} & M'_i & \xleftarrow{\sim} & U_i \\ \downarrow \sim & & \downarrow \sim & & \downarrow \sim \\ L_{i-1} & \longrightarrow & M_i & \longleftarrow & L_i \end{array}$$

em que as aplicações verticais e as da primeira linha são equivalências de homotopia. Conclui-se que as aplicações da linha inferior também o são e portanto induzem um homomorfismo do grupo fundamental.

2. Para escrever os geradores $g_k(i)$ em função dos geradores $g_k(i-1)$ conjugamo-los por um caminho no conjunto contráctil $B \cap M_i$ que une os seus pontos de base e deformamos o resultado em U_{i-1} . Podemos usar x_1 como parâmetro da deformação de modo a que, para cada valor do parâmetro, $g_k(i)$ tem a forma usual no plano perfurado $\{(x_1, f(x_1), x_2, y_2)\} \setminus N$.

Se M_i não contém qualquer vértice, os geradores associados aos hiperplanos ocorrem na mesma ordem em L_{i-1} e L_i . Mediante a deformação descrita acima, $g_k(i)$ deforma-se em $g_k(i-1)$ para todo o k .

Se M_i contém um vértice virtual positivo, à medida que x_1 evolui de t_i para $t_i - 1$, o laço $g_{j+1}(i)$ deforma-se em $g_j(i-1)$ e $g_j(i)$ deforma-se num laço em U_{i-1} cuja posição corresponde à do laço γ indicada na Figura 2.1 (com a notação do Lema 2.1.2) tomando $\alpha = g_{j+1}(i-1)$ e $\beta = g_j(i-1)$. Para $k \neq j, j+1$, o gerador $g_k(i)$ deforma-se em $g_k(i-1)$. Pelo Lema 2.1.2 obtemos então as relações indicadas em 2.(ii).

O caso em que M_i contém um vértice virtual negativo é inteiramente análogo. □

Vamos agora considerar o caso em que M_i contém um vértice real.

Usamos a notação $\Pi = \langle G \mid R \rangle$ para o grupo Π definido por um conjunto de geradores G e um conjunto de relações R .

Definição 3.3.4. *Se w_1, \dots, w_k são palavras de um grupo livre define-se*

$$[w_1, \dots, w_k] = \{w_1 \dots w_k = w_{\sigma(1)} \dots w_{\sigma(k)} \mid \sigma \in C, \},$$

onde C é o conjunto de permutações cíclicas do tuplo $(1, \dots, k)$.

Lema 3.3.5. *Suponhamos que S_i contém o vértice real $\mathfrak{p} \in P$. Seja j o primeiro índice para o qual $e_j(i-1)$ contém \mathfrak{p} e k o último índice em que tal acontece. Consideremos o conjunto de relações*

$$R_{\mathfrak{p}} = [g_k(i-1), \dots, g_j(i-1)]. \tag{3.2}$$

Então

1. $\pi_1(M_i) = \langle G(i-1) \mid [g_k(i-1), \dots, g_j(i-1)] \rangle$.

2. O homomorfismo induzido pela inclusão $L_{i-1} \rightarrow M_i$ é o homomorfismo canónico

$$\langle G(i-1) \rangle \rightarrow \langle G(i-1) \mid R_{\mathfrak{p}} \rangle.$$

3. O homomorfismo induzido pela inclusão $L_i \rightarrow M_i$ é determinado por

$$\begin{aligned} g_l(i) &\mapsto g_l(i-1) \text{ se } l < j \text{ ou } l > k \\ g_j(i) &\mapsto g_k(i-1)^{g_{k-1}(i-1)\dots g_j(i-1)} \\ g_{j+1}(i) &\mapsto g_{k-1}(i-1)^{g_{k-2}(i-1)\dots g_j(i-1)} \\ g_{j+2}(i) &\mapsto g_{k-2}(i-1)^{g_{k-3}(i-1)\dots g_j(i-1)} \\ &\vdots \\ g_k(i) &\mapsto g_j(i-1). \end{aligned}$$

Observe-se que os geradores adaptados a \mathfrak{p} ocorrem em $R_{\mathfrak{p}}$ na ordem contrária à que aparecem em $G(i-1)$.

Demonstração. Procedendo a uma isotopia conveniente da faixa M_i é possível assumir que temos um arranjo em que todas as equações dos planos H_i são reais.

Fazendo uma mudança de coordenadas conveniente podemos ainda assumir que

- $t_{i-1} = -1$ e $t_i = 1$,
- $p = (0, 0) \in \mathbb{C}^2$,
- H_j é dado pela equação $z_2 = 0$,
- H_l é dado pela equação $A_l z_1 + z_2 = 0$ para $j < l \leq k$ com $A_l \in \mathbb{R}$,
- Existem números reais s^- e s^+ tais que a região

$$D = \{(x_1, x_2) \in S_i : s^- < x_2 < s^+\}$$

contém H_j, \dots, H_k .

Note-se que, como os planos estão ordenados de forma crescente pela coordenada x_2 da intersecção do seu traço com C_{i-1} , temos

$$0 < A_j < A_{j+1} < \dots < A_k.$$

Sejam

$$\begin{aligned} D_1 &= \{(x_1, y_1, x_2, y_2) \in \mathbb{R}^4 : -1 \leq x_1 \leq 1, x_2 \leq s^-\} \\ D_2 &= \{(x_1, y_1, x_2, y_2) \in \mathbb{R}^4 : -1 \leq x_1 \leq 1, s^- \leq x_2 \leq s^+\} \\ D_3 &= \{(x_1, y_1, x_2, y_2) \in \mathbb{R}^4 : -1 \leq x_1 \leq 1, x_2 \geq s^+\} \end{aligned}$$

de forma que $M_i = (D_1 \cup D_2 \cup D_3) \cap M$, e D_1 contém os planos H_1, \dots, H_{j-1} , D_2 contém H_j, \dots, H_k e D_3 contém H_{k+1}, \dots, H_n (porque os hiperplanos têm equações reais). Ver Figura 3.2.

Como $D_1 \cap D_2$ e $D_2 \cap D_3$ são contrácteis, o Teorema de Van Kampen implica que

$$\pi_1(M_i) = \pi_1(D_1 \cap M) * \pi_1(D_2 \cap M) * \pi_1(D_3 \cap M).$$

Podemos também escrever

$$L_{i-1} = (L_{i-1} \cap D_1) \cup (L_{i-1} \cap D_2) \cup (L_{i-1} \cap D_3)$$

e

$$L_i = (L_i \cap D_1) \cup (L_i \cap D_2) \cup (L_i \cap D_3)$$

e novamente pelo Teorema de Van Kampen temos

$$\pi_1(L_{i-1}) = \pi_1(L_{i-1} \cap D_1) * \pi_1(L_{i-1} \cap D_2) * \pi_1(L_{i-1} \cap D_3).$$

e analogamente para $\pi_1(L_i)$. Todos os factores nesta decomposição são grupos livres com geradores correspondentes aos planos em cada região D_1, D_2 e D_3 .

Pelo argumento na demonstração do Lema 3.3.3 pontos 1 e 2(i) concluímos que as inclusões

$$\pi_1(L_r \cap D_1) \rightarrow \pi_1(D_1) \quad \text{e} \quad \pi_1(L_r \cap D_3) \rightarrow \pi_1(D_3)$$

são isomorfismos para $r = i, i-1$ e, além disso, as imagens pelas inclusões dos geradores $g_l(i-1)$ e $g_l(i)$ coincidem para $l < j$ ou $l > k$.

Resta-nos portanto calcular $\pi_1(D_2 \cap M)$ e os homomorfismos induzidos em π_1 pelas inclusões

$$D_2 \cap L_{i-1} \hookrightarrow D_2 \cap M, \quad D_2 \cap L_i \hookrightarrow D_2 \cap M.$$

Seja S^3 uma esfera centrada em p de raio suficientemente pequeno. Os planos H_l , com $j \leq l \leq k$, intersectam S^3 em circunferências S_l^1 e a projecção radial

$$(D_2 \cap M_i) \rightarrow S^3 \setminus (H_j \cup \dots \cup H_k) \cong S^3 \setminus \bigcup_{i=j}^k S_i^1$$

é um retrato por deformação.

Escrevendo $S^3 = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 : |z_1|^2 + |z_2|^2 = 1\}$, e $S^1 = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 \mid |z_1|^2 + |z_2|^2 = 1, z_2 = 0\}$, a aplicação

$$\mu : \mathbb{C} \times S^1 \rightarrow S^3 \setminus S^1$$

definida pela expressão

$$(w, e^{i\theta}) \mapsto \left(\frac{w}{\sqrt{1+|w|^2}}, \frac{e^{i\theta}}{\sqrt{1+|w|^2}} \right)$$

é um homeomorfismo. A inversa é a função

$$\lambda : S^3 \setminus S^1 \rightarrow \mathbb{C} \times S^1$$

dada pela expressão

$$(w_1, w_2) \mapsto \left(\frac{w_1}{w_2}, e^{i\theta} \right),$$

onde $e^{i\theta}$ é definido pela equação:

$$\frac{e^{i\theta}}{\sqrt{1 + \left|\frac{w_1}{w_2}\right|^2}} = w_1.$$

Escrevemos λ_1 e λ_2 para as funções coordenadas de λ .

A imagem por λ da circunferência S^1 correspondente ao plano dado pela equação $A_l z_1 + z_2 = 0$ é o conjunto $\{-\frac{1}{A_l}\} \times S^1$. Logo o homeomorfismo λ restringe-se a um homeomorfismo

$$\Lambda : S^3 \setminus H_j \cup \dots \cup H_k \rightarrow \left(\mathbb{C} \setminus \left\{ -\frac{1}{A_{j+1}}, \dots, -\frac{1}{A_k} \right\} \right) \times S^1.$$

Conclui-se que :

$$\pi_1(D_2 \cap M_i) = \pi_1 \left(\mathbb{C} \setminus \left\{ -\frac{1}{A_{j+1}}, \dots, -\frac{1}{A_k} \right\} \right) \times \pi_1(S^1)$$

é o produto de um grupo livre com $k - j$ geradores por \mathbb{Z} .

O nosso primeiro objectivo é analisar a imagem em $\mathbb{C} \setminus \{\lambda_1(H_{j+1}), \dots, \lambda_1(H_k)\}$ dos geradores $g_l(i-1)$ e $g_l(i)$ associados à intersecção dos planos com L_{i-1} e L_i e perceber a relação entre estas imagens. Sejam $\rho_l(i-1) = \lambda_1(g_l(i-1))$ e $\rho_l(i) = \lambda_1(g_l(i))$.

Recorde-se que os geradores escolhidos têm pontos de base distintos, mas que estes estão todos contidos no conjunto contráctil B . Para fazer cálculos com os geradores ou as suas imagens precisamos primeiro de descrever os caminhos que unem os seus pontos de base.

Consideremos primeiro os geradores correspondentes aos planos H_l com $j < l \leq k$. Tendo em conta as equações dos planos H_l vemos que podemos tomar $J = 1$ na definição do conjunto B (ver (3.1)) que contém os pontos de base dos geradores. Além disso o ponto de base do gerador $g_l(i-1)$ é $(-1, 0, A_l, -1)$, e da mesma forma o ponto de base de $g_{k-l+j}(i)$ é $(1, 0, -A_l, 0)$.

Podemos unir os pontos de base dos dois geradores correspondentes ao mesmo plano H_l através do caminho

$$s : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{C}^2$$

definido por

$$s \mapsto (s, 0, -A_l s, -1).$$

A imagem desta linha em $\mathbb{C} \setminus \{\lambda_1(H_{j+1}), \dots, \lambda_1(H_k)\}$ é um arco de circunferência com centro em $(-\frac{1}{2A_l}, 0)$ e raio $\frac{1}{2A_l}$ dado pela expressão

$$s \mapsto \frac{-A_l s^2 + is}{A_l^2 s^2 + 1}.$$

É importante notar que estas curvas intersectam o eixo real apenas na origem e portanto passam "à direita" dos pontos $\lambda_1(H_l) = -\frac{1}{A_l} \in \mathbb{C}$.

Para comparar os geradores $g_l(i-1)$ unimos os seus pontos de base por um segmento de recta contido em B_{i-1} (ver Figura 3.1). As imagens destes caminhos em $\mathbb{C} \setminus \{\lambda_1(H_{j+1}), \dots, \lambda_1(H_k)\}$ são também arcos da circunferência com centro em $(0, -\frac{1}{2})$ e raio $\frac{1}{2}$ descritos por

$$s \mapsto -\frac{s+i}{s^2+1}.$$

Da mesma maneira podemos unir os pontos de base dos geradores $g_l(i)$ por um segmento de recta contido em B_i (ver Figura 3.1). As imagens destes caminhos em $\mathbb{C} \setminus \{\lambda_1(H_{j+1}), \dots, \lambda_1(H_k)\}$ são também

arcos da circunferência com centro em $(0, \frac{1}{2})$ e raio $\frac{1}{2}$.

Resta-nos considerar o caso dos geradores correspondentes ao plano H_j definido pela equação $z_2 = 0$.

Em \mathbb{C}^2 os geradores $g_j(i-1)$ e $g_k(i)$ têm ponto base $(-1, 0, 0, -1)$ e $(1, 0, 0, -1)$ respectivamente. A recta que os une é $(s, 0, 0, -1)$, com $s \in (-1, 1)$.

A imagem por λ_1 dos pontos de base são $(0, -1)$ para $\rho_j(i-1) = \lambda_1(g_j(i-1))$ e $(0, 1)$ para $\rho_k(i) = \lambda_1(g_k(i))$. A imagem em \mathbb{C} da recta que une os pontos base em \mathbb{C}^2 é o segmento de recta $z_2 = is$.

A Figura 3.3 descreve a imagem em $\mathbb{C} \setminus \{\lambda_1(H_{j+1}), \dots, \lambda_1(H_k)\}$ dos geradores $g_l(i-1)$ e $g_l(i)$, bem como os caminhos descritos acima que unem os seus pontos de base. Estes últimos estão contidos na imagem do conjunto contráctil B , que consiste na região (também contráctil) limitada pelas duas circunferências de raio $\frac{1}{2}$, centradas em $(0, \frac{1}{2})$ e $(0, -\frac{1}{2})$.

Para descrever os homomorfismos

$$\begin{aligned}\sigma_{i-1} & : \pi_1(L_{i-1}) \rightarrow \pi_1(\mathbb{C} \setminus \{\lambda_1(H_{j+1}), \dots, \lambda_1(H_k)\}) \\ \sigma_i & : \pi_1(L_i) \rightarrow \pi_1(\mathbb{C} \setminus \{\lambda_1(H_{j+1}), \dots, \lambda_1(H_k)\})\end{aligned}$$

tomamos $h_l = \rho_l(i-1)$, com $l = j+1, \dots, k$, para geradores de $\pi_1(\mathbb{C} \setminus \{\lambda_1(H_{j+1}), \dots, \lambda_1(H_k)\})$.

De acordo com a Figura 3.3 o homomorfismo $\sigma_1(i-1)$ é dado por:

$$\begin{aligned}g_j(i-1) & \mapsto h_{j+1}^{-1} \dots h_k^{-1} \\ g_{j+1}(i-1) & \mapsto h_{j+1} \\ & \vdots \\ g_k(i-1) & \mapsto h_k\end{aligned}$$

e, tomando em conta as relações entre laços descritas no Lema 2.1.2, $\sigma_1(i)$ é dado por:

$$\begin{aligned}g_k(i) & \mapsto h_{j+1}^{-1} \dots h_k^{-1} \\ g_{k-1}(i) & \mapsto h_{j+1}^{h_{j+2} \dots h_k} \\ & \vdots \\ g_{j+1}(i) & \mapsto h_{k-1}^{h_k} \\ g_j(i) & \mapsto h_k\end{aligned}$$

Existem assim as seguintes relações entre os geradores $\rho_l(i-1) = \lambda_1(g_l(i-1))$ e $\rho_l(i) = \lambda_1(g_l(i))$:

$$\begin{aligned}\rho_k(i) & = \rho_j(i-1), \\ \rho_{k-1}(i) & = \rho_{j+1}(i-1)^{\rho_{j+2}(i-1) \dots \rho_k(i-1)}, \\ & \vdots \\ \rho_{j+1}(i) & = \rho_{k-1}(i-1)^{\rho_k(i-1)}, \\ \rho_j(i) & = \rho_k(i-1)\end{aligned}$$

Para obter as relações entre os geradores $g_{k-l+j}(i)$ e $g_l(i-1)$ precisamos de calcular as suas imagens em S^1 por meio da segunda coordenada λ_2 .

Seja $t \mapsto (-1, g_l(t)) \in \mathbb{C}^2$ um representante de $g_l(i-1) \in \pi_1(L_{i-1})$. Por definição de λ temos

$$(-1, g_l(t)) = \frac{e^{i\theta} \left(\frac{-1}{g_l(t)}, 1 \right)}{\sqrt{1 + \left| \frac{-1}{g_l(t)} \right|^2}}$$

logo,

$$\lambda_2(-1, g_l(t)) = \theta = \arg(g_l(t)).$$

Segue-se então da definição dos geradores (ver Figura 3.1) que a imagem de $g_{j+1}(i-1), \dots, g_k(i-1)$ por λ_2 é trivial (uma vez que o número de rotação destes geradores em torno da origem é nulo) e que a imagem de $g_j(i-1)$ é um gerador de $\pi_1(S^1)$ que denotamos por w .

Exactamente da mesma forma vemos que a imagem por λ_2 de $g_j(i), \dots, g_{k-1}(i)$ em $\pi_1(S^1)$ é trivial e que a imagem de $g_k(i)$ é w .

Podemos agora concluir a demonstração. Temos um isomorfismo

$$\Lambda: \pi_1(M_i \cap D_2) \rightarrow \pi_1\left(\mathbb{C} \setminus \left\{ -\frac{1}{A_{j+1}}, \dots, -\frac{1}{A_k} \right\}\right) \times S^1.$$

Uma apresentação para o grupo à direita é claramente

$$\langle h_{j+1}, \dots, h_k, w \mid h_{j+1}w = wh_{j+1}; \dots; h_kw = wh_k \rangle$$

e os cálculos acima mostram que Λ tem o seguinte efeito nos geradores

$$\begin{aligned} g_l(i-1) &\mapsto h_l \quad \text{para } j+1 \leq l \leq k \\ g_j(i-1) &\mapsto h_{j+1}^{-1} \cdots h_k^{-1} w. \end{aligned}$$

Como Λ é um isomorfismo, segue-se que $G(i-1)$ é um conjunto de geradores para $\pi_1(M_i \cap D_2)$ e que as relações em $\pi_1(M_i)$ são exactamente que $\Lambda^{-1}(w)$ comuta com $\Lambda^{-1}(h_l)$, para $l = j+1, \dots, k$. Usando a abreviatura $g_l = g_l(i-1)$ temos

$$\Lambda^{-1}(w) = g_k \cdots g_j.$$

A relação de comutação com g_k pode escrever-se

$$\begin{aligned} g_k^{-1} \Lambda^{-1}(w) &= \Lambda^{-1}(w) g_k^{-1} \\ g_k^{-1} (g_k \cdots g_j) &= (g_k \cdots g_j) g_k^{-1} \\ g_{k-1} \cdots g_j &= g_k g_{k-1} \cdots g_j g_k^{-1} \\ g_{k-1} \cdots g_j g_k &= g_k g_{k-1} \cdots g_j. \end{aligned}$$

Usando a última equação podemos, usando o mesmo argumento, escrever a relação de comutação com g_{k-1} na forma

$$g_{k-2} \cdots g_j g_k g_{k-1} = g_{k-1} \cdots g_j g_k$$

Fazendo o mesmo para os restantes geradores vemos que o conjunto de relações em $\pi_1(M_i \cap D_2)$ é precisamente R_p , o que conclui a demonstração dos pontos 1. e 2. do Lema.

As relações entre $\rho_l(i-1)$ e $\rho_l(i)$ calculadas anteriormente, juntamente com o cálculo das imagens dos geradores em $G(i-1)$ e $G(i)$ em S^1 , mostram que temos as seguintes relações entre $G(i-1)$ e $G(i)$ em $\pi_1(M_i \cap D_2)$:

$$\begin{aligned} g_k(i) &= g_j(i-1), \\ g_{k-1}(i) &= g_{j+1}(i-1)^{g_{j+2}(i-1)\dots g_k(i-1)}, \\ g_{k-2}(i) &= g_{k-2}(i-1)^{g_{k-1}(i-1)g_k(i-1)}, \\ &\vdots \\ g_j(i) &= g_k(i-1) \end{aligned}$$

Como temos as seguintes igualdades

$$\begin{aligned} g_j(i) &= g_k = \Lambda^{-1}(w)g_j^{-1} \dots g_{k-1}^{-1} = g_j^{-1} \dots g_{k-1}^{-1} \Lambda^{-1}(w) = g_j^{-1} \dots g_{k-1}^{-1} g_k g_{k-1} \dots g_j = g_k^{g_{k-1}\dots g_j} \\ g_{j+1}(i) &= g_{k-1}^{g_k} = g_k^{-1} g_{k-1} g_k = g_k^{-1} \Lambda^{-1}(w) g_k^{-1} g_j^{-1} \dots g_{k-2}^{-1} g_k = \Lambda^{-1}(w) g_k^{-1} g_j^{-1} \dots g_{k-2}^{-1} \\ &= g_{k-1} \dots g_j g_k g_k^{-1} g_j^{-1} \dots g_{k-2}^{-1} = g_{k-1} \dots g_j g_j^{-1} \dots g_{k-2}^{-1} = g_{k-2} \dots g_j g_j^{-1} \dots g_{k-2}^{-1} g_{k-1} \\ &= \dots = g_j^{-1} \dots g_{k-2}^{-1} g_{k-1} g_{k-2} \dots g_j = g_{k-1}^{g_{k-2}\dots g_j} \end{aligned}$$

Concluimos por fim, como pretendíamos,

$$\begin{aligned} g_j(i) &= g_k(i-1)^{g_{k-1}(i-1)\dots g_j(i-1)}, \\ g_{j+1}(i) &= g_{k-1}(i-1)^{g_{k-2}(i-1)\dots g_j(i-1)}, \\ g_{j+2}(i) &= g_{k-2}(i-1)^{g_{k-3}(i-1)\dots g_j(i-1)}, \\ &\vdots \\ g_k(i) &= g_j(i-1). \end{aligned}$$

□

Teorema 3.3.6 (Arvola). *Seja \mathcal{A} um arranjo de hiperplanos complexos em \mathbb{C}^2 e M o complementar de \mathcal{A} . Seja Γ_f^2 um grafo admissível para \mathcal{A} .*

$$\pi_1(M) = \langle G(0) \mid \bigcup_{p \in P} R_p \rangle,$$

onde R_p é o conjunto de relações (3.2) do Lema 3.3.5 e usamos os Lemas 3.3.3 e 3.3.5 para escrever as palavras de R_p em função dos geradores $G(0)$.

Note-se que podíamos ter utilizado qualquer dos conjuntos $G(i)$ como conjunto de geradores para $\pi_1(M)$. Qualquer que seja a escolha dos geradores, temos portanto um gerador para cada plano $H \in \mathcal{A}$ e k relações para cada ponto múltiplo em que se intersectam k hiperplanos.

Demonstração. Seja \mathcal{A} um arranjo de n hiperplanos. A variedade M foi representada como uma união

de subespaços M_i , com $1 \leq i \leq s$. De acordo com a Definição 3.3.1 podemos escrever

$$M = M_{-\infty} \cup M_1 \dots \cup M_{\infty}$$

Observando que L_0 é um retrato por deformação forte de $M_{-\infty}$ e L_s é um retrato por deformação forte de M_{∞} , temos uma equivalência de homotopia

$$M \sim M_1 \bigcup_{L_1} \dots \bigcup_{L_{s-1}} M_s.$$

Para aplicar o Teorema de Van Kampen podemos substituir os conjuntos M_i e L_i por conjuntos abertos

$$M_i^{\epsilon} = \{m \in M \mid t_{i-1} - \epsilon < x_1(m) < t_i + \epsilon\},$$

$$L_i^{\epsilon} = \{m \in m \mid t_i - \epsilon < x_1(m) < t_i + \epsilon\},$$

que, para ϵ suficientemente pequeno, se retratam por deformação em M_i e L_i respectivamente.

Por aplicação a estes conjuntos do Teorema de Seifert - Van Kampen, conclui-se que

$$\pi_1(M) \simeq \pi_1(M_1^{\epsilon}) *_{\pi_1(L_1^{\epsilon})} \pi_1(M_2^{\epsilon}) *_{\pi_1(L_2^{\epsilon})} \dots *_{\pi_1(L_{s-1}^{\epsilon})} \pi_1(M_s^{\epsilon})$$

e portanto

$$\pi_1(M) \simeq \pi_1(M_1) *_{\pi_1(L_1)} \pi_1(M_2) *_{\pi_1(L_2)} \dots *_{\pi_1(L_{s-1})} \pi_1(M_s).$$

Defina-se

$$M_{1r} = M_1 \bigcup_{L_1} M_2 \bigcup_{L_2} \dots \bigcup_{L_{r-1}} M_r, \quad 1 \leq r < s.$$

Vamos fazer a demonstração do resultado pretendido por indução. Seja $G = \{g_1(0), \dots, g_n(0)\}$. De acordo com o Lema 3.3.3 e o Lema 3.3.5 o grupo fundamental de M_1 é dado por:

1. $\pi_1(M_1) = \langle g_1(0), \dots, g_n(0) \rangle$, se em M_1 existe um vértice virtual;
2. $\pi_1(M_1) = \langle g_1(0), \dots, g_n(0) \mid R_{\mathbf{p}_1} \rangle$, se em M_1 existe um vértice real \mathbf{p}_1 .

Suponhamos indutivamente que $\pi_1(M_{1r}) = \langle g_1(0), \dots, g_n(0) \mid \bigcup_{l=1}^{k-1} R_{\mathbf{p}_l} \rangle$. Temos

$$\pi_1(M_{1r+1}) = \pi_1(M_{1r}) *_{\pi_1(L_r)} \pi_1(M_{r+1}).$$

Se M_{r+1} contém um vértice virtual o Lema 3.3.3 implica que a inclusão $L_r \rightarrow M_{r+1}$ é um isomorfismo e portanto $\pi_1(M_{1r}) \simeq \pi_1(M_{1r+1})$.

Se M_{r+1} contém um vértice real, \mathbf{p}_k , pelo Lema 3.3.5 a aplicação $\pi_1(L_r) \rightarrow \pi_1(M_{r+1})$ é o quociente pelas relações $R_{\mathbf{p}_k}$. Estas relações podem escrever-se a partir dos geradores $G = \{g_1(0), \dots, g_n(0)\}$, usando as relações entre os geradores descritas nos Lemas 3.3.3 e 3.3.5. Assim

$$\pi_1(M_{1r+1}) = \langle g_1(0), \dots, g_n(0) \mid \bigcup_{l=1}^{k-1} R_{\mathbf{p}_l} \cup R_{\mathbf{p}_k} \rangle.$$

Procedendo deste modo para todos os conjuntos L_i e M_i , até $i = s$, conclui-se que

$$\pi_1(M) = \langle g_1(0), \dots, g_n(0) \mid \bigcup_{p \in P} R_p \rangle$$

□

Corolário 3.3.7. *Seja M o complementar de um arranjo de n hiperplanos.*

$$H_1(M) = \pi_1(M) / [\pi_1(M), \pi_1(M)] = \mathbb{Z} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z} = \mathbb{Z}^n$$

é o grupo abeliano livre com n geradores.

Demonstração. Na abelianização, as relações R_p (ver (3.2)) ficam triviais.

□

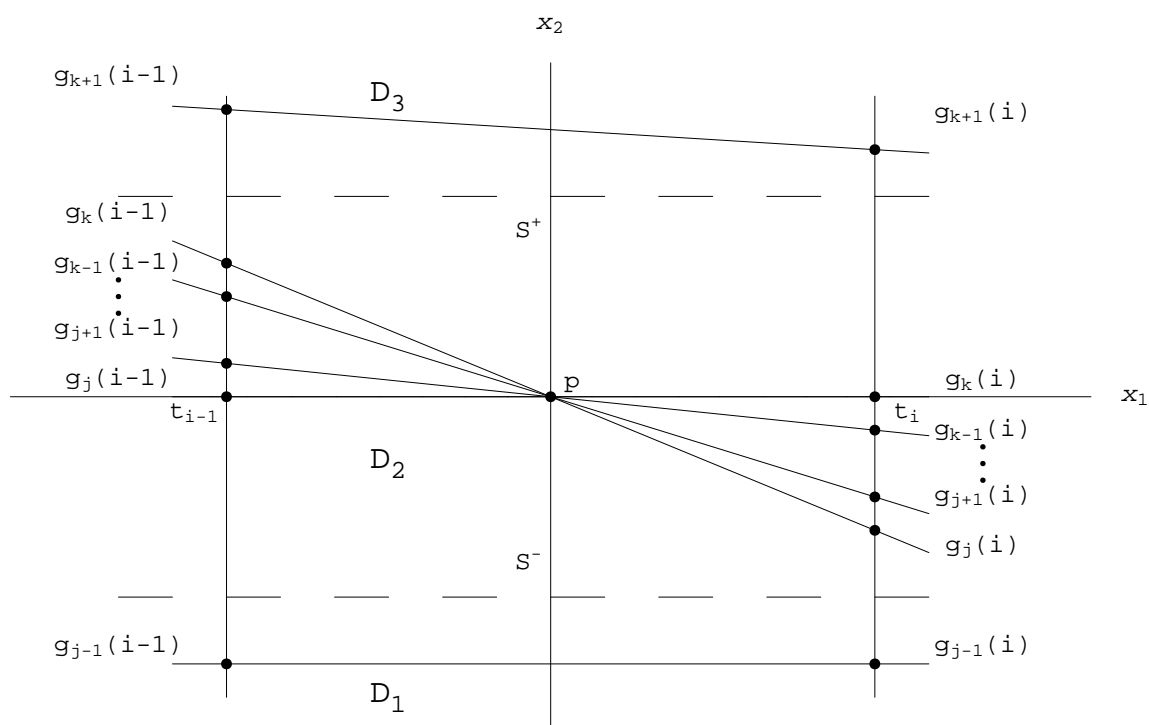


Figura 3.2: Projecção da faixa M_i no plano x_1, x_2 .

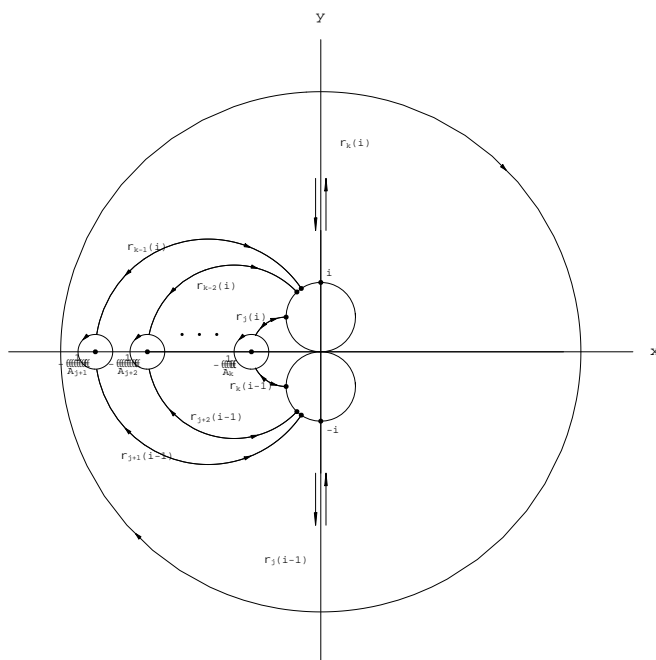


Figura 3.3: Imagem em $\mathbb{C} \setminus \{\lambda_1(H_{j+1}), \dots, \lambda_1(H_k)\}$ de $G(i-1)$ e $G(i)$.

Capítulo 4

Exemplo

Neste capítulo apresentamos um exemplo concreto do cálculo do grupo fundamental do complementar de um arranjo de quatro hiperplanos complexos. Seguimos com rigor o processo apresentado no capítulo anterior.

Para facilitar o estudo, escolhemos hiperplanos que, à partida, respeitam todas as condições necessárias à aplicação do algoritmo descrito para o cálculo que pretendemos efectuar (de modo a que não seja necessário proceder a qualquer mudança de coordenadas).

Seja $\mathcal{A} = \{H_1, H_2, H_3, H_4\}$ o arranjo em \mathbb{C}^2 com hiperplanos

$$H_1 : z_1 = z_2$$

$$H_2 : z_1 = (1 + 2i)z_2$$

$$H_3 : z_1 = 3z_2$$

$$H_4 : z_2 = 1 + i$$

Começamos por calcular os pontos de intersecção entre os quatro hiperplanos.

Pontos Múltiplos:

$$H_1 \cap H_2 : (0, 0)$$

$$H_1 \cap H_3 : (0, 0)$$

$$H_1 \cap H_4 : (1 + i, 1 + i)$$

$$H_2 \cap H_3 : (0, 0)$$

$$H_2 \cap H_4 : (-1 + 3i, 1 + i)$$

$$H_3 \cap H_4 : (3 + 3i, 1 + i)$$

$$P = \{(0, 0), (1 + i, 1 + i), (-1 + 3i, 1 + i), (3 + 3i, 1 + i)\}$$

Apresenta-se a aplicação de varrimento f , escolhida de modo a ser plana (constante numa vizinhança dos pontos múltiplos) e adequada (passa por todos os pontos múltiplos).

$$f(t) = \begin{cases} 3, & t \leq -\frac{2}{3} \\ -3 - 9t, & -\frac{2}{3} < t \leq -\frac{1}{3} \\ 0, & -\frac{1}{3} < t \leq \frac{1}{3} \\ -1 + 3t, & \frac{1}{3} < t \leq \frac{2}{3} \\ 1, & \frac{2}{3} < t \leq \frac{4}{3} \\ -1 + \frac{3}{2}t, & \frac{4}{3} < t \leq \frac{8}{3} \\ 3, & t > \frac{8}{3} \end{cases}$$

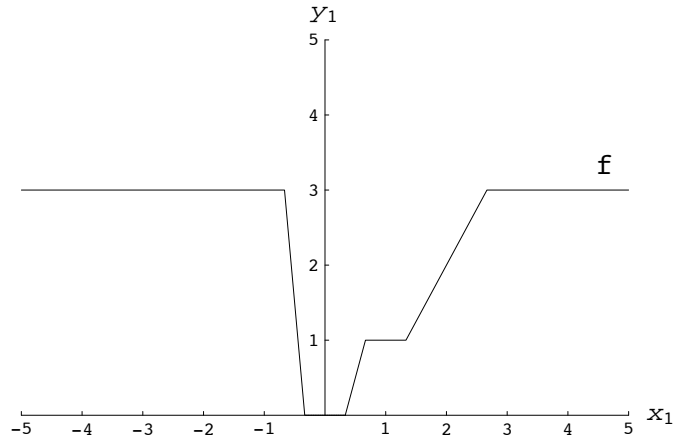


Figura 4.1: Aplicação de varrimento f

Define-se agora a família de linhas complexas $K_t(f)$, com $t \in \mathbb{R}$, com a qual se irá interseccionar os hiperplanos, num passo fundamental para a aplicação do algoritmo.

$$\begin{aligned} K_t(f) &= \{q \in \mathbb{C}^2 \mid z_1(q) = t + if(t)\} \\ &= \{q \in \mathbb{R}^4 \mid x_1(q) = t, y_1(q) = f(t)\} \end{aligned}$$

Calculamos a intersecção entre os quatro hiperplanos e a família de linhas complexas $K_t(f)$, ou seja $\Gamma_f^4 = \cup_{t \in \mathbb{R}} N \cap K_t(f)$.

- (i) $H_1 \cap z_1 = z_2 = t + if(t)$
 $K_t(f)$:
 $\{(t + if(t), t + if(t)) : t \in \mathbb{R}\}$
- (ii) $H_2 \cap z_1 = (1 + 2i)z_2 = t + if(t)$
 $K_t(f)$:
 $z_2 = \frac{1}{5}t + \frac{2}{5}f(t) + \frac{i}{5}(f(t) - 2t)$
 $\{(t + if(t), \frac{1}{5}t + \frac{2}{5}f(t) + \frac{i}{5}(f(t) - 2t)) : t \in \mathbb{R}\}$
- (iii) $H_3 \cap z_1 = 3z_2 = t + if(t)$
 $K_t(f)$:
 $z_2 = \frac{t}{3} + i\frac{f(t)}{3}$
 $\{(t + if(t), \frac{t}{3} + i\frac{f(t)}{3}) : t \in \mathbb{R}\}$
- (iv) $H_4 \cap z_2 = 1 + i$
 $K_t(f)$:
 $\{(t, 1 + i) : t \in \mathbb{R}\}$

Apresentamos na Figura 4.2 os traços, $H_i = \phi^2(H_i \cap \Gamma_f^4)$, com $1 \leq i \leq 4$.

Pela observação da Figura 4.2 percebemos que, para além dos quatro vértices reais (v_1, v_2, v_3, v_4) , o grafo do arranjo possui também quatro vértices virtuais (w_1, w_2, w_3, w_4) .

Calculemos então as coordenadas destes vértices virtuais.

$$\begin{aligned} w_1 : H_2 \cap H_4 : -\frac{17}{5}t - \frac{6}{5} = 1 &\Leftrightarrow -17t = 11 \Leftrightarrow t = -\frac{11}{17} \\ &(-\frac{11}{17}, 1) \\ w_2 : H_2 \cap H_3 : \frac{7}{5}t - \frac{2}{5} = \frac{t}{3} &\Leftrightarrow 16t = 6 \Leftrightarrow t = \frac{3}{8} \\ &(\frac{3}{8}, \frac{1}{8}) \\ w_3 : H_2 \cap H_4 : \frac{4}{5}t - \frac{2}{5} = 1 &\Leftrightarrow 4t = 7 \Leftrightarrow t = \frac{7}{4} \\ &(\frac{7}{4}, 1) \\ w_4 : H_2 \cap H_3 : \frac{1}{5}t + \frac{6}{5} = \frac{t}{3} &\Leftrightarrow -2t = -18 \Leftrightarrow t = 9 \\ &(9, 3) \end{aligned}$$

Vamos agora perceber como estão etiquetados estes vértices virtuais; se são positivos ou negativos.

Para cada um dos vértices, escolhemos um valor $c \in \mathbb{R}$, tal que $c < x_1(w_i)$, suficientemente próximo de $x_1(w_i)$. Depois calculamos a intersecção dos dois hiperplanos, H e H' (que se intersectam transversalmente em w_i), com $K_c(f)$. Se a relação de ordem entre $x_2(H \cap K_c(f))$, $x_2(H' \cap K_c(f))$ e $y_2(w_i)$, $y_2(w'_i)$ fôr a mesma, w_i é um vértice virtual positivo, caso contrário é negativo.

$$1. w_1 = (-\frac{11}{17}, 1), \quad c = -0.65$$

$$K_{-0.65}(f) = \{q \in \mathbb{R}^4 \mid x_1(q) = -\frac{13}{20}, y_1(q) = -\frac{39}{20}\}$$

$$x_2(H_2 \cap K_{-0.65}(f)) = -0.91$$

$$x_2(H_4 \cap K_{-0.65}(f)) = 1$$

$$x_2(H_2 \cap K_{-0.65}(f)) < x_2(H_4 \cap K_{-0.65}(f))$$

$$y_2(H_2 \cap K_{-0.65}(f)) = -0.13$$

$$y_2(H_4 \cap K_{-0.65}(f)) = 1$$

$$y_2(H_2 \cap K_{-0.65}(f)) < y_2(H_4 \cap K_{-0.65}(f))$$

Logo w_1 é um vértice virtual positivo.

$$2. w_2 = (\frac{3}{8}, \frac{1}{8}), \quad c = 0.3$$

$$K_{0.3}(f) = \{q \in \mathbb{R}^4 \mid x_1(q) = \frac{3}{10}, y_1(q) = 0\}$$

$$x_2(H_2 \cap K_{0.3}(f)) = 0.06$$

$$x_2(H_3 \cap K_{0.3}(f)) = 0.3$$

$$x_2(H_2 \cap K_{0.3}(f)) < x_2(H_3 \cap K_{0.3}(f))$$

$$y_2(H_2 \cap K_{0.3}(f)) = -0.12$$

$$y_2(H_3 \cap K_{0.3}(f)) = 0.1$$

$$y_2(H_2 \cap K_{0.3}(f)) < y_2(H_3 \cap K_{0.3}(f))$$

Logo w_2 é um vértice virtual positivo.

$$3. w_3 = \left(\frac{7}{4}, 1\right), \quad c = 1.7$$

$$K_{1.7}(f) = \{q \in \mathbb{R}^4 \mid x_1(q) = \frac{17}{10}, y_1(q) = \frac{31}{20}\}$$

$$x_2(H_2 \cap K_{1.7}(f)) = 0.96$$

$$x_2(H_4 \cap K_{1.7}(f)) = 1$$

$$x_2(H_2 \cap K_{1.7}(f)) < x_2(H_4 \cap K_{1.7}(f))$$

$$y_2(H_2 \cap K_{1.7}(f)) = -0.37$$

$$y_2(H_4 \cap K_{1.7}(f)) = 1$$

$$y_2(H_2 \cap K_{1.7}(f)) < y_2(H_4 \cap K_{1.7}(f))$$

Logo w_3 é um vértice virtual positivo.

$$4. w_4 = (9, 3), \quad c = 8.9$$

$$K_{8.9}(f) = \{q \in \mathbb{R}^4 \mid x_1(q) = 8.9, y_1(q) = 26.7\}$$

$$x_2(H_2 \cap K_{8.9}(f)) = 12.46$$

$$x_2(H_3 \cap K_{8.9}(f)) = 2.97$$

$$x_2(H_2 \cap K_{8.9}(f)) > x_2(H_3 \cap K_{8.9}(f))$$

$$y_2(H_2 \cap K_{8.9}(f)) = 1.78$$

$$y_2(H_3 \cap K_{8.9}(f)) = 8.9$$

$$y_2(H_2 \cap K_{8.9}(f)) < y_2(H_3 \cap K_{8.9}(f))$$

Logo w_4 é um vértice virtual negativo.

Considere-se o conjunto de todos os vértices, reais e virtuais, $V = (V_1, \dots, V_8)$, ($v_1 = V_1, w_1 = V_2, v_2 = V_3, \dots, w_4 = V_8$)

Escolhemos um conjunto T que contém os pontos em que a aplicação de varrimento f muda de declive e tal que, para cada dois vértices V e V' , contém um elemento entre $x_1(V)$ e $x_1(V')$.

$$T = \left\{-\frac{4}{3}, -\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{4}{3}, 2, 4, 10\right\}$$

Os conjuntos L_i e os subespaços M_i de M são definidos pelas expressões:

$$L_i = \{m \in M \mid x_1(m) = t_i\}$$

$$M_{-\infty} = \{m \in M \mid x_1(m) \leq -\frac{4}{3}\}$$

$$M_i = \{m \in M \mid t_{i-1} \leq x_1(m) \leq t_i\}, \quad 1 \leq i \leq 8$$

$$M_{\infty} = \{m \in M \mid 10 \leq x_1(m)\}$$

Como foi visto, temos uma equivalência de homotopia:

$$M \sim M_1 \bigcup_{L_1} \dots \bigcup_{L_7} M_8$$

Como resultado do Teorema de Seifert - Van Kampen, temos a seguinte expressão para o grupo fundamental de M :

$$\pi_1(M) \approx \pi_1(M_1) *_{\pi_1(L_1)} \pi_1(M_2) *_{\pi_1(L_2)} \dots *_{\pi_1(L_7)} \pi_1(M_8)$$

O conjunto B que contém os pontos de base dos geradores para $\pi_1(L_i)$ é

$$B = \{m \in M \mid -\frac{4}{3} \leq x_1(m) \leq 10, y_1(m) = f(x_1(m)), y_2(m) = -20\}$$

$\pi_1(L_i)$ é um grupo livre com quatro geradores $G(i) = (g_1(i), g_2(i), g_3(i), g_4(i))$.

Vamos agora calcular os grupos fundamentais dos conjuntos L_i e M_i e os homomorfismos induzidos pelas inclusões.

(i) **Descrição de $\pi_1(L_0)$.**

Como os geradores têm que ser ordenados de acordo com o valor da sua coordenada x_2 em t_{i-1} , comecemos por calcular esse valor para $t = t_0 = -\frac{4}{3}$.

$$t_0 : K_{-\frac{4}{3}} \cap M = K_{-\frac{4}{3}} \setminus \{r_1, r_2, r_3, r_4\} \text{ em que } r_i = K_{-\frac{4}{3}} \cap H_i$$

$$\begin{aligned} K_{-\frac{4}{3}} \cap H_1 : & \quad x_2 = -\frac{4}{3} & \quad y_2 = 3 \\ K_{-\frac{4}{3}} \cap H_2 : & \quad x_2 = \frac{14}{15} & \quad y_2 = \frac{17}{15} \\ K_{-\frac{4}{3}} \cap H_3 : & \quad x_2 = \frac{4}{9} & \quad y_2 = 1 \\ K_{-\frac{4}{3}} \cap H_4 : & \quad x_2 = 1 & \quad y_2 = 1 \end{aligned}$$

$$x_2(H_1) < x_2(H_3) < x_2(H_2) < x_2(H_4)$$

Assim, para conjunto de geradores de $\pi_1(L_0)$, temos $G(0) = \{g_1(0), g_2(0), g_3(0), g_4(0)\}$, em que $g_1(0)$ está associado ao hiperplano H_1 , $g_2(0)$ a H_3 , $g_3(0)$ a H_2 e $g_4(0)$ a H_4 .

Para simplificar a notação fazemos $a = g_1(0)$, $b = g_2(0)$, $c = g_3(0)$ e $d = g_4(0)$. Assim

$$G(0) = (a, b, c, d).$$

(ii) **Descrição de $\pi_1(M_1)$.**

Entre t_0 e $t_1 = -\frac{2}{3}$ existe apenas um vértice real V_1 em que H_2 e H_4 se intersectam, logo pelo Lema 3.3.5 temos

$$\pi_1(M_1) = \langle a, b, c, d \mid cd = dc \rangle$$

e os geradores $G(1) = (g_1(1), g_2(1), g_3(1), g_4(1))$ são enviados pela inclusão $L_1 \hookrightarrow M_1$ em

$$g_1(1) = g_1(0) = a$$

$$g_2(1) = g_2(0) = b$$

$$g_3(1) = g_4(0)^{g_3(0)} = d^c$$

$$g_4(1) = g_3(0) = c$$

(iii) **Descrição de $\pi_1(M_1 \cup M_2)$.**

Entre t_1 e $t_2 = -\frac{1}{3}$ existe apenas um vértice virtual V_2 em que H_2 e H_4 se intersectam. Assim $L_1 \hookrightarrow M_2$ é uma equivalência de homotopia e portanto o homomorfismo

$$\pi_1(M_1) \rightarrow \pi_1(M_1 \cup M_2)$$

é um isomorfismo.

Tendo em conta que V_2 um vértice virtual positivo, tem-se a seguinte descrição para o homomorfismo $\pi_1(L_2) \rightarrow \pi_1(M_1 \cup M_2)$:

$$G(2) = (g_1(2), g_2(2), g_3(2), g_4(2)) \text{ onde}$$

$$g_1(2) = g_1(1) = a$$

$$g_2(2) = g_2(1) = b$$

$$g_3(2) = g_4(1)^{g_3(1)} = c^{d^c} = c^{dc}$$

$$g_4(2) = g_3(1) = d^c$$

(iv) **Descrição de $\pi_1(M_1 \cup M_2 \cup M_3)$.**

Entre t_2 e $t_3 = \frac{1}{3}$ existe um vértice real V_3 em que H_1, H_2 e H_3 se intersectam, logo $\pi_1(M_3) = \langle g_1(2), g_2(2), g_3(2), g_4(2) \mid g_3(2)g_2(2)g_1(2) = g_1(2)g_3(2)g_2(2) = g_2(2)g_1(2)g_3(2) \rangle$.

Tendo em conta o cálculo anterior do homomorfismo $\pi_1(L_2) \rightarrow \pi_1(M_1 \cup M_2)$ obtemos

$$\pi_1(M_1 \cup M_2 \cup M_3) = \langle a, b, c, d \mid cd = dc, cba = acb = bac \rangle$$

onde usámos a comutatividade de c e d para escrever $c^{dc} = c$.

Vamos agora descrever o homomorfismo $\pi_1(L_3) \rightarrow \pi_1(M_1 \cup M_2 \cup M_3)$. Temos

$$G(3) = (g_1(3), g_2(3), g_3(3), g_4(3)) \text{ onde}$$

$$g_1(3) = g_3(2)^{g_2(2)g_1(2)} = (c^{dc})^{ba} = c^{dcba} = c^{ba} = c, \text{ onde usámos novamente } c^{dc} = c \text{ e } cba = bac.$$

$$g_2(3) = g_2(2)^{g_1(2)} = b^a$$

$$g_3(3) = g_1(2) = a$$

$$g_4(3) = g_4(2) = d^c = d$$

(v) **Descrição de $\pi_1(M_1 \cup M_2 \cup M_3 \cup M_4)$.**

Entre t_3 e $t_4 = \frac{2}{3}$ existe apenas um vértice virtual V_4 em que H_2 e H_3 . Assim $L_3 \leftrightarrow M_4$ é uma equivalência de homotopia e portanto o homomorfismo

$$\pi_1(M_1 \cup M_2 \cup M_3) \rightarrow \pi_1(M_1 \cup M_2 \cup M_3 \cup M_4)$$

é um isomorfismo.

Tendo em conta que V_4 um vértice virtual positivo, tem-se a seguinte descrição para o homomorfismo $\pi_1(L_4) \rightarrow \pi_1(M_1 \cup M_2 \cup M_3 \cup M_4)$:

$$G(4) = (g_1(4), g_2(4), g_3(4), g_4(4)) \text{ onde}$$

$$g_1(4) = g_2(3)^{g_1(3)} = (b^a)^c = b^{ac} = b, \text{ onde usámos } bac = acb.$$

$$g_2(4) = g_1(3) = c$$

$$g_3(4) = g_3(3) = a$$

$$g_4(4) = g_4(3) = d$$

(vi) **Descrição de $\pi_1(M_1 \cup M_2 \cup M_3 \cup M_4 \cup M_5)$.**

Entre t_4 e $t_5 = \frac{4}{3}$ existe um vértice real V_5 em que H_1 e H_4 se intersectam, assim:

$$\pi_1(M_5) = \langle g_1(4), g_2(4), g_3(4), g_4(4) \mid g_4(4)g_3(4) = g_3(4)g_4(4) \rangle.$$

Tendo em conta o cálculo anterior do homomorfismo $\pi_1(L_4) \rightarrow \pi_1(M_1 \cup M_2 \cup M_3 \cup M_4)$ obtemos

$$\pi_1(M_1 \cup M_2 \cup M_3 \cup M_4 \cup M_5) = \langle a, b, c, d \mid cd = dc, cba = acb = bac, da = ad \rangle$$

Vamos agora descrever o homomorfismo $\pi_1(L_5) \rightarrow \pi_1(M_1 \cup M_2 \cup M_3 \cup M_4 \cup M_5)$. Temos

$$G(5) = (g_1(5), g_2(5), g_3(5), g_4(5)) \text{ onde}$$

$$g_1(5) = g_1(4) = b$$

$$g_2(5) = g_2(4) = c$$

$$g_3(5) = g_4(4)^{g_3(4)} = d^a = d \text{ pois } ad = da.$$

$$g_4(5) = g_3(4) = a$$

(vii) **Descrição de $\pi_1(M_1 \cup M_2 \cup M_3 \cup M_4 \cup M_5 \cup M_6)$.**

Entre t_5 e $t_6 = 2$ existe um vértice virtual V_6 em que H_2 e H_4 se intersectam. Assim $L_5 \hookrightarrow M_6$ é uma equivalência de homotopia e portanto o homomorfismo

$$\pi_1(M_1 \cup M_2 \cup M_3 \cup M_4 \cup M_5) \rightarrow \pi_1(M_1 \cup M_2 \cup M_3 \cup M_4 \cup M_5 \cup M_6)$$

é um isomorfismo.

Tendo em conta que V_6 um vértice virtual positivo, tem-se a seguinte descrição para o homomorfismo $\pi_1(L_6) \rightarrow \pi_1(M_1 \cup M_2 \cup M_3 \cup M_4 \cup M_5 \cup M_6)$:

$$G(6) = (g_1(6), g_2(6), g_3(6), g_4(6)) \text{ onde}$$

$$g_1(6) = g_1(5) = b$$

$$g_2(6) = g_3(5)^{g_2(5)} = d^c = d, \text{ onde usámos a comutatividade de } c \text{ e } d.$$

$$g_3(6) = g_2(5) = c$$

$$g_4(6) = g_4(5) = a$$

(viii) **Descrição de $\pi_1(M)$.**

Entre t_6 e $t_7 = 4$ existe um vértice real V_7 em que H_3 e H_4 se intersectam, logo:

$$\pi_1(M_7) = \langle g_1(6), g_2(6), g_3(6), g_4(6) \mid g_2(6)g_1(6) = g_1(6)g_2(6) \rangle.$$

Tendo em conta o cálculo anterior do homomorfismo $\pi_1(L_6) \rightarrow \pi_1(M_1 \cup M_2 \cup M_3 \cup M_4 \cup M_5 \cup M_6)$ obtemos

$$\pi_1(M_1 \cup M_2 \cup M_3 \cup M_4 \cup M_5 \cup M_6 \cup M_7) = \langle a, b, c, d \mid cd = dc, cba = acb = bac, da = ad, db = bd \rangle$$

Uma vez que já passámos por todos os vértices reais, já não necessitamos de descrever o homomorfismo $\pi_1(L_7) \rightarrow \pi_1(M_1 \cup M_2 \cup M_3 \cup M_4 \cup M_5 \cup M_6 \cup M_7)$.

De facto, entre t_7 e $t_8 = 4$ existe apenas um vértice virtual negativo V_8 em que H_2 e H_3 se intersectam. Portanto $L_7 \hookrightarrow M_8$ é uma equivalência de homotopia e logo

$$\pi_1(M) \approx \pi_1(M_1) *_{\pi(L_1)} \pi_1(M_2) *_{\pi(L_2)} \dots *_{\pi(L_6)} \pi_1(M_7)$$

Uma apresentação a partir dos geradores $G(0) = (a, b, c, d)$ é dada por

$$\begin{aligned}
\pi_1(M) &= \pi_1(M_1 \cup M_2 \cup M_3 \cup M_4 \cup M_5 \cup M_6 \cup M_7) \\
&= \langle a, b, c, d \mid cd = dc, cba = acb = bac, da = ad, db = bd \rangle
\end{aligned}$$

Observando que o gerador d comuta com todos os outros, podemos apresentar o grupo fundamental de M sob a seguinte forma:

$$\pi_1(M) = \mathbb{Z} \times \langle a, b, c \mid bac = cba = acb \rangle$$

com \mathbb{Z} gerado por d .

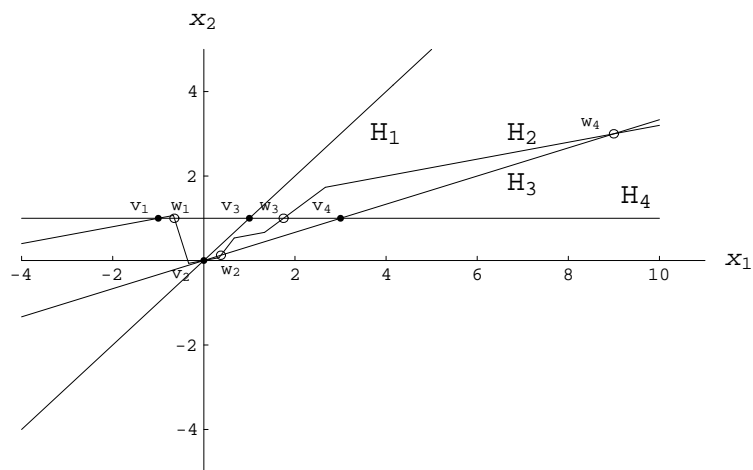


Figura 4.2: O grafo Γ_f^2 .

Capítulo 5

A Correspondência entre Arranjos e Grafos

Neste capítulo vamos estudar a correspondência entre arranjos de hiperplanos e grafos admissíveis a eles associados. Estudaremos em particular a questão de quais os grafos que podem ser realizados por um arranjo de hiperplanos.

5.1 Arranjos com um ou dois hiperplanos

O caso em que \mathcal{A} contém apenas um hiperplano é trivial. De facto, fazendo uma transformação de coordenadas podemos assumir que o hiperplano é definido pela equação $z_1 = 0$ e portanto o complementar do arranjo é homeomorfo ao produto de \mathbb{C} com $\mathbb{C} \setminus \{0\}$:

$$M \cong (\mathbb{C} \setminus \{0\}) \times \mathbb{C}.$$

Conclui-se que $\pi_1(M) = \mathbb{Z}$.

O grafo Γ_f^2 associado a \mathcal{A} tem uma única aresta e não tem vértices e o algoritmo de cálculo de $\pi_1(M)$ produz imediatamente o grupo livre com um gerador.

Suponhamos agora que \mathcal{A} contém dois hiperplanos, H_1 e H_2 . Há dois casos a considerar.

Dois hiperplanos paralelos

Mudando de coordenadas podemos supor que H_1 e H_2 são dados pelas equações $z_1 = 0$ e $z_1 = 1$ respectivamente. Logo

$$M \cong (\mathbb{C} \setminus \{0, 1\}) \times \mathbb{C}$$

e portanto

$$\pi_1(M) = \langle a, b \rangle$$

é um grupo livre com um gerador correspondendo a cada plano.

O grafo Γ_f^2 associado a \mathcal{A} tem apenas duas arestas paralelas e nenhum vértice pelo que o algoritmo produz imediatamente o resultado anterior.

Dois hiperplanos concorrentes

Neste caso existe apenas um vértice real, v , (e nenhum virtual, visto que a aplicação de varrimento, f é plana e constante com $f(t) = y_1(v)$). O grafo associado tem portanto duas arestas que concorrem num único vértice. Sendo g_1 e g_2 os geradores associados aos hiperplanos H_1 e H_2 , respectivamente, o grupo fundamental do complementar de \mathcal{A} , M tem como única apresentação possível

$$\pi_1(M) = \langle g_1, g_2 \mid g_1 g_2 = g_2 g_1 \rangle = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$$

Também é fácil obter este resultado directamente. De facto, mudando de coordenadas podemos assumir que H_1 e H_2 são dados pelas equações $z_1 = 0$ e $z_2 = 0$ respectivamente e então

$$M \cong (\mathbb{C} \setminus \{0\}) \times (\mathbb{C} \setminus \{0\}).$$

5.2 Arranjos com três hiperplanos

Quando \mathcal{A} consiste em três hiperplanos, (H_1, H_2, H_3) em \mathbb{C}^2 temos quatro casos a considerar: podemos ter três planos paralelos, dois planos paralelos e um concorrente e finalmente, se não houver planos paralelos, há dois casos: ou os planos se intersectam todos no mesmo ponto ou em três pontos distintos. Vamos agora considerar estes casos separadamente.

Três hiperplanos paralelos

Neste caso as equações dos planos têm o seguinte aspecto

$$\begin{aligned} H_1 : az_1 + z_2 &= \alpha \\ H_2 : az_1 + z_2 &= \beta \\ H_3 : az_1 + z_2 &= \delta, \end{aligned} \quad a, \alpha, \beta, \delta \in \mathbb{C}.$$

e o grafo associado tem o seguinte aspecto

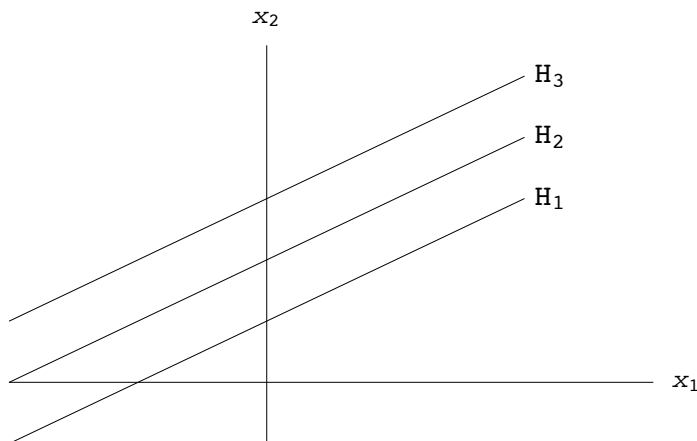


Figura 5.1: Hiperplanos paralelos

Neste caso não existe, obviamente, nenhum vértice real e conseqüentemente nenhum vértice virtual. O grupo fundamental que se obtém do algoritmo é o grupo livre com um gerador correspondente a cada hiperplano

$$\pi_1(M) = \langle a, b, c \rangle$$

o que também se pode ver directamente uma vez que, neste caso,

$$M \cong (\mathbb{C} \setminus \{0, 1, 2\}) \times \mathbb{C}.$$

Dois hiperplanos paralelos e o terceiro concorrente

Este é o primeiro caso em que a correspondência entre arranjos e grafos é não trivial. Com efeito, apesar de todos os arranjos com estas características serem homeomorfos, podemos obter diferentes tipos de grafos.

Antes de descrever os grafos possíveis vamos calcular o grupo fundamental. Após uma mudança de coordenadas podemos assumir que os hiperplanos são definidos pelas equações

$$z_1 = 0, \quad z_1 = 1, \quad z_2 = 0$$

e então

$$M \cong (\mathbb{C} \setminus \{0, 1\}) \times \mathbb{C} \setminus \{0\}$$

donde

$$\pi_1(M) = \langle a, b \rangle \times \mathbb{Z} = \langle a, b, c \mid ac = ca, bc = cb \rangle.$$

No entanto, para descrever o grafo associado a um arranjo precisamos de utilizar coordenadas diferentes, nas quais as equações dos planos têm o seguinte aspecto:

$$\begin{aligned} H_1 : az_1 + z_2 &= \alpha & a, b, \alpha, \beta, \delta &\in \mathbb{C}. \\ H_2 : az_1 + z_2 &= \beta \\ H_3 : bz_1 + z_2 &= \delta, \end{aligned}$$

Claramente temos apenas dois vértices reais em Γ_f^2 , que correspondem às intersecções $H_1 \cap H_3$ e $H_2 \cap H_3$. No entanto existe um número variável de vértices virtuais.

A função de varrimento f ou é constante, ou é linear em três troços, $] - \infty, t_1]$, $[t_1, t_2]$ e $[t_2, +\infty[$ (Figura 5.3).

Conseqüentemente, os traços H_1 , H_2 e H_3 são linhas lineares por troços com no máximo três troços que se projectam em $] - \infty, t_1]$, $[t_1, t_2]$ e $[t_2, +\infty[$. Visto que duas das linhas são paralelas, é fácil verificar que o número máximo de pontos de intersecção entre H_1 , H_2 e H_3 é seis. Como temos dois vértices reais, conclui-se que existem no máximo quatro vértices virtuais. Na realidade, as disposições possíveis dos vértices são as seguintes.

Proposição 5.2.1. *Seja $\mathcal{A} = \{H_1, H_2, H_3\}$ um arranjo de três hiperplanos em \mathbb{C}^2 com H_1 e H_2 paralelos e Γ_f^2 um grafo admissível para \mathcal{A} . Escrevendo v e r para indicar um vértice virtual e real, as disposições possíveis para os vértices em Γ_f^2 no sentido de x_1 crescente são:*

1. $\{r, r\}$,
2. $\{r, v, v, r\}$,
3. $\{v, r, v, v, r, v\}$,
4. $\{r, v, v, v, v, r\}$.

Em particular Γ_f^2 contém 0, 2 ou 4 vértices virtuais.

Demonstração. Por definição de f temos dois vértices reais com coordenadas x_1 em $] -\infty, t_1[$ e $]t_2, +\infty[$. Como f é constante nestes troços, os declives dos segmentos de cada traço H_i nestes intervalos são iguais.

Seja d o declive de H_1 e H_2 nos troços $] -\infty, t_1[$ e $]t_2, +\infty[$ e d' o declive de H_3 em $] -\infty, t_1[$ e $]t_2, +\infty[$. Vamos assumir que $d' < d$ (sendo o restante caso completamente análogo). Chamamos H_1 ao hiperplano paralelo cujo traço tem menor ordenada. Então o primeiro vértice em Γ_f^2 é uma intersecção de H_2 e H_3 e o último é uma intersecção de H_1 e H_3 .

O grafo Γ_f^2 (sem levar ainda em conta a distinção entre vértices virtuais e reais) é completamente determinado pelas ordenadas de H_3 em t_1 , que pode estar abaixo de H_1 ou entre H_1 e H_2 , e pela ordenada de H_3 em t_2 , que pode estar entre H_1 e H_2 , ou acima de H_2 .

Sejam $y_{i,j}$ as ordenadas em t_j de H_i (com $j = 1, 2$). Temos então os seguintes quatro casos:

- (a) $y_{3,1} < y_{1,1} < y_{2,1}$ e $y_{1,2} < y_{3,2} < y_{2,2}$: Neste caso há quatro vértices, os três últimos dos quais são intersecções entre H_1 e H_3 logo o primeiro vértice tem de ser real e, como há uma única intersecção no troço $]t_2, +\infty[$, o último tem também de ser real. Estamos portanto no caso 2. do enunciado.
- (b) $y_{3,1} < y_{1,1} < y_{2,1}$ e $y_{1,2} < y_{2,2} < y_{3,2}$: Aqui há seis vértices, portanto quatro virtuais. H_3 intersecta os restantes traços na ordem $H_2, H_1, H_1, H_2, H_2, H_1$. Se o primeiro vértice for real então o último também tem que ser e portanto estamos no caso 4. do enunciado. Se o segundo for real, o penúltimo também tem que ser e portanto estamos no caso 3.
- (c) $y_{1,1} < y_{3,1} < y_{2,1}$ e $y_{1,2} < y_{3,2} < y_{2,2}$: Neste caso só há dois vértices que são portanto ambos reais. Estamos assim no caso 1.
- (d) $y_{1,1} < y_{3,1} < y_{2,1}$ e $y_{1,2} < y_{2,2} < y_{3,2}$: Neste caso temos também quatro vértices. Os três primeiros são intersecções de H_2 e H_3 . Logo o primeiro e o último vértices são reais e estamos no caso 2.

□

Vamos agora ver que todas as possibilidades indicadas na Proposição anterior se podem realizar através de escolhas convenientes de hiperplanos.

Caso $\{r, r\}$: Este caso pode ser realizado por meio do arranjo real

$$\begin{aligned}
H_1 & : az_1 + bz_2 = 0 \\
H_2 & : az_1 + bz_2 = c \quad a, b, c \in \mathbb{R} \text{ e } a, b, c \neq 0 \\
H_3 & : z_2 = 0
\end{aligned}$$

uma vez que neste caso a função de varrimento é constante igual a zero, os traços H_i são funções lineares.

Caso $\{r, v, v, v, v, r\}$:

Consideremos o arranjo formado pelos hiperplanos

$$\begin{aligned} H_1 & : az_1 + bz_2 = c \\ H_2 & : az_1 + bz_2 = 0 \quad a, b, c \in \mathbb{C} \text{ e } a, b, c \neq 0 \\ H_3 & : z_2 = 0. \end{aligned}$$

A primeira coordenada dos pontos múltiplos é dada por:

$$H_1 \cap H_3 : az_1 = c \Leftrightarrow z_1 = \frac{c}{a} = m + in$$

$$H_2 \cap H_3 : az_1 = 0 \Leftrightarrow z_1 = \frac{c}{a} = 0$$

Cálculo das expressões dos hiperplanos, após projecção por ϕ^2 :

$$az_1 + bz_2 = c \Leftrightarrow bz_2 = c - az_1 \Leftrightarrow z_2 = \frac{c}{b} - \frac{a}{b}z_1$$

$$x_2 = -\operatorname{Re}\left(\frac{a}{b}\right)x_1 + \operatorname{Re}\left(\frac{c}{b}\right),$$

$$az_1 + bz_2 = 0 \Leftrightarrow bz_2 = -az_1 \Leftrightarrow z_2 = \left(-\frac{a}{b}\right)z_1$$

$$x_2 = -\operatorname{Re}\left(\frac{a}{b}\right)x_1.$$

Queremos escolher (a, b, c) de forma a obter um grafo Γ_f^2 com o aspecto geral da Figura 5.2 (em que os vértices reais são indicados por bolas a cheio).

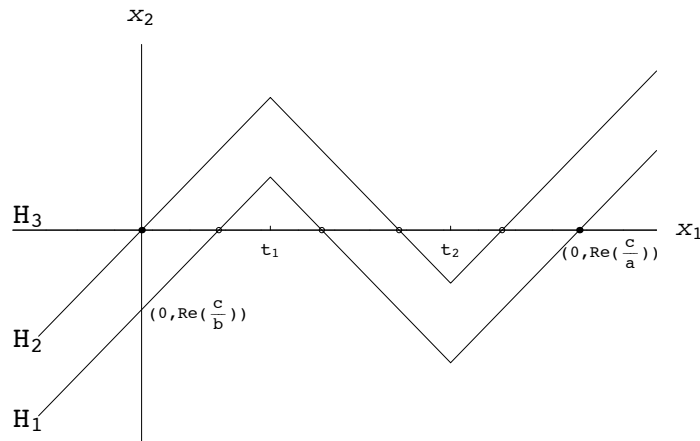


Figura 5.2: Γ_f^2 no caso $\{r, v, v, v, v, r\}$.

Sejam $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$, tal que $t_1, t_2 > 0$, com $t_1 < t_2$ os pontos em que a função f (e consequentemente os traços dos hiperplanos) muda de declive.

Escolhemos a, b e c de modo a que $\operatorname{Re}\left(\frac{c}{a}\right) > 0$ e $\operatorname{Re}\left(\frac{c}{b}\right) < 0$, tendo em particular $m > 0$. Escolhemos também a, c de forma a que $n = \operatorname{Im}\left(\frac{c}{a}\right) > 0$. A função de varrimento f tem então o aspecto da Figura 5.3.

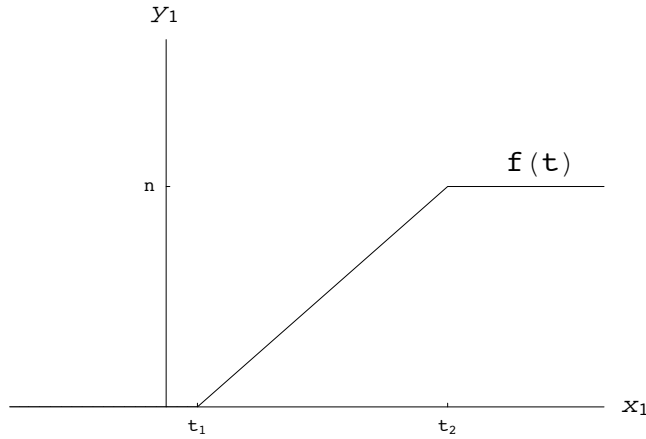


Figura 5.3: Gráfico de f

A expressão para f no intervalo $[t_1, t_2]$ é

$$f(t) = \frac{n}{t_2 - t_1}t - \frac{nt_1}{t_2 - t_1}.$$

Queremos que, para $t < t_1$, os declives dos traços dos hiperplanos H_1 e H_2 sejam positivos. Isso dá-nos a restrição

$$x_2 = -\operatorname{Re}\left(\frac{a}{b}\right) > 0.$$

Escrevendo a , b e c na forma:

$$\begin{aligned} a & : Ae^{i\alpha} \\ b & : Be^{i(\alpha+\beta)} \quad A, B, C \in \mathbb{R}^+ \\ c & : Ce^{i(\alpha+\gamma)} \end{aligned}$$

As condições anteriores escrevem-se então:

$$-\operatorname{Re}\left(\frac{a}{b}\right) > 0 \Leftrightarrow -\frac{A}{B}\operatorname{Re}\left(e^{i(-\beta)}\right) > 0 \Leftrightarrow \frac{A}{B}\cos(\beta) < 0 \Leftrightarrow \frac{\pi}{2} + 2k\pi < \beta < \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$$

$$\operatorname{Re}\left(\frac{c}{b}\right) < 0 \Leftrightarrow \frac{C}{B}\operatorname{Re}\left(e^{i(\gamma-\beta)}\right) < 0 \Leftrightarrow \frac{C}{B}\cos(\gamma-\beta) < 0 \Leftrightarrow \frac{\pi}{2} + 2k\pi < \gamma-\beta < \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$$

$$\operatorname{Re}\left(\frac{c}{a}\right) > 0 \Leftrightarrow \frac{C}{A}\operatorname{Re}\left(e^{i(\gamma)}\right) > 0 \Leftrightarrow \frac{C}{A}\cos(\gamma) > 0 \Leftrightarrow -\frac{\pi}{2} + 2k\pi < \gamma < \frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

$$\operatorname{Im}\left(\frac{c}{a}\right) > 0 \Leftrightarrow \frac{C}{A}\operatorname{Im}\left(e^{i(\gamma)}\right) > 0 \Leftrightarrow \frac{C}{A}\operatorname{sen}(\gamma) > 0 \Leftrightarrow 2k\pi < \gamma < \pi + 2k\pi$$

com $k \in \mathbb{Z}$.

Para $t_1 < t < t_2$ queremos que os declives de H_1 e H_2 sejam negativos:

$$\begin{aligned}
\mathbf{H}_1 : x_2 &= -\operatorname{Re}\left(\frac{a}{b}\right)t + \operatorname{Re}\left(\frac{c}{b}\right) + \operatorname{Im}\left(\frac{a}{b}\right)f(t) = \\
&= \left(-\operatorname{Re}\left(\frac{a}{b}\right) + \operatorname{Im}\left(\frac{a}{b}\right)\left(\frac{n}{t_2 - t_1}\right)\right)t - \operatorname{Im}\left(\frac{a}{b}\right)\left(\frac{nt_1}{t_2 - t_1}\right) + \operatorname{Re}\left(\frac{c}{b}\right)
\end{aligned}$$

Pretende-se que

$$\left(-\operatorname{Re}\left(\frac{a}{b}\right) + \operatorname{Im}\left(\frac{a}{b}\right)\left(\frac{n}{t_2 - t_1}\right)\right), \quad (5.1)$$

que representa o declive de \mathbf{H}_1 , seja negativo. Desde que escolhamos t_1, t_2 suficientemente próximos, basta que $\operatorname{Im}\left(\frac{a}{b}\right)$ seja negativo, ou seja que $\operatorname{sen}(-\beta) < 0 \Leftrightarrow \operatorname{sen}(\beta) > 0 \Leftrightarrow 2k\pi < \beta < (2k+1)\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$.

A expressão para \mathbf{H}_2 em $[t_1, t_2]$ é a seguinte:

$$\begin{aligned}
\mathbf{H}_2 : x_2 &= -\operatorname{Re}\left(\frac{a}{b}\right)t + \operatorname{Im}\left(\frac{a}{b}\right)f(t) = -\operatorname{Re}\left(\frac{a}{b}\right)t + \operatorname{Im}\left(\frac{a}{b}\right)\left(\frac{yt}{t_2 - t_1} - \frac{nt_1}{t_2 - t_1}\right) = \\
&= \left(-\operatorname{Re}\left(\frac{a}{b}\right) + \operatorname{Im}\left(\frac{a}{b}\right)\left(\frac{n}{t_2 - t_1}\right)\right)t - \operatorname{Im}\left(\frac{a}{b}\right)\left(\frac{nt_1}{t_2 - t_1}\right)
\end{aligned}$$

Queremos que entre t_1 e t_2 os traços de H_1 e H_2 intersectem o eixo x_1 , passando de valores positivos para negativos. Basta garantir que as seguintes duas condições se verificam. A primeira é que a ordenada de \mathbf{H}_1 em t_1 seja positiva. Como

$$\begin{aligned}
x_2(\mathbf{H}_1, t_1) &= \left(-\operatorname{Re}\left(\frac{a}{b}\right) + \operatorname{Im}\left(\frac{a}{b}\right)\left(\frac{n}{t_2 - t_1}\right)\right)t_1 - \operatorname{Im}\left(\frac{a}{b}\right)\left(\frac{nt_1}{t_2 - t_1}\right) + \operatorname{Re}\left(\frac{c}{b}\right) \\
&= -\operatorname{Re}\left(\frac{a}{b}\right) + \operatorname{Re}\left(\frac{c}{b}\right)
\end{aligned}$$

esta condição pode garantir-se tomando $\frac{c}{b}$ suficientemente pequeno. A segunda condição é que a ordenada de \mathbf{H}_2 em t_2 seja negativa. Como

$$\begin{aligned}
x_2(\mathbf{H}_2, t_2) &= \left(-\operatorname{Re}\left(\frac{a}{b}\right) + \operatorname{Im}\left(\frac{a}{b}\right)\left(\frac{n}{t_2 - t_1}\right)\right)t_2 - \operatorname{Im}\left(\frac{a}{b}\right)\left(\frac{nt_1}{t_2 - t_1}\right) \\
&= \operatorname{Im}\left(\frac{a}{b}\right)n - \operatorname{Re}\left(\frac{a}{b}\right)t_2
\end{aligned}$$

o que é equivalente a $\tan \beta < -\frac{t_2}{n}$.

Para $t < t_2$ os traços dos hiperplanos H_1 e H_2 voltam a apresentar o mesmo declive positivo que possuíam em $t < t_1$, intersectando assim o eixo x_1 novamente, \mathbf{H}_1 num vértice virtual e \mathbf{H}_2 num vértice real.

Uma vez que a intersecção das condições anteriores é não vazia (ver Figura 5.4), podemos escolher a, b, c de forma a que o grafo Γ_f^2 tenha o aspecto desejado.

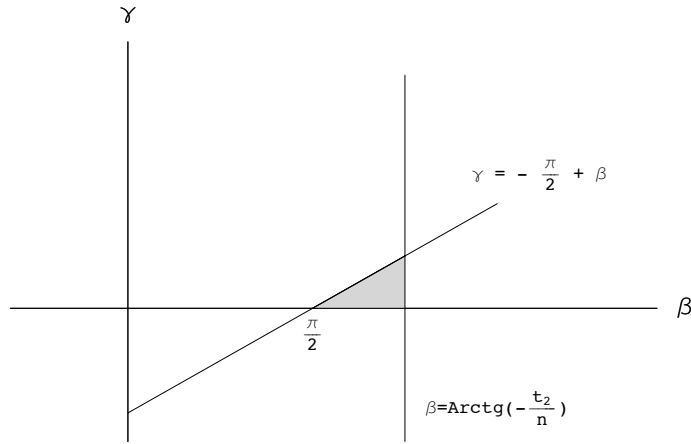


Figura 5.4: Região para os ângulos β e γ no caso $\{r, v, v, v, v, r\}$.

Caso $\{v, r, v, v, r, v\}$: Consideremos o arranjo de hiperplanos formado pelos planos

$$\begin{aligned} H_1 & : az_1 + bz_2 = 0 \\ H_2 & : az_1 + bz_2 = c \quad a, b, c \in \mathbb{C} \text{ e } a, b, c \neq 0 \\ H_3 & : z_2 = 0 \end{aligned}$$

Os pontos múltiplos têm primeira coordenada:

$$H_1 \cap H_3 : az_1 = 0 \Leftrightarrow z_1 = 0$$

$$H_2 \cap H_3 : az_1 = c \Leftrightarrow z_1 = \frac{c}{a} = m + in$$

Queremos escolher a, b, c de forma a que o grafo Γ_f^2 tenha a forma indicada na Figura 5.5.

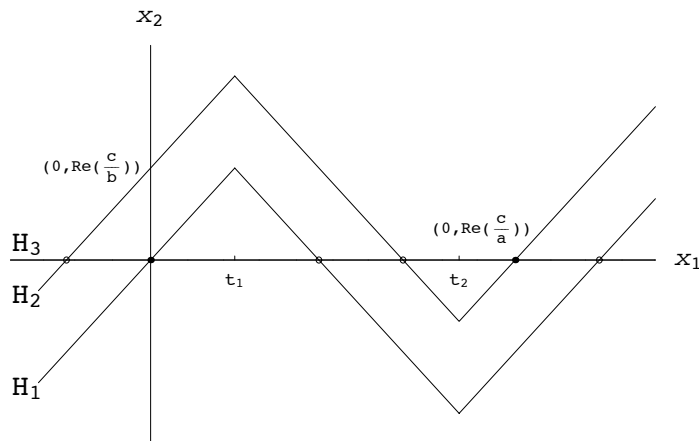


Figura 5.5: Γ_f^2 no caso $\{v, r, v, v, r, v\}$.

Cálculo das expressões dos hiperplanos, após projecção por ϕ^2 :

$$az_1 + bz_2 = 0 \Leftrightarrow bz_2 = -az_1 \Leftrightarrow z_2 = \left(-\frac{a}{b}\right) z_1$$

$$x_2 = \operatorname{Re}\left(-\frac{a}{b}\right) \Leftrightarrow x_2 = -\operatorname{Re}\left(\frac{a}{b}\right) x_1,$$

$$az_1 + bz_2 = c \Leftrightarrow bz_2 = c - az_1 \Leftrightarrow z_2 = \frac{c}{b} - \frac{a}{b}z_1$$

$$x_2 = \operatorname{Re}\left(\frac{c}{b}\right) - \operatorname{Re}\left(\frac{a}{b}\right) x_1.$$

Sejam como anteriormente $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$, com $0 < t_1 < t_2$ os pontos em que a função f (e consequentemente os traços dos hiperplanos) muda de declive (conforme a Figura 5.3).

Escolhemos a, b e c de modo a que $m = \operatorname{Re}\left(\frac{c}{a}\right) > 0$ e $\operatorname{Re}\left(\frac{c}{b}\right) > 0$ e ainda $n = \operatorname{Im}\left(\frac{c}{a}\right) > 0$.

Queremos que, para $t < t_1$, os declives dos traços dos hiperplanos H_1 e H_2 sejam positivos, ou seja, que se verifique a condição

$$-\operatorname{Re}\left(\frac{a}{b}\right) > 0$$

Escrevendo a, b e c na forma:

$$\begin{aligned} a &: Ae^{i\alpha} \\ b &: Be^{i(\alpha+\beta)} \quad A, B, C \in \mathbb{R}^+ \\ c &: Ce^{i(\alpha+\gamma)} \end{aligned}$$

Para $t_1 < t < t_2$ queremos que os declives de H_1 e H_2 sejam negativos. O cálculo é idêntico ao efectuado no caso anterior ver (5.1). O declive é dado pela expressão

$$-\operatorname{Re}\left(\frac{a}{b}\right) + \operatorname{Im}\left(\frac{a}{b}\right) \left(\frac{n}{t_2 - t_1}\right)$$

e basta tomar t_2 suficientemente próximo de t_1 e $\operatorname{sen}\beta < 0$ para garantir o sinal pretendido.

Juntando todas as restrições até ao momento, obtemos as condições

$$\gamma \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[, \quad \beta \in \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[, \quad -\frac{\pi}{2} < \gamma - \beta < \frac{\pi}{2}.$$

$$\begin{aligned} H_2 : x_2 &= -\operatorname{Re}\left(\frac{a}{b}\right)t + \operatorname{Re}\left(\frac{c}{b}\right) + \operatorname{Im}\left(\frac{a}{b}\right)f(t) = \\ &= \left(-\operatorname{Re}\left(\frac{a}{b}\right) + \operatorname{Im}\left(\frac{a}{b}\right)\left(\frac{n}{t_2 - t_1}\right)\right)t - \operatorname{Im}\left(\frac{a}{b}\right)\left(\frac{nt_1}{t_2 - t_1}\right) + \operatorname{Re}\left(\frac{c}{b}\right) \end{aligned}$$

Queremos que entre t_1 e t_2 os traços de H_1 e H_2 intersectem o eixo x_1 , passando de valores positivos

para negativos. Para tal basta garantir que a ordenada $x_2(\mathbf{H}_2, t_2)$ de \mathbf{H}_2 em t_2 seja negativa. Temos

$$\begin{aligned} x_2(\mathbf{H}_2, t_2) &= -\operatorname{Re}\left(\frac{a}{b}\right) + \operatorname{Im}\left(\frac{a}{b}\right) \operatorname{Im}\left(\frac{c}{a}\right) + \operatorname{Re}\left(\frac{c}{b}\right) \\ &= -\frac{A}{B} \cos(\beta) + \frac{C}{B} (-\operatorname{sen} \beta \operatorname{sen} \gamma + \cos(\gamma - \beta)) \\ &= \frac{1}{B} (-A + C \cos \gamma) \cos \beta. \end{aligned}$$

Pelas condições impostas anteriormente, $\cos \beta < 0$ e $\cos \gamma$ pode tomar qualquer valor entre 0 e 1. Escolhendo A e C de forma a que $\cos \gamma > \frac{A}{C}$ obtemos portanto um grafo com a forma desejada para $t < t_2$.

Para $t > t_2$ os traços dos hiperplanos H_1 e H_2 voltam a apresentar o mesmo declive positivo que possuíam para $t < t_1$, intersectando assim o eixo x_1 novamente, H_1 num vértice virtual e H_2 num vértice real.

Uma vez que a intersecção das condições anteriores é não vazia (ver Figura 5.6), podemos escolher a, b, c de forma a que o grafo Γ_f^2 tenha o aspecto desejado.

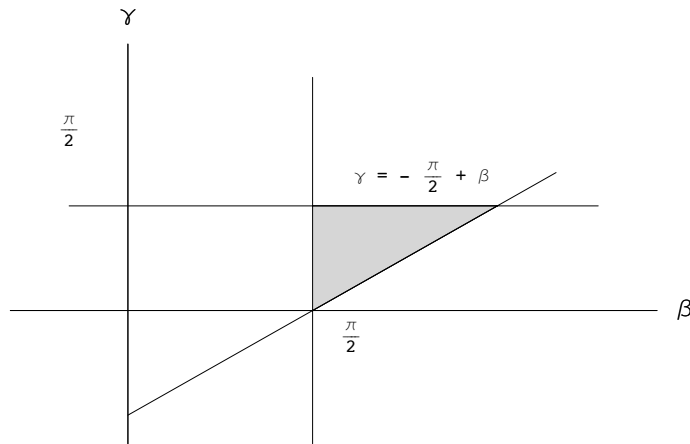


Figura 5.6: Região para os ângulos β e γ no caso $\{v, r, v, v, r, v\}$.

Caso $\{r, v, v, r\}$:

Consideremos o arranjo formado pelos planos

$$\begin{aligned} H_1 &: az_1 + bz_2 = c \\ H_2 &: az_1 + bz_2 = 0 \quad a, b, c \in \mathbb{C} \text{ e } a, b, c \neq 0 \\ H_3 &: z_2 = 0 \end{aligned}$$

As primeiras coordenadas dos pontos múltiplos são:

$$\begin{aligned} H_1 \cap H_3 &: az_1 = c \Leftrightarrow z_1 = \frac{c}{a} = m + in \\ H_2 \cap H_3 &: az_1 = 0 \Leftrightarrow z_1 = \frac{c}{a} = 0 \end{aligned}$$

Cálculo das expressões dos hiperplanos, após projecção por ϕ^2

$$az_1 + bz_2 = c \Leftrightarrow bz_2 = c - az_1 \Leftrightarrow z_2 = \frac{c}{b} - \frac{a}{b}z_1$$

$$x_2 = -\operatorname{Re}\left(\frac{a}{b}\right)x_1 + \operatorname{Re}\left(\frac{c}{b}\right)$$

$$az_1 + bz_2 = 0 \Leftrightarrow bz_2 = -az_1 \Leftrightarrow z_2 = \left(-\frac{a}{b}\right)z_1$$

$$x_2 = -\operatorname{Re}\left(\frac{a}{b}\right)x_1$$

Queremos escolher a, b e c de forma a obter um grafo Γ_f^2 com o aspecto geral da Figura 5.7 (em que os vértices reais são indicados por bolas a cheio).

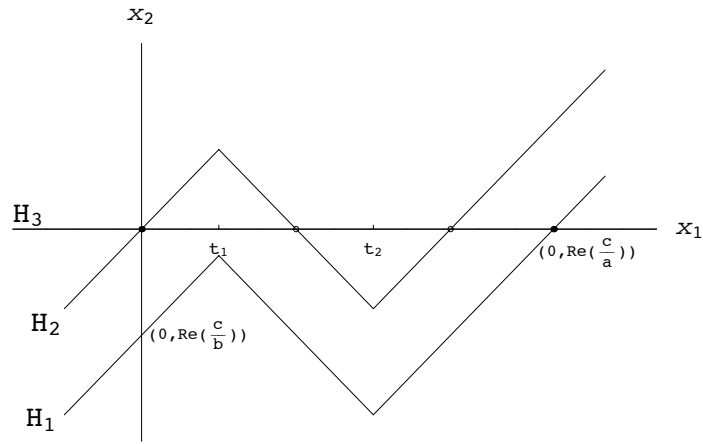


Figura 5.7: Γ_f^2 no caso $\{r, v, v, r\}$.

Sejam $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$, com $0 < t_1 < t_2$, os pontos em que a função de varrimento f (e conseqüentemente os traços dos hiperplanos) muda de declive (ver Figura 5.3).

Escolhemos a, b e c de modo a que $\operatorname{Re}\left(\frac{c}{a}\right) > 0$, $\operatorname{Re}\left(\frac{c}{b}\right) < 0$, e $n = \operatorname{Im}\left(\frac{c}{a}\right) > 0$.

Queremos que, para $t < t_1$, os declives dos traços dos hiperplanos H_1 e H_2 sejam positivos, ou seja que

$$-\operatorname{Re}\left(\frac{a}{b}\right) > 0$$

Escrevendo a, b e c da seguinte forma:

$$\begin{aligned} a & : Ae^{i\alpha} \\ b & : Be^{i(\alpha+\beta)} \\ c & : Ce^{i(\alpha+\gamma)} \end{aligned} \quad A, B, C \in \mathbb{R}^+$$

De acordo com as condições anteriores:

$$-Re\left(\frac{a}{b}\right) > 0 \Leftrightarrow -\frac{A}{B}Re\left(e^{i(-\beta)}\right) > 0 \Leftrightarrow \frac{A}{B}\cos(\beta) < 0 \Leftrightarrow \frac{\pi}{2} + 2k\pi < \beta < \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$$

$$Re\left(\frac{c}{b}\right) < 0 \Leftrightarrow \frac{C}{B}Re\left(e^{i(\gamma-\beta)}\right) < 0 \Leftrightarrow \frac{C}{B}\cos(\gamma-\beta) < 0 \Leftrightarrow \frac{\pi}{2} + 2k\pi < \gamma - \beta < \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$$

$$Re\left(\frac{c}{a}\right) > 0 \Leftrightarrow \frac{C}{A}Re\left(e^{i(\gamma)}\right) > 0 \Leftrightarrow \frac{C}{A}\cos(\gamma) > 0 \Leftrightarrow -\frac{\pi}{2} + 2k\pi < \gamma < \frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

$$Im\left(\frac{c}{a}\right) > 0 \Leftrightarrow \frac{C}{A}Im\left(e^{i(\gamma)}\right) > 0 \Leftrightarrow \frac{C}{A}\text{sen}(\gamma) > 0 \Leftrightarrow 2k\pi < \gamma < \pi + 2k\pi$$

com $k \in \mathbb{Z}$.

Para $t_1 < t < t_2$ queremos que os declives de H_1 e H_2 sejam negativos. A expressão de H_1 em $[t_1, t_2]$ é dada por

$$\begin{aligned} H_1 : x_2 &= -Re\left(\frac{a}{b}\right)t + Re\left(\frac{c}{b}\right) + Im\left(\frac{a}{b}\right)f(t) = \\ &= \left(-Re\left(\frac{a}{b}\right) + Im\left(\frac{a}{b}\right)\left(\frac{n}{t_2-t_1}\right)\right)t - Im\left(\frac{a}{b}\right)\left(\frac{nt_1}{t_2-t_1}\right) + Re\left(\frac{c}{b}\right) \end{aligned}$$

Pretende-se que $\left(-Re\left(\frac{a}{b}\right) + Im\left(\frac{a}{b}\right)\left(\frac{n}{t_2-t_1}\right)\right)$, que representa o declive de H_1 , seja negativo, assim $Im\left(\frac{a}{b}\right)$ deve ser negativo (uma vez que $-Re\left(\frac{a}{b}\right)$ é positivo), o que significa que $\text{sen}(-\beta) < 0 \Leftrightarrow \text{sen}(\beta) > 0 \Leftrightarrow 2k\pi < \beta < (2k+1)\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$, e devemos tomar t_1 e t_2 suficientemente próximos.

A expressão para H_2 é dada por

$$\begin{aligned} H_2 : x_2 &= -Re\left(\frac{a}{b}\right)t + Im\left(\frac{a}{b}\right)f(t) = -Re\left(\frac{a}{b}\right)t + Im\left(\frac{a}{b}\right)\left(\frac{yt}{t_2-t_1} - \frac{nt_1}{t_2-t_1}\right) = \\ &= \left(-Re\left(\frac{a}{b}\right) + Im\left(\frac{a}{b}\right)\left(\frac{n}{t_2-t_1}\right)\right)t - Im\left(\frac{a}{b}\right)\left(\frac{nt_1}{t_2-t_1}\right) \end{aligned}$$

Queremos que entre t_1 e t_2 o traço de H_2 intersecte o eixo x_1 , passando de valores positivos para negativos, enquanto o traço de H_1 permaneça sempre com valores negativos neste intervalo. Para isso precisamos de garantir que as ordenadas de H_1 em t_1 e de H_2 em t_2 sejam negativas. Estas condições escrevem-se

$$-Re\left(\frac{a}{b}\right)t_1 + Re\left(\frac{c}{b}\right) < 0 \Leftrightarrow C\cos(\gamma-\beta) < At_1\cos\beta,$$

e

$$-Re\left(\frac{a}{b}\right) + Im\left(\frac{a}{b}\right)Im\left(\frac{c}{a}\right) < 0 \Leftrightarrow A\cos\beta + C\text{sen}\beta\text{sen}\gamma > 0.$$

Tendo em conta as condições impostas a β e γ anteriormente, estas relações são satisfeitas desde que tomemos C suficientemente grande.

Para $t > t_2$ os traços dos hiperplanos H_1 e H_2 voltam a apresentar o mesmo declive positivo que possuíam em $t < t_1$, intersectando assim o eixo x_1 novamente, H_1 num vértice virtual e H_2 num vértice

real.

Uma vez que a intersecção das condições anteriores é não vazia (ver Figura 5.8) , podemos escolher a, b, c de forma a que o grafo Γ_f^2 tenha o aspecto desejado.

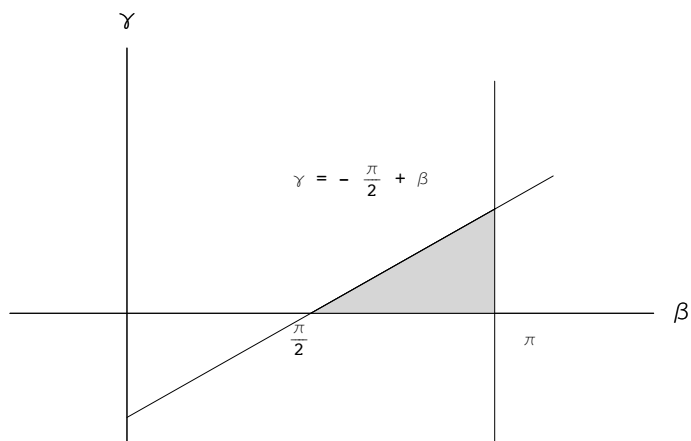


Figura 5.8: Região para os ângulos β e γ no caso $\{r, v, v, r\}$

Três hiperplanos concorrentes num ponto.

Neste caso, o grafo Γ_f^2 tem o aspecto da Figura 5.9. Como há um único ponto múltiplo, a função f é constante, e qualquer arranjo nestas condições tem o grafo pretendido.

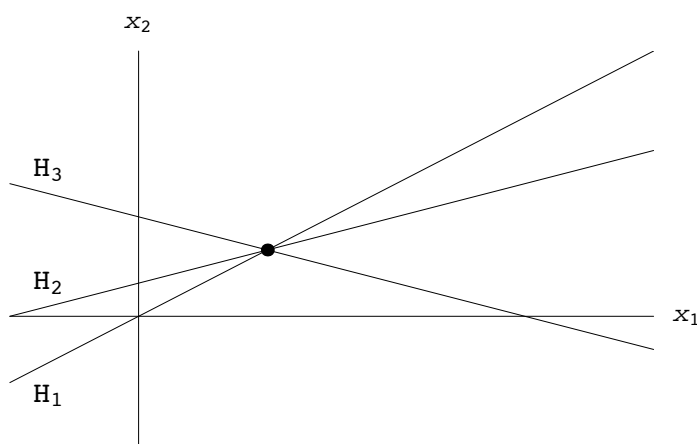


Figura 5.9: Γ_f^2 para três hiperplanos com um único ponto múltiplo.

M retrai-se por deformação na sua intersecção com uma esfera centrada no ponto múltiplo, e portanto pelo Lema 3.3.5 temos

$$\pi_1(M) = \langle a, b, c \mid abc = bca = cab \rangle.$$

Três hiperplanos concorrentes em três pontos

Este é o caso genérico. Mesmo para este número reduzido de hiperplanos, o número de possibilidades para o grafo Γ_f^2 é já bastante elevado. A aplicação de varrimento f e, conseqüentemente, os traços dos hiperplanos apresentam quatro mundanças de declive. No primeiro, terceiro e quinto traços f tem declive nulo, porque se encontra na vizinhança de pontos múltiplos. No segundo e quarto traços o declive pode ser qualquer, dependendo da localização dos pontos múltiplos. O número máximo de vértices virtuais que se pode obter num tal arranjo é doze pela Proposição 5.3.3.

É no entanto possível indicar o grupo fundamental de M , recorrendo a um Teorema de Hattori [3] que determina o tipo de homotopia de um arranjo de hiperplanos em \mathbb{C}^n com pelo menos $n + 1$ hiperplanos. No caso presente o teorema diz que o tipo de homotopia de M é o mesmo que o do espaço

$$S^1 \times S^1 \times S^1 \setminus \{p\}$$

onde p é um ponto qualquer, e daqui segue do Teorema de Van Kampen que

$$\pi_1(M) = \pi_1(S^1 \times S^1 \times S^1) = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} = \langle a, b, c \mid ab = ba, ac = ca, bc = cb \rangle.$$

5.3 Restrições sobre os vértices de um grafo admissível

Concluimos este trabalho com algumas observações gerais sobre o grafo Γ_f^2 associado a um arranjo.

Proposição 5.3.1. *Seja \mathcal{A} um arranjo de hiperplanos complexos, $H, H' \in \mathcal{A}$ dois planos não paralelos e $p = H \cap H'$. Então, os conjuntos de vértices virtuais*

$$Q_e = \{q \in Q \cap H \cap H' : x_1(q) < x_1(p)\}$$

e

$$Q_d = \{q \in Q \cap H \cap H' : x_1(q) > x_1(p)\}$$

têm um número par de elementos.

Demonstração. Fazemos a demonstração apenas para o conjunto Q_e uma vez que a demonstração do resultado para Q_d é inteiramente análoga.

Os traços H e H' são funções afins nos intervalos $] - \infty, v_1]$, $[v_i, u_i]$, $[u_i, v_{i+1}]$ e $[u_{r-1}, +\infty[$ (onde r é o número de vértices reais - ver Definição 3.2.3). Sejam d e d' os declives dos traços H e H' no intervalo $] - \infty, v_1]$. Supomos sem perda de generalidade que $d > d'$.

Note-se que o declive de H é igual a d nos intervalos $[u_i, v_{i+1}]$ e $[u_{r-1}, +\infty[$, o mesmo acontecendo com H' . Além disso, ou $x_1(p)$ pertence $] - \infty, v_1]$ ou pertence a um dos intervalos anteriores.

No primeiro caso $Q_e = \emptyset$ e portanto nada há a demonstrar. Caso contrário, seja u_k (com $1 \leq k \leq r-1$) o extremo esquerdo do intervalo que contém $x_1(p)$. Sejam y_k, y'_k as ordenadas das intersecções de H e H' com a recta vertical $x_1 = u_k$ e y_1, y'_1 as ordenadas das intersecções de H e H' com a recta vertical $x_1 = v_1$.

Como $d > d'$ temos que $y_k < y'_k$. Se $y_1 < y'_1$ então não há qualquer ponto de Q_e com abcissa em $] - \infty, v_1]$ e os traços H e H' têm de se cruzar um número par de vezes (possivelmente zero) em $[v_1, u_k]$. A hipótese restante é que tenhamos $y_1 > y'_1$ e nesse caso há necessariamente um vértice virtual em $] - \infty, v_1]$ e os traços H e H' têm de se cruzar um número ímpar de vezes em $[v_1, u_k]$.

Em qualquer dos casos, o número de elementos de Q_e é par. □

Corolário 5.3.2. *O número total de vértices virtuais num grafo admissível é par.*

Finalmente, apresentamos um majorante para o número de vértices virtuais em Γ_f^2 para um qualquer arranjo de s hiperplanos complexos.

Proposição 5.3.3. *Para um arranjo de s hiperplanos, o número máximo de vértices virtuais em Γ_f^2 é $\frac{s^4 - 2s^3 - s^2 + 2s}{2}$.*

Demonstração. Num arranjo de s hiperplanos existem, no máximo, $\binom{s}{2} = \frac{s^2 - s}{2}$ vértices reais. É o caso em que apenas dois hiperplanos se intersectam em cada ponto múltiplo.

De acordo com a construção da função de varrimento, f , teremos $2\binom{s}{2} - 1 = s^2 - s - 1$ mudanças de declive para f e para os traços dos hiperplanos. Em cada um dos troços, verificam-se até $\binom{s}{2}$ intersecções entre os traços dos hiperplanos.

O número máximo de vértices virtuais é então dado pelo número de intersecções, multiplicado pelo número de intervalos, ao que se subtrai o número de vértices reais: $(2\binom{s}{2} - 1) \times \binom{s}{2} - \binom{s}{2} = (2\binom{s}{2} - 2)\binom{s}{2}$. \square

Bibliografia

- [1] W. Arvola, *The fundamental group of the complement of an arrangement of complex hyperplanes.*, Topology **31** (1992), no. 4, 757–765.
- [2] H. Hamm e L. Tráng, *Un théorème de Zariski du type de Lefschetz*, Ann. Sci. E.N.S **6** (1973) 317-355.
- [3] A. Hattori, *Topology of \mathbb{C}^n minus a finite number of affine hyperplanes in general position.*, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo **22** (1975) 205–219.
- [4] J. Munkres, *Topology*, 2nd edition, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J., 2000. 537 pp.
- [5] P. Orlik e H. Terao, *Arrangements of hyperplanes*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences], **300**. Springer-Verlag, Berlin, 1992. xviii+325 pp.
- [6] R. Randell, *The fundamental group of the complement of a union of complex hyperplanes.* Invent. Math. **69** (1982), no. 1, 103–108. and Correction: Invent. Math. **80** (1985), no. 3, 467–468.
- [7] O. Zariski, *On the Poincaré group of the complement of a projective hypersurface.*, Ann. of Math. **38** (1937), 131-141.