Triangulações de superfícies

Pedro Vitória

3º ano LMAC
Instituto Superior Técnico

Seminário Diagonal, 2007

Plano

Motivação

Duas superfícies são topologicamente a mesma se forem homeomorfas, i.e., se existir uma bijecção contínua c/ inversa contínua entre elas.
Um exemplo clássico de duas superfícies homeomorfas é a chávena de café e o donut.

Motivação

Duas superfícies são topologicamente a mesma se forem homeomorfas, i.e., se existir uma bijecção contínua c/ inversa contínua entre elas.

Um exemplo clássico de duas superfícies homeomorfas é a chávena de café e o donut.

No entanto há superfícies em que a distinção pode ser muito complicada.

Quais destas superfícies são homeomorfas?

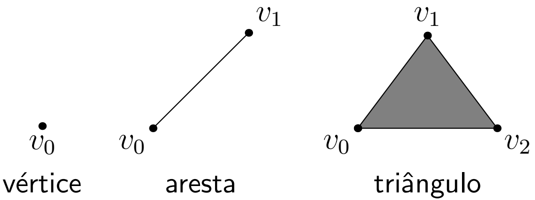
Símplices

Seja $V = \{v_0, v_1, ..., v_n\} \subset \mathbb{R}^N$ um conjunto de $n+1$ pontos geometricamente independentes. Define-se o **símplice-n** gerado por V como sendo o menor conjunto convexo $\sigma^n = v_0 v_1 ... v_n$ que contém V. A *dimensão* de σ^n é n.

Símplices

Seja $V = \{v_0, v_1, ..., v_n\} \subset \mathbb{R}^N$ um conjunto de $n+1$ pontos geometricamente independentes. Define-se o **símplice-n** gerado por V como sendo o menor conjunto convexo $\sigma^n = v_0 v_1 ... v_n$ que contém V. A *dimensão* de σ^n é n.

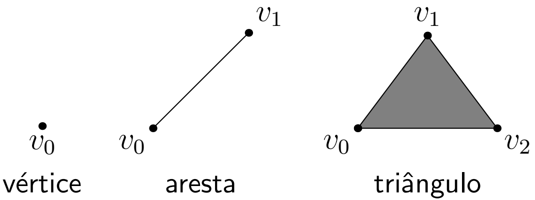
Exemplos:



Símplices

Seja $V = \{v_0, v_1, ..., v_n\} \subset \mathbb{R}^N$ um conjunto de $n+1$ pontos geometricamente independentes. Define-se o **símplice-n** gerado por V como sendo o menor conjunto convexo $\sigma^n = v_0 v_1 ... v_n$ que contém V. A *dimensão* de σ^n é n.

Exemplos:



Se $V' \subset V$ então o símplice gerado por V' diz-se uma **face** de σ_n.

Complexos

Um **complexo Euclidiano**, K, é uma colecção de símplices em $\mathbb{R}^N$ tal que:

K.1 Se $\sigma \in K$ e τ é uma face de σ então $\tau \in K$;

K.2 Se $\sigma, \tau \in K$ e $\sigma \cap \tau \neq \emptyset$ então $\sigma \cap \tau$ é uma face de σ e τ;

K.3 Cada $\sigma \in K$ tem uma vizinhança U que intersecta apenas um número finito de elementos de K.

Complexos

Um **complexo Euclidiano**, K, é uma colecção de símplices em $\mathbb{R}^N$ tal que:

K.1 Se $\sigma \in K$ e τ é uma face de σ então $\tau \in K$;

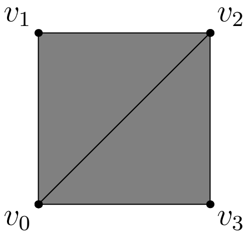
K.2 Se $\sigma, \tau \in K$ e $\sigma \cap \tau \neq \emptyset$ então $\sigma \cap \tau$ é uma face de σ e τ;

K.3 Cada $\sigma \in K$ tem uma vizinhança U que intersecta apenas um número finito de elementos de K.

A união dos elementos de K denota-se por $|K|$ e diz-se a *representação geométrica* de K.
A *dimensão* de K é a dimensão máxima dos seus elementos.
Para cada $i \geqslant 0$ define-se o *i-esqueleto* de um complexo K como sendo o conjunto K^i dos símplices de K com dimensão $\leqslant i$.

Complexos: Exemplo

$K = \{v_0v_1v_2, v_2v_3v_0, v_0v_1, v_1v_2, v_2v_0, v_2v_3, v_3v_0, v_0, v_1, v_2, v_3, \emptyset\}$ é um complexo de dimensão 2 e a sua representação geométrica é:



$K^0 = \{v_0, v_1, v_2, v_3\}$, $K^1 = \{v_0v_1, v_1v_2, v_2v_0, v_2v_3, v_3v_0\} \cup K^0, \ldots$

Nota: Cada símplice σ determina um complexo K_σ que é o menor complexo que o contém, i.e. $K_\sigma = \{\tau : \tau \text{ é face de } \sigma\}$.

Junção de símplices

Sejam $\sigma^n = v_0 v_1 \ldots v_n$ e $\sigma^m = u_0 u_1 \ldots u_m$ dois símplices em $\mathbb{R}^p$ c/ $p \geqslant n + m + 1$ tais que $V = \{v_0, v_1, \ldots, v_n, u_0, u_1, \ldots, u_m\}$ é um conjunto de pontos geometricamente independentes. Então a **junção** de σ^n com σ^m, $\sigma^n \star \sigma^m$, é o (n+m+1)-símplice

$$\sigma^{n+m+1} = v_0 v_1 \ldots v_n u_0 u_1 \ldots u_m.$$

Convenciona-se que $\varnothing \star \sigma = \sigma$.

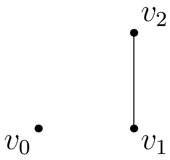
Junção de símplices

Sejam $\sigma^n = v_0 v_1 \ldots v_n$ e $\sigma^m = u_0 u_1 \ldots u_m$ dois símplices em $\mathbb{R}^p$ c/ $p \geqslant n + m + 1$ tais que $V = \{v_0, v_1, \ldots, v_n, u_0, u_1, \ldots, u_m\}$ é um conjunto de pontos geometricamente independentes. Então a **junção** de σ^n com σ^m, $\sigma^n \star \sigma^m$, é o (n+m+1)-símplice

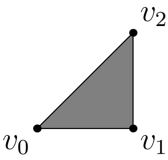
$$\sigma^{n+m+1} = v_0 v_1 \ldots v_n u_0 u_1 \ldots u_m.$$

Convenciona-se que $\varnothing \star \sigma = \sigma$.

Exemplo:



$v_0, \; v_1 v_2$



$v_0 \star v_1 v_2 = v_0 v_1 v_2$

Junção de complexos

Sejam K e L são complexos tais que sempre que $\sigma \in K, \tau \in L$ se tem que $\sigma \star \tau$ está definido. Então define-se a **junção de K com L**:

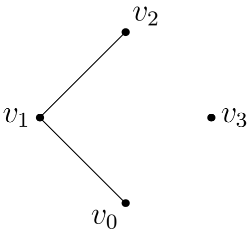
$$K \star L = \{\sigma \star \tau : \sigma \in K, \tau \in L\}$$

Junção de complexos

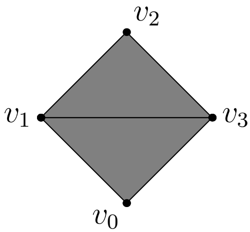
Sejam K e L são complexos tais que sempre que $\sigma \in K, \tau \in L$ se tem que $\sigma \star \tau$ está definido. Então define-se a **junção de K com L**:

$$K \star L = \{\sigma \star \tau : \sigma \in K, \tau \in L\}$$

Exemplo:



$$K = \{\varnothing, v_0, v_1, v_2, v_2 v_1, v_1 v_2\}$$
$$L = \{\varnothing, v_3\}$$



$$K \star L$$

Star e Link

Dado um complexo K e $\sigma \in K$ define-se:

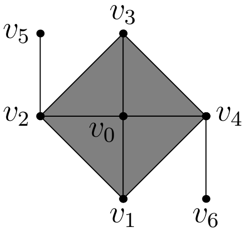
- $Lk(\sigma, K) = \{\tau \in K : \tau \star \sigma \in K\}$ é o **link** de σ em K.
- $St(\sigma, K) = \sigma \star lk(\sigma, K)$ é a **star** de σ em K.

Star e Link

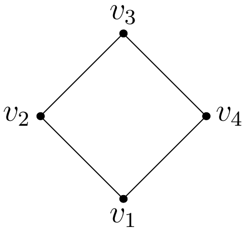
Dado um complexo K e $\sigma \in K$ define-se:

- $Lk(\sigma, K) = \{\tau \in K : \tau \star \sigma \in K\}$ é o **link** de σ em K.
- $St(\sigma, K) = \sigma \star lk(\sigma, K)$ é a **star** de σ em K.

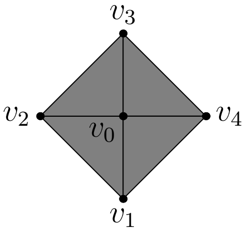
Exemplo:



K



$Lk(v_0, K)$



$St(v_0, K)$

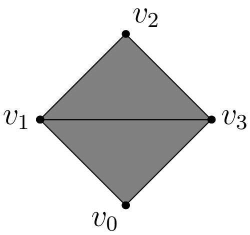
Subdivisão

Se K e L são complexos tais que $|K| = |L|$ e cada símplice de L está contido num símplice de K então diz-se que L é **subdivisão** de K e escreve-se $L < K$.

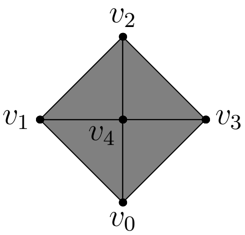
Subdivisão

Se K e L são complexos tais que $|K| = |L|$ e cada símplice de L está contido num símplice de K então diz-se que L é **subdivisão** de K e escreve-se $L < K$.

Exemplo:



K

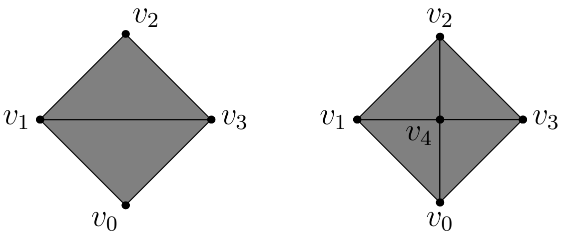


$L < K$

Subdivisão

Se K e L são complexos tais que $|K| = |L|$ e cada símplice de L está contido num símplice de K então diz-se que L é **subdivisão** de K e escreve-se $L < K$.

Exemplo:



K $\qquad$ $L < K$

Prop: Se $L < K$ e $L' < K$ então L e L' têm uma subdivisão em comum.

Isomorfismo e equivalência combinatória

Def:

- Sejam K, L complexos e $\phi : K^0 \to L^0$ um bijecção. Se $v_0 v_1 ... v_n \in K \Leftrightarrow \phi(v_0)\phi(v_1)...\phi(v_n) \in L$ então diz-se que K e L são **isomorfos** e ϕ é um **isomorfismo**.

Isomorfismo e equivalência combinatória

Def:

- Sejam K, L complexos e $\phi : K^0 \to L^0$ um bijecção. Se $v_0 v_1 ... v_n \in K \Leftrightarrow \phi(v_0)\phi(v_1)...\phi(v_n) \in L$ então diz-se que K e L são **isomorfos** e ϕ é um **isomorfismo**.
- Se K, L são complexos e têm subdivisões K', L' isomorfas então K e L dizem-se **combinatoriamente equivalentes**, $K \sim_c L$.

Isomorfismo e equivalência combinatória

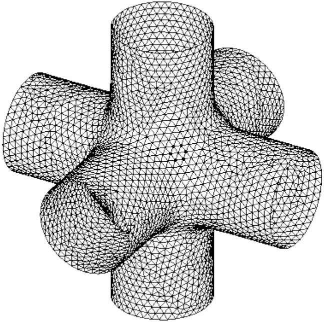
Def:

- Sejam K, L complexos e $\phi : K^0 \to L^0$ um bijecção. Se $v_0 v_1 ... v_n \in K \Leftrightarrow \phi(v_0)\phi(v_1)...\phi(v_n) \in L$ então diz-se que K e L são **isomorfos** e ϕ é um **isomorfismo**.
- Se K, L são complexos e têm subdivisões K', L' isomorfas então K e L dizem-se **combinatoriamente equivalentes**, $K \sim_c L$.

Prop: $\sim_c$ é uma relação de equivalência.

Triangulações

Seja uma M uma variedade-n. Uma **triangulação** de M é um par-ordenado (K, h) onde K é um complexo simplicial e $h : |K| \leftrightarrow M$ é um homeomorfismo.



Teorema da Triangulação

Teo (Radó, 1924): Qualquer superfície é triangulável.

Teorema da Triangulação

Teo (Radó, 1924): Qualquer superfície é triangulável.
Mais, cada triangulação é única a menos de equivalência combinatória:
Teo (Hauptvermutung): Se M_1 e M_2 são superfícies homeomorfas e (K_1, h_1) e (K_2, h_2) são triangulações de M_1 e M_2, respectivamente, então $K_1 \sim_c K_2$.

Teorema da Triangulação

Teo (Radó, 1924): Qualquer superfície é triangulável.
Mais, cada triangulação é única a menos de equivalência combinatória:
Teo (Hauptvermutung): Se M_1 e M_2 são superfícies homeomorfas e (K_1, h_1) e (K_2, h_2) são triangulações de M_1 e M_2, respectivamente, então $K_1 \sim_c K_2$.
Estes dois teoremas permitem-nos definir invariantes topológicos definidos unicamente em termos de triangulações.
O *Hauptvermutung* diz-nos que a estrutura topológica de uma superfície determina a sua estrutura combinatória.

Dimensões superiores

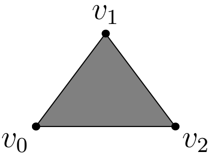
- Tanto o Teorema da Triangulação como o Hauptvermutung são verdadeiros também em dimensão 3 (Moise, 1952).
- O mesmo não se passa para dimensões superiores: Nos anos 60, Milnor e Siebenmann deram contra-exemplos em dimensões ≥ 5 (curiosamente parece ser mais fácil trabalhar nestas dimensões).
- Em 1985 Casson exibiu um contra-exemplo de uma variedade fechada de dimensão 4 que não é triangulável.

Movimentos estelares

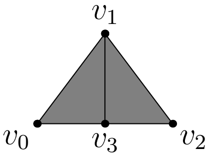
Seja K um complexo Euclidiano, A um símplice de K e a um ponto interior de A:

- A operação (A, a) em que se substitui $st(A, K)$ por $a \star \partial A \star lk(A, K)$ diz-se uma **adição estelar**.
- A operação inversa $(A, a)^{-1}$ diz-se uma **remoção estelar**.
- As duas dizem-se **movimentos estelares**.
- Se uma subdivisão K' de K pode ser obtida apenas através de adições estelares, i.e., $K' = ...(A_n, a_n)...(A_1, a_1)K$ então K' diz-se uma **subdivisão estelar de K**.

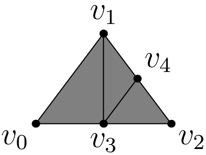
Movimentos estelares: exemplo



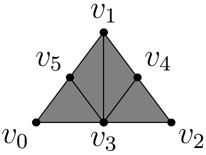
$K^{(0)}$



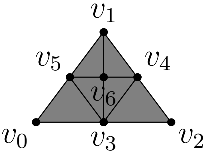
$K^{(1)} = (v_0 v_2, v_3) K^{(0)}$



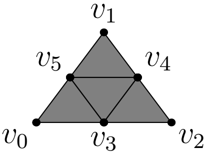
$K^{(2)} = (v_1 v_2, v_4) K^{(1)}$



$K^{(3)} = (v_0 v_1, v_5) K^{(2)}$



$K^{(4)} = (v_1 v_3, v_6) K^{(3)}$



$K^{(5)} = (v_4 v_5, v_6)^{-1} K^{(4)}$

Note-se que $K^{(5)}$ não é subdivisão estelar de $K^{(0)}$.

Equivalência estelar

Sejam K_1 e K_2 complexos. Se existirem sequências de movimentos estelares de K_1 e K_2 tais que os complexos resultantes são isomorfos então K_1 e K_2 dizem-se **estelarmente equivalentes**, $K_1 \sim_s K_2$.

Equivalência estelar

Sejam K_1 e K_2 complexos. Se existirem sequências de movimentos estelares de K_1 e K_2 tais que os complexos resultantes são isomorfos então K_1 e K_2 dizem-se **estelarmente equivalentes**, $K_1 \sim_s K_2$.

Teo: $K \sim_c L \Leftrightarrow K \sim_s L$

Equivalência estelar

Sejam K_1 e K_2 complexos. Se existirem sequências de movimentos estelares de K_1 e K_2 tais que os complexos resultantes são isomorfos então K_1 e K_2 dizem-se **estelarmente equivalentes**, $K_1 \sim_s K_2$.

Teo: $K \sim_c L \Leftrightarrow K \sim_s L$

Conjectura: Se K e L são complexos combinatoriamente equivalentes então possuem subdivisões estelares isomorfas.

Notação

Sejam $\sigma^n = v_0 ... v_n$, $\tau^m = u_0 ... u_m$ dois símplices e K uma colecção de símplices. No resto da secção fazem-se as seguintes identificações *formais*:

- $\sigma^{-1} \equiv 1$, $\sigma^n \equiv v_0 ... v_n x^{n+1}$, $n = 0, 1, ...$

Notação

Sejam $\sigma^n = v_0 ... v_n$, $\tau^m = u_0 ... u_m$ dois símplices e K uma colecção de símplices. No resto da secção fazem-se as seguintes identificações *formais*:

- $\sigma^{-1} \equiv 1$, $\sigma^n \equiv v_0 ... v_n x^{n+1}$, $n = 0, 1, ...$
- $\sigma^n \cdot \tau^m \equiv \sigma^n \star \tau^m \equiv v_0 ... v_n u_0 ... u_m x^{n+1+m+1}$

Notação

Sejam $\sigma^n = v_0 \ldots v_n$, $\tau^m = u_0 \ldots u_m$ dois símplices e K uma colecção de símplices. No resto da secção fazem-se as seguintes identificações *formais*:

- $\sigma^{-1} \equiv 1$, $\sigma^n \equiv v_0 \ldots v_n x^{n+1}$, $n = 0, 1, \ldots$
- $\sigma^n \cdot \tau^m \equiv \sigma^n \star \tau^m \equiv v_0 \ldots v_n u_0 \ldots u_m x^{n+1+m+1}$
- $K \equiv \sum_{\tau \in K} \tau$

Notação

Sejam $\sigma^n = v_0 ... v_n$, $\tau^m = u_0 ... u_m$ dois símplices e K uma colecção de símplices. No resto da secção fazem-se as seguintes identificações *formais*:

- $\sigma^{-1} \equiv 1$, $\sigma^n \equiv v_0 ... v_n x^{n+1}$, $n = 0, 1, ...$
- $\sigma^n \cdot \tau^m \equiv \sigma^n \star \tau^m \equiv v_0 ... v_n u_0 ... u_m x^{n+1+m+1}$
- $K \equiv \sum_{\tau \in K} \tau$
- $K_i \equiv \{\tau \in K : \tau \text{ tem dimensão } i - 1\}$, $i = 0, 1, 2, ...$.

Notação

Sejam $\sigma^n = v_0 \ldots v_n$, $\tau^m = u_0 \ldots u_m$ dois símplices e K uma colecção de símplices. No resto da secção fazem-se as seguintes identificações *formais*:

- $\sigma^{-1} \equiv 1$, $\sigma^n \equiv v_0 \ldots v_n x^{n+1}$, $n = 0, 1, \ldots$
- $\sigma^n \cdot \tau^m \equiv \sigma^n \star \tau^m \equiv v_0 \ldots v_n u_0 \ldots u_m x^{n+1+m+1}$
- $K \equiv \sum_{\tau \in K} \tau$
- $K_i \equiv \{\tau \in K : \tau \text{ tem dimensão } i-1\}$, $i = 0, 1, 2, \ldots$.

Exemplo:

$$K = \{\varnothing, v_0, v_1, v_0 v_1\} \Rightarrow K_0 \equiv \{\varnothing\},\ K_1 \equiv \{v_0, v_1\},\ K_2 \equiv \{v_0 v_1\}.$$
$$K \equiv 1 + (v_0 + v_1)x + v_0 v_1 x^2 \equiv K_0 + K_1 + K_2.$$

Notação (continuação)

Com esta notação sugestiva dados dois complexos K e L são válidas as seguintes identidades:

(i) $K \cup L = K + L - (K \cap L)$
(ii) $K = \sum_{i=0}^{\infty} K_i$
(iii) Se $L \subset K$ então $K \setminus L = K - L$
(iv) Se $K \star L$ está definido então $K \star L = K \cdot L$.

Notação (continuação)

Com esta notação sugestiva dados dois complexos K e L são válidas as seguintes identidades:

(i) $K \cup L = K + L - (K \cap L)$

(ii) $K = \sum_{i=0}^{\infty} K_i$

(iii) Se $L \subset K$ então $K \setminus L = K - L$

(iv) Se $K \star L$ está definido então $K \star L = K \cdot L$.

Exemplo:

$$K = \{\varnothing, v_0, v_1, v_0 v_1\},\ L = \{\varnothing, v_2, v_3\}.$$

$$K \star L = \{\varnothing, v_0, v_1, v_0 v_1, v_2, v_0 v_2, v_1 v_2, v_0 v_1 v_2, v_3, v_0 v_3, v_1 v_3, v_0 v_1 v_3\}.$$

$$K \cdot L = \left[1 + (v_0 + v_1)x + v_0 v_1 x^2\right]\left[1 + (v_2 + v_3)x\right]$$

Polinómio característico

Def: Se K é um complexo então $p_K(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \#K_i x^i$ diz-se o **polinómio característico** de K. Se σ é um símplice então $p_\sigma(x) = p_{K_\sigma}(x)$

Polinómio característico

Def: Se K é um complexo então $p_K(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \#K_i x^i$ diz-se o **polinómio característico** de K. Se σ é um símplice então $p_\sigma(x) = p_{K_\sigma}(x)$
Exemplo:

$$K = \{\varnothing, v_0, v_1, v_0 v_1\} \Rightarrow p_K(x) = 1 + 2x + x^2.$$

Mais geralmente $p_{\sigma^n}(x) = \sum_{i=0}^{n+1} \binom{n+1}{i} x^i = (x+1)^{n+1}$, $n \in \mathbb{N}_0$

Polinómio característico

Def: Se K é um complexo então $p_K(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \# K_i x^i$ diz-se o **polinómio característico** de K. Se σ é um símplice então $p_\sigma(x) = p_{K_\sigma}(x)$
Exemplo:

$$K = \{\emptyset, v_0, v_1, v_0 v_1\} \Rightarrow p_K(x) = 1 + 2x + x^2.$$

Mais geralmente $p_{\sigma^n}(x) = \sum_{i=0}^{n+1} \binom{n+1}{i} x^i = (x+1)^{n+1}$, $n \in \mathbb{N}_0$

Prop: $p_{K \star L}(x) = p_K(x) p_L(x)$
Dem:
$(K \star L)_i = (K \cdot L)_i = \left\{ \left(\sum_{i=0}^{\infty} K_i \right) \left(\sum_{j=0}^{\infty} L_j \right) \right\}_i = \sum_{j=0}^{i} K_j \cdot L_{i-j}$
$p_{K \star L}(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \# \left(\sum_{j=0}^{i} K_j \cdot L_{i-j} \right) x^i = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{i} \# K_j \# L_{i-j} x^i =$
$p_K(x) p_L(x)$

Característica de Euler para complexos

Def: Se K é um complexo então define-se a **característica de Euler** de K como $\chi(K) = \sum_{i=1}^{\infty}(-1)^{i+1}\#K_i$.

Característica de Euler para complexos

Def: Se K é um complexo então define-se a **característica de Euler** de K como $\chi(K) = \sum_{i=1}^{\infty}(-1)^{i+1}\#K_i$.
Exemplo: Se K tem dimensão 2 então $\chi(K) = V - A + F$ onde V, A e F são respectivamente o número de vértices, arestas e triângulos de K.
Note-se que $\chi(K) = -\chi'(K) + 1$, onde $\chi'(K) = p_K(-1)$.

Característica de Euler para complexos

Def: Se K é um complexo então define-se a **característica de Euler** de K como $\chi(K) = \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^{i+1} \# K_i$.
Exemplo: Se K tem dimensão 2 então $\chi(K) = V - A + F$ onde V, A e F são respectivamente o número de vértices, arestas e triângulos de K.
Note-se que $\chi(K) = -\chi'(K) + 1$, onde $\chi'(K) = p_K(-1)$.
Teo: $K \sim_c L \Rightarrow \chi(K) = \chi(L)$
Dem: $K \sim_c L \Rightarrow K \sim_s L$ e um isomorfismo preserva claramente χ logo só é necessário ver que $\chi((A,a)K) = \chi(K)$.
$\chi'((A,a)K) = \chi'(K - st(A,K) + a \star \partial A \star lk(A,K)) =$
$\chi'(K) - \chi'(A \star lk(A,K)) + \chi'(a \star \partial A \star lk(A,K)) =$
$\chi'(K) - \chi'(A)\chi'(lk(A,K)) + \chi'(a)\chi'(\partial A \star lk(A,K))) = \chi'(K)$

Característica de Euler para superfícies

Def: Seja M uma superfíce e (K, h) uma sua triangulação. Então a **característica de Euler** de M é $\chi(M) = \chi(K)$.

Característica de Euler para superfícies

Def: Seja M uma superfíce e (K, h) uma sua triangulação. Então a **característica de Euler** de M é $\chi(M) = \chi(K)$.

Temos como corolário imediato do *Hauptvermutung* e do teorema anterior que χ é um invariante topológico, i.e.,

Teo: Se M e N são superfícies homeomorfas então $\chi(M) = \chi(N)$.

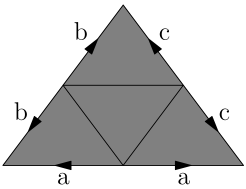
Característica de Euler para superfícies

Def: Seja M uma superfíce e (K,h) uma sua triangulação. Então a **característica de Euler** de M é $\chi(M) = \chi(K)$.

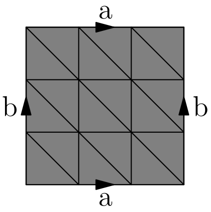
Temos como corolário imediato do *Hauptvermutung* e do teorema anterior que χ é um invariante topológico, i.e.,

Teo: Se M e N são superfícies homeomorfas então $\chi(M) = \chi(N)$.

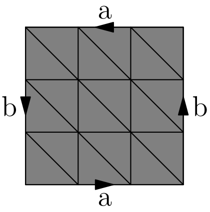
Exemplos:



$\chi(S^2) = 4 - 6 + 4 = 2$



$\chi(T^2) = 9 - 27 + 18 = 0$



$\chi(P^2) = 10 - 27 + 18 = 1$

Propriedades da Característica de Euler

Sejam M e N duas superfícies. Então verifica-se:

- $\chi(M\#N) = \chi(M) + \chi(N) - 2$
- $\chi(M \bigsqcup N) = \chi(M) + \chi(N)$

onde $\#$ representa a soma conexa e $\bigsqcup$ representa a união disjunta.

Propriedades da Característica de Euler

Sejam M e N duas superfícies. Então verifica-se:

- $\chi(M \# N) = \chi(M) + \chi(N) - 2$
- $\chi(M \bigsqcup N) = \chi(M) + \chi(N)$

onde $\#$ representa a soma conexa e $\bigsqcup$ representa a união disjunta.

Exemplos:

$$\chi(\overbrace{T^2 \# ... \# T^2}^{n}) = -2(n-1)$$

$$\chi(\overbrace{P^2 \# ... \# P^2}^{n}) = 2 - n$$

Decomposição de superfícies compactas

Teo: Se M é uma superfície compacta triangulável então M é homeomorfa ao espaço quociente obtido de uma colecção de triângulos por colagem das suas arestas duas a duas.

Decomposição de superfícies compactas

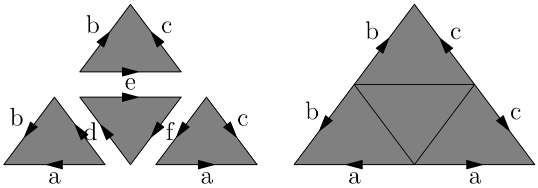
Teo: Se M é uma superfície compacta triangulável então M é homeomorfa ao espaço quociente obtido de uma colecção de triângulos por colagem das suas arestas duas a duas.
Se M também for conexa então é homeomorfa ao quociente de uma região poligonal em que as suas arestas estão identificadas duas a duas.

Decomposição de superfícies compactas

Teo: Se M é uma superfície compacta triangulável então M é homeomorfa ao espaço quociente obtido de uma colecção de triângulos por colagem das suas arestas duas a duas.

Se M também for conexa então é homeomorfa ao quociente de uma região poligonal em que as suas arestas estão identificadas duas a duas.

Exemplo de espaços quocientes homeomorfos a S^2:



Teorema da Classificação

Teo: Qualquer espaço obtido de uma região poligonal por uma colagem das suas arestas duas a duas é homeomorfo a S^2, a $T^2\#...\#T^2$ ou a $P^2\#...\#P^2$.

Teorema da Classificação

Teo: Qualquer espaço obtido de uma região poligonal por uma colagem das suas arestas duas a duas é homeomorfo a S^2, a $T^2\#...\#T^2$ ou a $P^2\#...\#P^2$.

Teo: Qualquer variedade compacta conexa é homeomorfa a S^2, a $T^2\#...\#T^2$ ou a $P^2\#...\#P^2$.

Teorema da Classificação

Teo: Qualquer espaço obtido de uma região poligonal por uma colagem das suas arestas duas a duas é homeomorfo a S^2, a $T^2 \# ... \# T^2$ ou a $P^2 \# ... \# P^2$.
Teo: Qualquer variedade compacta conexa é homeomorfa a S^2, a $T^2 \# ... \# T^2$ ou a $P^2 \# ... \# P^2$.
Notas:

- S^2, $T^2 \# ... \# T^2$ e $P^2 \# ... \# P^2$ são topologicamente distintos;
- A característica de Euler junto com a orientação de uma superfície identificam-na univocamente em termos topológicos;
- Não foram consideradas superfícies com bordo.

Outras dimensões

- Em dimensão 1 existe apenas uma variedade compacta: S^1;

Outras dimensões

- Em dimensão 1 existe apenas uma variedade compacta: S^1;
- Em dimensões ≥ 3 a classificação das variedades é um problema em aberto (mesmo havendo triangulações no caso tridimensional).

Bibliografia

- **Moise, Edwin E.**, *Geometric Topology in Dimensions 2 and 3*, Graduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag - Complexos Simpliciais e Teorema da Triangulação.
- **Lickorish, W. B. R.**, *Simplicial Moves on Complexes and Manifolds*, Geometry & Topology Monographs, Volume 2, pp:299-320 - Teoria Estelar
- **Munkres, J. R.**, *Topology*, 2*nd* edition, Prentice Hall - Teorema da Classificação