Notas Lisboa 1

—

Motivação

$$x^2 + y^2 = z^2$$

Achar soluções naturais, tal que $gcd(x, y, z) = 1$.
Exemplos: (3,4,5), (5,12,13)....
Perguntas: Existem infinitos? Existe uma formula?
De fato, se $0 < m < n$ tq $gcd(m, n) = 1$ então a solução é

$$(n^2 - m^2, 2mn, n^2 + m^2)$$

ou (divida por 2...)
Varios exemplos usando $(n, m) = (1, 2), (1, 3), ...$
E se temos $3x^2 + 2y^2 = 5z^2$? (p.ex. 1,1,1)
E q tal $7x^2 \pm 23y^2 = 15z^2$?
Observação: no caso $-$ nao ha solucoes mod 3 (exercicio). Mas no caso $+$ existe! (4,1,3).
Veremos que existe pelo menos uma solucao.... Existencia é dada por teoria dos números. Porém, obter uma fórmula (que implica existencia) é dada por geometria (algébrica) e daí segue a infinidade de soluções por um argumento standard. Mas precisamos obter UMA solução primeiro.

1 Truque Geométrico

No caso pitagórico, poderíamos trabalhar com racionais:

$$(x/z)^2 + (y/z)^2 = 1.$$

Ou $u^2 + v^2 = 1$, com u, v racionais. Mas isto é a equação do círculo!!! E daí seguem várias soluções no "olhomêtro". Na verdade, queremos achar $\mathbb{Q}$-pontos no círculo.
Método 1: Usar angulos.
Metodo 2: Fixe (-1,0), e considere linhas que passam por esse ponto e inclinacao t e intersecte com o circulo. Exemplos....

Lema 1.1. *$t \in \mathbb{Q}$ se e so se $(u(t), v(t))$ é um $\mathbb{Q}$-ponto.*

Demonstração. A volta eh facil.

A ida se baseia em observar que a equação da reta eh

$$\frac{v-0}{u-(-1)} = t$$

Agora substitua na equação do círculo, obtendo

$$u^2 + t(u+1)^2 = 1$$

É quadrática em relação a t. As soluções são u-coordenadas da interseção. Uma das raízes eh -1, por construção. Mas se $t \in \mathbb{Q}$ então commo eh um polinomio quadratico, com coef inteiros e com uma raiz racional, entao a outra raiz eh racional! Pois a soma eh essencialmente o coeficiente linear. Assim $u \in \mathbb{Q}$. Mas

$$v = t(u+1)$$

E dai segue que $v \in \mathbb{Q}$ pois $t \in \mathbb{Q}$. □

Observe que o lema usou fortemente que a equacao eh quadratica! E se fosse cubica? Note tambem que a escolha do ponto inicial foi bem esperta....

Como calcular u e v na moral? Lembre que a equacao era

$$u^2 + (t(u+1))^2 = 1$$

Ou

$$(1+t^2)u^2 + 2t^2u + (t^2-1) = 0$$

Divida por (t^2+1). Como uma solucao eh -1, o polinomio tem que ser divisivel por $(u+1)$. Logo o outro fator eh $(u-u(t))$ e a soma tem que ser

$$-1 + u(t) = -2t^2/(1+t^2).$$

Dai segue

$$u(t) = (1-t^2)/(1+t^2)$$

E portanto $v(t) = 2t/(1+t^2)$

O ponto chave é que essa "parametrizacao" funciona em qualquer corpo (caracteristica diferente de 2) (precisamos dividir!).

No caso inteiro, usamos $t = m/n$ (p.ex. $0 < m < n$ e primos entre si). Substituindo temos

$$(1-(m/n)^2/(1+(m/n)^2), 2(m/n)/(1+(m/n)^2))$$

racionalize e obtemos a formula pitagorica inicial. De fato, obtemos a formula para (x, y, z), a menos de pedir primitividade.

2 Generalizacoes

Vamos analisar a robustez do metodo.

Primeiro: Podemos escolher qualquer ponto base (pelo menos.. em $\mathbb{Q}$... nao use $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$...)!!!

Comece por $(3/5, 4/5)$. Bem.. a equacao das retas fica mais chatinha, por isso é o exercício 2 :-D. Em teoria funciona, so que as contas ficam chatas. Observe que $(-1, 0)$ pode ser ”ruim”para outra equação.

Exemplos: $x^2 - 2y^2 = z^2$, vira a hiperbole $u^2 - 2v^1 = 1$.

Agora $3x^2 + 2y^2 = 5z^2$ vira $3u^2 + 2y^2 = 5$.Vira uma elipse meio bizarra, mas e daí, sabemos que $(1, 1)$ está la. E sai uma formula bizarra q nao anotei :-D. Mas eh so fazer as contas. Novamente eh Homework!

No fim, se ve que funcona pra qualquer curva $au^2 + bv^2 = 1$. DESDE que encontre um ponto racional la dentro.

Nem sempre da... $u^2 + v^3 = 3$ não funciona. De fato, podem ocorrer obstrucoes vindo de congruencias (MAS sao as unicas obstrucoes!).