À procura de progressões aritméticas

Sérgio Dias

2º ano da Licenciatura em Matemática

6.9.2008

Teorema de van der Waerden

Teorema (van der Waerden, 1927)

Se fizermos uma partição arbitrária dos naturais em duas classes, então pelo menos uma das classes contém uma progressão aritmética (PA) tão longa quanto se queira.

Teorema de van der Waerden

Teorema (van der Waerden, 1927)

Se fizermos uma partição arbitrária dos naturais em duas classes, então pelo menos uma das classes contém uma progressão aritmética (PA) tão longa quanto se queira.

O teorema admite uma generalização:

Teorema

$\forall k, l \in \mathbb{N}, \ \ \exists W(l,k): \ \ se \ \ [1, W(l,k)]$ *for dividido em* l *classes, então pelo menos uma das classes contém uma PA de comprimento* k.

Casos triviais

- $\forall l, \quad W(l,1) = 1$

Casos triviais

- $\forall l, \quad W(l,1) = 1$
- $\forall k, \quad W(1,k) = k$

Casos triviais

- $\forall l, \quad W(l,1) = 1$
- $\forall k, \quad W(1,k) = k$
- $\forall l, \quad W(l,2) = l+1$

$W(2,3) \leq 325$

$W(2,3) \leq 325$

Dividimos [1,325] em blocos de 5 elementos, ou seja, 65 blocos.

- Cada elemento foi colorido com uma de duas cores, digamos azul e vermelho.

$W(2,3) \leq 325$

Dividimos [1,325] em blocos de 5 elementos, ou seja, 65 blocos.

- Cada elemento foi colorido com uma de duas cores, digamos azul e vermelho.
- Temos $2^5 = 32$ padrões diferentes para colorir os blocos.

$W(2,3) \leq 325$

Dividimos [1,325] em blocos de 5 elementos, ou seja, 65 blocos.

- Cada elemento foi colorido com uma de duas cores, digamos azul e vermelho.
- Temos $2^5 = 32$ padrões diferentes para colorir os blocos.
- Pelo $Pigeon - Hole\ Principle$, nos primeiros 33 blocos há pelo menos dois com a mesma coloração, digamos B_i e B_{i+d}.

$W(2,3) \leq 325$

Dividimos [1,325] em blocos de 5 elementos, ou seja, 65 blocos.

- Cada elemento foi colorido com uma de duas cores, digamos azul e vermelho.
- Temos $2^5 = 32$ padrões diferentes para colorir os blocos.
- Pelo $Pigeon - Hole\ Principle$, nos primeiros 33 blocos há pelo menos dois com a mesma coloração, digamos B_i e B_{i+d}.
- Existem 2 elementos entre os 3 primeiros de B_i com a mesma cor, digamos a e $a+j$.

$W(2,3) \leq 325$

Dividimos [1,325] em blocos de 5 elementos, ou seja, 65 blocos.

- Cada elemento foi colorido com uma de duas cores, digamos azul e vermelho.
- Temos $2^5 = 32$ padrões diferentes para colorir os blocos.
- Pelo $Pigeon - Hole\ Principle$, nos primeiros 33 blocos há pelo menos dois com a mesma coloração, digamos B_i e B_{i+d}.
- Existem 2 elementos entre os 3 primeiros de B_i com a mesma cor, digamos a e $a + j$.
- $a + 2j \in B_i$.

$W(3,3) \leq 7(2.3^7+1)(2.3^{7(2.3^7+1)}+1)$

$W(3,3) \leq 7(2.3^7+1)(2.3^{7(2.3^7+1)}+1)$

- Usamos três cores: azul, vermelho e verde.

$W(3,3) \leq 7(2.3^7+1)(2.3^{7(2.3^7+1)}+1)$

- Usamos três cores: azul, vermelho e verde.
- Dividimos em $2.3^{7(2.3^7+1)}+1$ blocos de $7(2.3^7+1)$ elementos cada.

$W(3,3) \leq 7(2.3^7+1)(2.3^{7(2.3^7+1)}+1)$

- Usamos três cores: azul, vermelho e verde.
- Dividimos em $2.3^{7(2.3^7+1)}+1$ blocos de $7(2.3^7+1)$ elementos cada.
- Temos $3^{7(2.3^7+1)}$ padrões para colorir os blocos.

$W(3,3) \leq 7(2.3^7+1)(2.3^{7(2.3^7+1)}+1)$

- Usamos três cores: azul, vermelho e verde.
- Dividimos em $2.3^{7(2.3^7+1)}+1$ blocos de $7(2.3^7+1)$ elementos cada.
- Temos $3^{7(2.3^7+1)}$ padrões para colorir os blocos.
- Nos primeiros $3^{7(2.3^7+1)}+1$ blocos há dois com a mesma coloração, B_{i_1} e $B_{i_1+d_1}$.

$W(3,3) \leq 7(2.3^7+1)(2.3^{7(2.3^7+1)}+1)$

- Usamos três cores: azul, vermelho e verde.
- Dividimos em $2.3^{7(2.3^7+1)}+1$ blocos de $7(2.3^7+1)$ elementos cada.
- Temos $3^{7(2.3^7+1)}$ padrões para colorir os blocos.
- Nos primeiros $3^{7(2.3^7+1)}+1$ blocos há dois com a mesma coloração, B_{i_1} e $B_{i_1+d_1}$.
- Dividimos cada B_i em 2.3^7+1 sub-blocos $B_{i,j}$ de 7 elementos cada.

$W(3,3) \leq 7(2.3^7+1)(2.3^{7(2.3^7+1)}+1)$

- Usamos três cores: azul, vermelho e verde.
- Dividimos em $2.3^{7(2.3^7+1)}+1$ blocos de $7(2.3^7+1)$ elementos cada.
- Temos $3^{7(2.3^7+1)}$ padrões para colorir os blocos.
- Nos primeiros $3^{7(2.3^7+1)}+1$ blocos há dois com a mesma coloração, B_{i_1} e $B_{i_1+d_1}$.
- Dividimos cada B_i em 2.3^7+1 sub-blocos $B_{i,j}$ de 7 elementos cada.
- Temos 3^7 padrões para colorir cada $B_{i,j}$.

$W(3,3) \leq 7(2.3^7+1)(2.3^{7(2.3^7+1)}+1)$

- Usamos três cores: azul, vermelho e verde.
- Dividimos em $2.3^{7(2.3^7+1)}+1$ blocos de $7(2.3^7+1)$ elementos cada.
- Temos $3^{7(2.3^7+1)}$ padrões para colorir os blocos.
- Nos primeiros $3^{7(2.3^7+1)}+1$ blocos há dois com a mesma coloração, B_{i_1} e $B_{i_1+d_1}$.
- Dividimos cada B_i em 2.3^7+1 sub-blocos $B_{i,j}$ de 7 elementos cada.
- Temos 3^7 padrões para colorir cada $B_{i,j}$.
- Nos primeiros 3^7+1 sub-blocos de B_{i_1} há dois com a mesma coloração, B_{i_1,i_2} e B_{i_1,i_2+d_2}.

$W(3,3) \leq 7(2.3^7+1)(2.3^{7(2.3^7+1)}+1)$

- Usamos três cores: azul, vermelho e verde.
- Dividimos em $2.3^{7(2.3^7+1)}+1$ blocos de $7(2.3^7+1)$ elementos cada.
- Temos $3^{7(2.3^7+1)}$ padrões para colorir os blocos.
- Nos primeiros $3^{7(2.3^7+1)}+1$ blocos há dois com a mesma coloração, B_{i_1} e $B_{i_1+d_1}$.
- Dividimos cada B_i em 2.3^7+1 sub-blocos $B_{i,j}$ de 7 elementos cada.
- Temos 3^7 padrões para colorir cada $B_{i,j}$.
- Nos primeiros 3^7+1 sub-blocos de B_{i_1} há dois com a mesma coloração, B_{i_1,i_2} e B_{i_1,i_2+d_2}.
- Nos primeiros 4 elementos de B_{i_1,i_2} pelo menos dois têm a mesma cor, digamos i_3 e i_3+d_3.

Teorema de van der Waerden - demonstração

Já vimos que $\forall k \in \mathbb{N}, \quad W(k, 2) = k + 1$.

Vamos usar indução sobre l: assumimos que o teorema é válido para algum $l \geq 2$ e para todo k. Queremos mostrar que o teorema é válido para $l + 1$ e, naturalmente, para todo k.

Teorema de van der Waerden - demonstração

Já vimos que $\forall k \in \mathbb{N}, \quad W(k,2) = k+1.$

Vamos usar indução sobre l: assumimos que o teorema é válido para algum $l \geq 2$ e para todo k. Queremos mostrar que o teorema é válido para $l+1$ e, naturalmente, para todo k.

Definam-se:

$$\begin{aligned} q_0 &= 1, & n_0 &= W(k,l) \\ q_1 &= 2n_0 q_0, & n_1 &= W(k^{q_1},l) \\ q_2 &= 2n_1 q_1, & n_2 &= W(k^{q_2},l) \\ & \vdots & & \\ q_s &= 2n_{s-1} q_{s-1}, & n_s &= W(k^{q_s},l) \end{aligned}$$

Teorema de van der Waerden - demonstração

Vamos mostrar que para $W(k, l+1)$ basta tomar q_k.

Teorema de van der Waerden - demonstração

Vamos mostrar que para $W(k, l+1)$ basta tomar q_k.
Para isso temos que exibir uma forma de encontrar uma PA de comprimento $l+1$ numa das k classes em que q_k é arbitrariamente dividido.

Teorema de van der Waerden - demonstração

Vamos mostrar que para $W(k, l+1)$ basta tomar q_k.
Para isso temos que exibir uma forma de encontrar uma PA de comprimento $l+1$ numa das k classes em que q_k é arbitrariamente dividido.

- Suponhamos então que um segmento Δ, tal que $|\Delta| = q_k$, é dividido em k classes.

Teorema de van der Waerden - demonstração

Vamos mostrar que para $W(k, l+1)$ basta tomar q_k.
Para isso temos que exibir uma forma de encontrar uma PA de comprimento $l+1$ numa das k classes em que q_k é arbitrariamente dividido.

- Suponhamos então que um segmento Δ, tal que $|\Delta| = q_k$, é dividido em k classes.
- Dividimos Δ em $2n_{k-1}$ subsegmentos de comprimento q_{k-1}: $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_{2n_{k-1}}$.

Teorema de van der Waerden - demonstração

Vamos mostrar que para $W(k, l+1)$ basta tomar q_k.
Para isso temos que exibir uma forma de encontrar uma PA de comprimento $l+1$ numa das k classes em que q_k é arbitrariamente dividido.

- Suponhamos então que um segmento Δ, tal que $|\Delta| = q_k$, é dividido em k classes.
- Dividimos Δ em $2n_{k-1}$ subsegmentos de comprimento q_{k-1}: $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_{2n_{k-1}}$.
- Cada Δ_i tem um dos $k^{q_{k-1}}$ tipos possíveis.

Teorema de van der Waerden - demonstração

Vamos mostrar que para $W(k, l+1)$ basta tomar q_k.
Para isso temos que exibir uma forma de encontrar uma PA de comprimento $l+1$ numa das k classes em que q_k é arbitrariamente dividido.

- Suponhamos então que um segmento Δ, tal que $|\Delta| = q_k$, é dividido em k classes.
- Dividimos Δ em $2n_{k-1}$ subsegmentos de comprimento q_{k-1}: $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_{2n_{k-1}}$.
- Cada Δ_i tem um dos $k^{q_{k-1}}$ tipos possíveis.
- A primeira metade de Δ contém n_{k-1} subsegmentos.

Teorema de van der Waerden - demonstração

Vamos mostrar que para $W(k, l+1)$ basta tomar q_k.
Para isso temos que exibir uma forma de encontrar uma PA de comprimento $l+1$ numa das k classes em que q_k é arbitrariamente dividido.

- Suponhamos então que um segmento Δ, tal que $|\Delta| = q_k$, é dividido em k classes.
- Dividimos Δ em $2n_{k-1}$ subsegmentos de comprimento q_{k-1}: $\Delta_1, \Delta_2, ..., \Delta_{2n_{k-1}}$.
- Cada Δ_i tem um dos $k^{q_{k-1}}$ tipos possíveis.
- A primeira metade de Δ contém n_{k-1} subsegmentos.
- A primeira metade de Δ contém uma PA de comprimento l constituída por estes segmentos, todos do mesmo tipo (por hipótese de indução).

Teorema de van der Waerden - demonstração

Temos $\Delta_1 \approx \Delta_2 \approx \dots \approx \Delta_l$.

Teorema de van der Waerden - demonstração

Temos $\Delta_1 \approx \Delta_2 \approx ... \approx \Delta_l$.

Repetimos o processo:

- Fixamos $i_1 \in 1, 2, ..., l$ e dividimos Δ_{i_1} em subsegmentos de q_{k-2} elementos, ou seja, $2n_{k-2}$ subsegmentos.

Teorema de van der Waerden - demonstração

Temos $\Delta_1 \approx \Delta_2 \approx ... \approx \Delta_l$.

Repetimos o processo:

- Fixamos $i_1 \in 1, 2, ..., l$ e dividimos Δ_{i_1} em subsegmentos de q_{k-2} elementos, ou seja, $2n_{k-2}$ subsegmentos.
- Na primeira metade deles, existe uma PA de comprimento l em que todos os elementos (subsegmentos) são do mesmo tipo.

Teorema de van der Waerden - demonstração

Temos $\Delta_1 \approx \Delta_2 \approx ... \approx \Delta_l$.

Repetimos o processo:

- Fixamos $i_1 \in 1, 2, ..., l$ e dividimos Δ_{i_1} em subsegmentos de q_{k-2} elementos, ou seja, $2n_{k-2}$ subsegmentos.
- Na primeira metade deles, existe uma PA de comprimento l em que todos os elementos (subsegmentos) são do mesmo tipo.
- Seleccionamos, nos restantes Δ_i, $l+1$ subsegmentos nas mesmas posições que os subsegmentos de Δ_{i_1}.

Teorema de van der Waerden - demonstração

O processo pode continuar e no passo k obtemos segmentos com comprimento $q_0 = 1$, ou seja, elementos do segmento Δ inicial, mas vamos continuar a denotá-los como até agora:

$$\Delta_{i_1, i_2, \ldots, i_k}, \;\; 1 \leq i_1, i_2, \ldots, i_k \leq l + 1.$$

Teorema de van der Waerden - demonstração

O processo pode continuar e no passo k obtemos segmentos com comprimento $q_0 = 1$, ou seja, elementos do segmento Δ inicial, mas vamos continuar a denotá-los como até agora:

$$\Delta_{i_1, i_2, \dots, i_k}, \quad 1 \leq i_1, i_2, \dots, i_k \leq l + 1.$$

Considerem-se agora os seguintes $k + 1$ números:

$$\begin{cases} a_0 = \Delta_{l+1, l+1, \dots, l+1} \\ a_1 = \Delta_{1, l+1, \dots, l+1} \\ a_2 = \Delta_{1, 1, \dots, l+1} \\ \vdots \\ a_k = \Delta_{1, 1, \dots, 1} \end{cases}$$

Teorema de van der Waerden - demonstração

Como temos $k+1$ números e apenas k classes então dois deles, a_r e a_s, são do mesmo tipo.

Teorema de van der Waerden - demonstração

Como temos $k+1$ números e apenas k classes então dois deles, a_r e a_s, são do mesmo tipo.

Considerem-se agora os $l+1$ números:

$$c_i = \Delta_{\underbrace{1,...,1}_{r},\underbrace{i,...,i}_{s-r},\underbrace{l+1,...l+1}_{k-s}}, \quad 1 \leq i \leq l+1$$

Teorema de van der Waerden - demonstração

Como temos $k+1$ números e apenas k classes então dois deles, a_r e a_s, são do mesmo tipo.

Considerem-se agora os $l+1$ números:

$$c_i = \Delta_{\underbrace{1,\ldots,1}_{r},\underbrace{i,\ldots,i}_{s-r},\underbrace{l+1,\ldots l+1}_{k-s}}, \quad 1 \leq i \leq l+1$$

- Os l primeiros elementos deste grupo são claramente do mesmo tipo.

Teorema de van der Waerden - demonstração

Como temos $k+1$ números e apenas k classes então dois deles, a_r e a_s, são do mesmo tipo.

Considerem-se agora os $l+1$ números:

$$c_i = \Delta_{\underbrace{1,\ldots,1}_{r},\underbrace{i,\ldots,i}_{s-r},\underbrace{l+1,\ldots l+1}_{k-s}}, \quad 1 \leq i \leq l+1$$

- Os l primeiros elementos deste grupo são claramente do mesmo tipo.
- O último ($i = l+1$) é a_r e, portanto, é do mesmo tipo que o primeiro ($i = 1$), a_s; consequentemente, é do mesmo tipo que todos os outros.

Teorema de van der Waerden - demonstração

Resta provar que estão em progressão aritmética, ie, que $c_{i+1} - c_i$ não depende de i e, portanto, é constante.

Teorema de van der Waerden - demonstração

Resta provar que estão em progressão aritmética, ie, que $c_{i+1} - c_i$ não depende de i e, portanto, é constante.
Seja $i' = i + 1$.
Seja ainda

$$c_{i,m} = \Delta_{\underbrace{1,\ldots,1}_{r},\underbrace{i',\ldots,i'}_{m},\underbrace{i,\ldots,i}_{s-r-m},\underbrace{l+1,\ldots l+1}_{k-s}}$$

Teorema de van der Waerden - demonstração

Resta provar que estão em progressão aritmética, ie, que $c_{i+1} - c_i$ não depende de i e, portanto, é constante.
Seja $i' = i + 1$.
Seja ainda

$$c_{i,m} = \Delta_{\underbrace{1, ..., 1}_{r}, \underbrace{i', ..., i'}_{m}, \underbrace{i, ..., i}_{s-r-m}, \underbrace{l+1, ... l+1}_{k-s}}$$

e então temos:

$$\begin{aligned} c_{i,0} &= c_i \\ c_{i,s-r} &= c_{i+1} \end{aligned}$$

Teorema de van der Waerden - demonstração

Resta provar que estão em progressão aritmética, ie, que $c_{i+1} - c_i$ não depende de i e, portanto, é constante.
Seja $i' = i + 1$.
Seja ainda

$$c_{i,m} = \Delta_{\underbrace{1,\ldots,1}_{r},\underbrace{i',\ldots,i'}_{m},\underbrace{i,\ldots,i}_{s-r-m},\underbrace{l+1,\ldots l+1}_{k-s}}$$

e então temos:

$$c_{i,0} = c_i$$
$$c_{i,s-r} = c_{i+1}$$

Assim,

$$c_{i+1} - c_i = \sum_{m=1}^{s-r} (c_{i,m} - c_{i,m-1})$$

Teorema de van der Waerden - demonstração

Notemos que $\Delta_{i_1,\ldots,i_{s-1},i_s}$ e $\Delta_{i_1,\ldots,i_s+1}$ são subsegmentos consecutivos no passo s da construção e, portanto, quaisquer que sejam $1 \leq i_{s+1}, \ldots, i_k \leq l+1$ os números $\Delta_{i_1,\ldots,i_{s-1},i_s,i_{s+1},\ldots,i_k}$ e $\Delta_{i_1,\ldots,i_{s-1},i_s+1,i_{s+1},\ldots,i_k}$ ocupam a mesma posição nos tais segmentos e temos

$$\Delta_{i_1,\ldots,i_{s-1},i_s+1,i_{s+1},\ldots,i_k} - \Delta_{i_1,\ldots,i_{s-1},i_s,i_{s+1},\ldots,i_k} = d_s.$$

Teorema de van der Waerden - demonstração

Portanto,

$$c_{i,m} - c_{i,m-1} =$$

$$= \Delta_{\underbrace{1,\ldots,1}_{r},\underbrace{i+1,\ldots,i+1}_{m},\underbrace{i,\ldots,i}_{s-r-m},\underbrace{l+1,\ldots l+1}_{k-s}} -$$

$$- \Delta_{\underbrace{1,\ldots,1}_{r},\underbrace{i+1,\ldots,i+1}_{m-1},\underbrace{i,\ldots,i}_{s-r-m+1},\underbrace{l+1,\ldots l+1}_{k-s}} = d_{r+m}.$$

Então,

$$c_{i+1} - c_i = d_{r+1} + d_{r+2} + \ldots + d_s, \text{ que é independente de } i. \quad \square$$