Nós em Grafos

Novos Talentos em Matemática

Joel Moreira

5 de Setembro de 2008

Definição

Definição

Chamamos **enlace** a um conjunto finito de curvas fechadas suaves em $\mathbb{R}^3$.

Definição

Definição

Chamamos **enlace** a um conjunto finito de curvas fechadas suaves em $\mathbb{R}^3$.

- Dois enlaces dizem-se equivalentes se um pode ser deformado no outro por uma isotopia ambiente.
- Um enlace de uma única componente chama-se nó.

Definição

Definição

Chamamos **enlace** a um conjunto finito de curvas fechadas suaves em $\mathbb{R}^3$.

- Dois enlaces dizem-se equivalentes se um pode ser deformado no outro por uma isotopia ambiente.
- Um enlace de uma única componente chama-se nó.

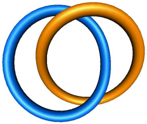


Figura: Anéis de Hopf

Figura: Nó trevo

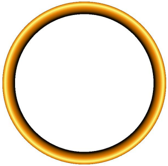
Enlaces e nós triviais

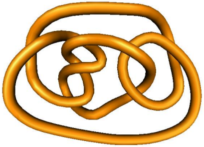
Um nó trivial é equivalente a uma circunferência.

Exemplos de nós triviais

Enlaces e nós triviais

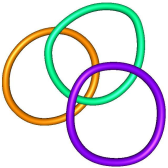
Um nó trivial é equivalente a uma circunferência.

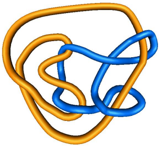




Exemplos de nós triviais

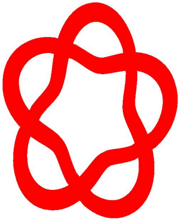
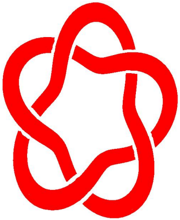
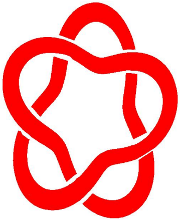
Um enlace diz-se trivial se cada componente limita um disco no complementar do enlace.





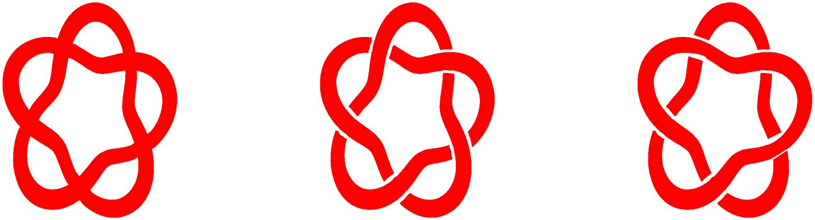
Exemplos de enlaces triviais

Projecções regulares de enlaces

No arco que passa por baixo interrompe-se o traço.

Projecções regulares de enlaces



No arco que passa por baixo interrompe-se o traço.

Definição

Uma projecção diz-se **regular** se não houver dois cruzamentos sobrepostos no mesmo ponto do plano.

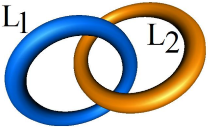
Teorema

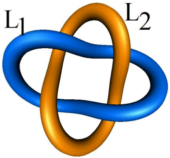
Todo o enlace é equivalente a um que tenha uma projecção regular.

Invariantes

Definição

$Nl(L_1, L_2) \in \mathbb{Z}_2$ é o número de vezes que L_1 se sobrepõe a L_2

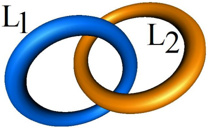


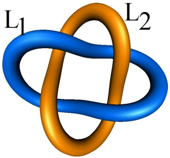


Invariantes

Definição

$Nl(L_1, L_2) \in \mathbb{Z}_2$ é o número de vezes que L_1 se sobrepõe a L_2

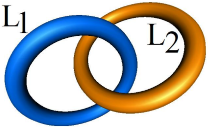


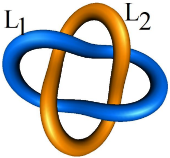


O invariante de arf de um nó N, $\alpha(N) \in \mathbb{Z}_2$ verifica $\alpha(\bigcirc) = 0$.

Definição

$NI(L_1, L_2) \in \mathbb{Z}_2$ é o número de vezes que L_1 se sobrepõe a L_2

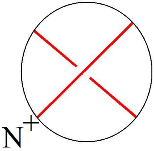


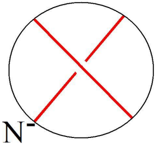


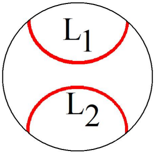
O invariante de arf de um nó N, $\alpha(N) \in \mathbb{Z}_2$ verifica $\alpha(\bigcirc) = 0$.

Teorema

$$\alpha(N^+) - \alpha(N^-) = NI(L_1, L_2).$$







Definição

Um **mergulho de um grafo** é uma função dos seus vértices em pontos de $\mathbb{R}^3$ e das arestas em curvas suaves que unem as imagens dos vértices correspondentes.

Mergulho de Grafos

Definição

Um **mergulho de um grafo** é uma função dos seus vértices em pontos de $\mathbb{R}^3$ e das arestas em curvas suaves que unem as imagens dos vértices correspondentes.

Observações

- *Dois mergulhos do mesmo grafo dizem-se equivalentes se um pode ser deformado no outro por uma isotopia ambiente.*

Mergulho de Grafos

Definição

Um **mergulho de um grafo** é uma função dos seus vértices em pontos de $\mathbb{R}^3$ e das arestas em curvas suaves que unem as imagens dos vértices correspondentes.

Observações

- *Dois mergulhos do mesmo grafo dizem-se equivalentes se um pode ser deformado no outro por uma isotopia ambiente.*
- *Todo o conjunto de ciclos disjuntos forma um enlace.*

Mergulho de Grafos

Definição

Um **mergulho de um grafo** é uma função dos seus vértices em pontos de $\mathbb{R}^3$ e das arestas em curvas suaves que unem as imagens dos vértices correspondentes.

Observações

- *Dois mergulhos do mesmo grafo dizem-se equivalentes se um pode ser deformado no outro por uma isotopia ambiente.*
- *Todo o conjunto de ciclos disjuntos forma um enlace.*
- *Em dois mergulhos equivalentes de um grafo, os dois enlaces formado por um conjunto fixo de ciclos disjuntos são equivalentes.*

Mergulho de Grafos

Definição

Um **mergulho de um grafo** é uma função dos seus vértices em pontos de $\mathbb{R}^3$ e das arestas em curvas suaves que unem as imagens dos vértices correspondentes.

Observações

- *Dois mergulhos do mesmo grafo dizem-se equivalentes se um pode ser deformado no outro por uma isotopia ambiente.*
- *Todo o conjunto de ciclos disjuntos forma um enlace.*
- *Em dois mergulhos equivalentes de um grafo, os dois enlaces formado por um conjunto fixo de ciclos disjuntos são equivalentes.*

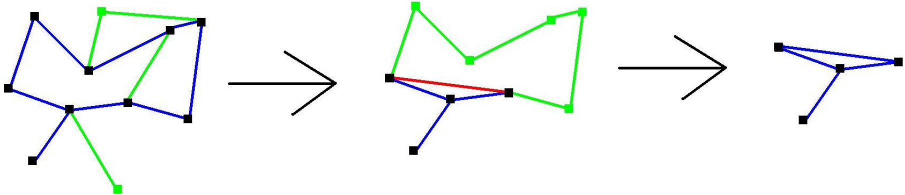
Teorema

Todo o mergulho de um grafo é equivalente a um que tenha uma projecção regular no plano.

Menor minimal

Definição

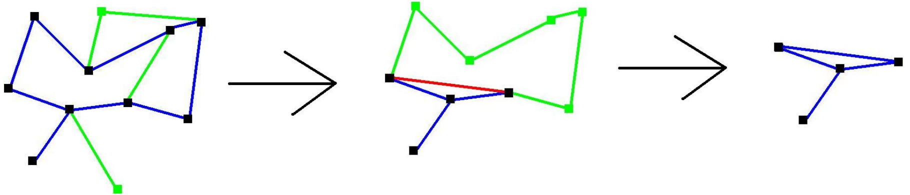
O grafo *A* diz-se um **menor** do grafo *B* se *A* pode ser obtido de um subgrafo de *B* por contracções de arestas.



Menor minimal

Definição

O grafo A diz-se um **menor** do grafo B se A pode ser obtido de um subgrafo de B por contracções de arestas.



Definição

O grafo A diz-se um **menor minimal** relativamente à propriedade P se A verifica P e nenhum menor próprio de A verifica P.

Por exemplo o K_5 é não planar menor minimal

O Problema

Definição

- Um grafo diz-se **intrinsecamente atado** quando qualquer seu mergulho em $\mathbb{R}^3$ contém um ciclo que forma um nó não trivial.
- Um grafo diz-se **intrinsecamente enlaçado** quando qualquer seu mergulho em $\mathbb{R}^3$ contém um par de ciclos disjuntos que formam um enlace não trivial.

O Problema

Definição

- Um grafo diz-se **intrinsecamente atado** quando qualquer seu mergulho em $\mathbb{R}^3$ contém um ciclo que forma um nó não trivial.
- Um grafo diz-se **intrinsecamente enlaçado** quando qualquer seu mergulho em $\mathbb{R}^3$ contém um par de ciclos disjuntos que formam um enlace não trivial.

Problema

- *Encontrar todos os grafos intrinsecamente atados menor minimais.*
- *Encontrar todos os grafos intrinsecamente enlaçados menor minimais.*

Não planar +1

Teorema

Seja G um grafo não planar. Então $G + 1$ é intrinsecamente enlaçado.

Não planar +1

Teorema

Seja G um grafo não planar. Então $G+1$ é intrinsecamente enlaçado.

Lema

Os grafos $K_6 = K_5 + 1$ e $K_{3,3,1} = K_{3,3} + 1$ são intrinsecamente enlaçados.

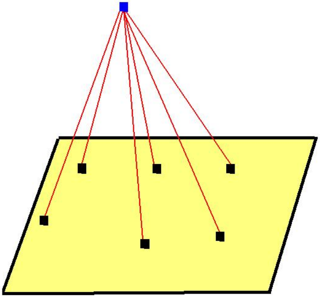
Não planar +1

Teorema

Seja G um grafo não planar. Então $G + 1$ é intrinsecamente enlaçado.

Lema

Os grafos $K_6 = K_5 + 1$ e $K_{3,3,1} = K_{3,3} + 1$ são intrinsecamente enlaçados.



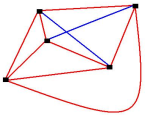
Demonstração do lema

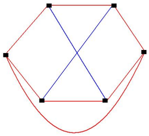
Basta estudar as projecções no plano de K_5 e $K_{3,3}$

Projecções com um único cruzamento

Demonstração do lema

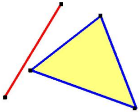
Basta estudar as projecções no plano de K_5 e $K_{3,3}$

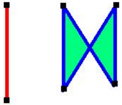




Projecções com um único cruzamento

O conjunto das arestas não adjacentes a uma aresta dada forma um ciclo, em ambos os casos.





A paridade do número total de cruzamentos entre pares de arestas não adjacentes não é alterada.

Demonstração do teorema

Seja V o vértice do topo.

- Assim há uma aresta a que passa um número ímpar de vezes por baixo da curva f formada pelas arestas não adjacentes.
- $a + V$ formam um ciclo triangular que verifica $NI(a + V, f) = 1$.

Demonstração do teorema

Seja V o vértice do topo.

- Assim há uma aresta a que passa um número ímpar de vezes por baixo da curva f formada pelas arestas não adjacentes.
- $a + V$ formam um ciclo triangular que verifica $Nl(a + V, f) = 1$.

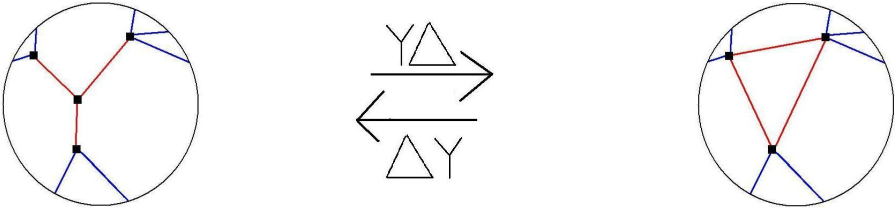
No caso geral do teorema:

- Escolhemos o subgrafo S de G que origina o menor K_5 ou $K_{3,3}$
- Conseguimos achar um caminho aberto A e um ciclo fechado F tais que A passa um número ímpar de vezes por baixo de F.
- Assim $Nl(A + V, F) = 1$ e temos um enlace não trivial.

Operações ΔY e $Y\Delta$

Definição

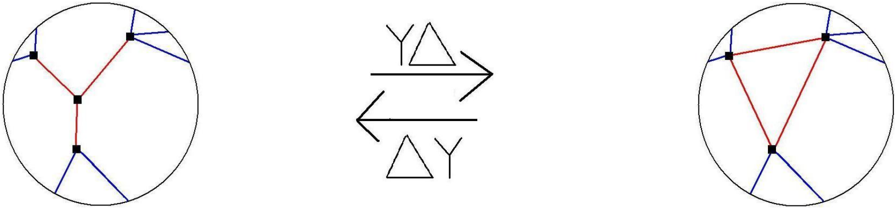
Seja V um vértice de grau 3. Remover V e adicionar três arestas para formar um triângulo é uma operação $Y\Delta$ e a operação inversa ΔY.



Operações ΔY e $Y\Delta$

Definição

Seja V um vértice de grau 3. Remover V e adicionar três arestas para formar um triângulo é uma operação $Y\Delta$ e a operação inversa ΔY.



Teorema (Motwani, Raghunathan e Saran, 1988)

Se G' é obtido de G por uma operação ΔY e G é intrinsecamente atado (enlaçado) então G' é intrinsecamente atado (enlaçado).

A família de Peterson

Definição

Um grafo diz-se da família de Peterson se pode ser obtido do K_6 por operações ΔY ou $Y\Delta$.

Há 7 desses grafos, incluindo o de Peterson, o K_6 e o $K_{3,3,1}$.

A família de Peterson

Definição

Um grafo diz-se da família de Peterson se pode ser obtido do K_6 por operações ΔY ou $Y\Delta$.

Há 7 desses grafos, incluindo o de Peterson, o K_6 e o $K_{3,3,1}$.

Teorema (Robertson, Seymour e Thomas, 1993)

Um grafo é intrinsecamente enlaçado se e só se contém um menor na família de Peterson.

Este teorema resolve o problema de achar todos os grafos intrinsecamente enlaçados menor minimais, que são os da família de Peterson.

K_7 intrinsecamente atado

Teorema (Conway e Gordon, 1983)

K_7 é intrinsecamente atado.

Teorema (Conway e Gordon, 1983)

K_7 é intrinsecamente atado.

Seja $S = \sum \alpha(c)$ onde a soma corre todos os ciclos hamiltonianos de K_7 e $\alpha(c)$ é o invariante de arf.

K_7 intrinsecamente atado

Teorema (Conway e Gordon, 1983)

K_7 é intrinsecamente atado.

Seja $S = \sum \alpha(c)$ onde a soma corre todos os ciclos hamiltonianos de K_7 e $\alpha(c)$ é o invariante de arf.

Provamos que, projectando o mergulho, mudar um cruzamento não altera S usando que $\alpha(N^+) - \alpha(N^-) = NI(L_1, L_2) = \sum \omega(a_i, b_j)$, onde $\omega(a_i, b_j) \in \mathbb{Z}_2$ é o número de vezes que a_i passa por cima de b_j.

Teorema (Conway e Gordon, 1983)

K_7 é intrinsecamente atado.

Seja $S = \sum \alpha(c)$ onde a soma corre todos os ciclos hamiltonianos de K_7 e $\alpha(c)$ é o invariante de arf.

Provamos que, projectando o mergulho, mudar um cruzamento não altera S usando que $\alpha(N^+) - \alpha(N^-) = NI(L_1, L_2) = \sum \omega(a_i, b_j)$, onde $\omega(a_i, b_j) \in \mathbb{Z}_2$ é o número de vezes que a_i passa por cima de b_j.

Na soma total, cada $\omega(a_i, b_j)$ aparece um número par de vezes.

Teorema (Conway e Gordon, 1983)

K_7 é intrinsecamente atado.

Seja $S = \sum \alpha(c)$ onde a soma corre todos os ciclos hamiltonianos de K_7 e $\alpha(c)$ é o invariante de arf.

Provamos que, projectando o mergulho, mudar um cruzamento não altera S usando que $\alpha(N^+) - \alpha(N^-) = NI(L_1, L_2) = \sum \omega(a_i, b_j)$, onde $\omega(a_i, b_j) \in \mathbb{Z}_2$ é o número de vezes que a_i passa por cima de b_j.

Na soma total, cada $\omega(a_i, b_j)$ aparece um número par de vezes.

Vendo uma imersão arbitrária de K_7 verifica-se que $S = 1$.

Teorema de Foisy

Teorema (Joel Foisy, 2002)

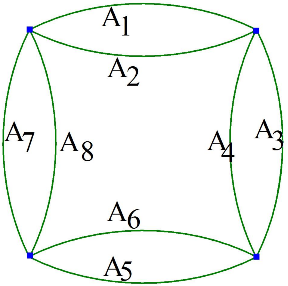
$K_{3,3,1,1}$ *é intrinsecamente atado.*

Teorema (Joel Foisy, 2002)

$K_{3,3,1,1}$ é intrinsecamente atado.

Lema

O Grafo G apresentado na figura tem $S =: \sum \alpha(c) = 1$ se e só se $NI(L_1, L_3) = NI(L_2, L_4) = 1$



Cada L_i é o ciclo de comprimento 2 formado pelas arestas A_{2i-1} e A_{2i}.

Bibliografia

- J. Conway, e C. Gordon, *Knots and links in spatial graphs*, J. Graph Theory 7 (1983), 445-453.
- N. Robertson P. Seymour e R. Thomas *Linkless embeddings of graphs in 3-space*, Bulletin of the American Math. Soc., Vol 28, N.1 (1993) 84-89.
- J. Foisy, *Intrinsically knotted graphs*, J. Graphs Theory 39 (2002), 178-187.
- L. Kauffman, *Formal Knot Theory*, Mathematical Notes, 30, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1983.
- C. Adams, *Knot Book*, W. H. Freeman and Company, New York, 1994.