Partições de inteiros

Encontro de Novos Talentos em Matemática

João Guerreiro

6 de Setembro de 2008

O que é uma partição em inteiros?

Dado um inteiro $n \geq 0$ uma partição em inteiros de n é uma representação de n como uma soma (não ordenada) de inteiros positivos.

Partições de 5:

$$
\begin{array}{l}
5 \\
4+1 \\
3+2 \\
3+1+1 \\
2+2+1 \\
2+1+1+1 \\
1+1+1+1+1
\end{array}
$$

O que é uma partição em inteiros?

Dado um inteiro $n \geq 0$ uma partição em inteiros de n é uma representação de n como uma soma (não ordenada) de inteiros positivos.

Partições de 5:

$$
\begin{aligned}
&5\\
&4+1\\
&3+2\\
&3+1+1\\
&2+2+1\\
&2+1+1+1\\
&1+1+1+1+1
\end{aligned}
$$

Função partição

Definição

Para n ≥ 0,

$$p(n) \text{ representa o número de partições de n.}$$

Do exemplo anterior conclui-se que $p(5) = 7$.

Será que há uma fórmula para $p(n)$?

$$1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 7,\ 11,\ 15,\ 22,\ 30,\ 42$$

Fórmula

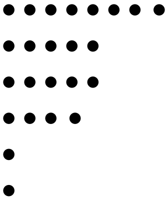
$$p(n) = \frac{1}{\pi\sqrt{2}} \sum_{k=1}^{\infty} A_k(n)\sqrt{k} \left[\frac{d}{dx} \frac{\sinh(\frac{\pi}{k}(\frac{2}{3}(x - \frac{1}{24}))^{1/2})}{(x - \frac{1}{24})^{1/2}} \right]_{x=n}$$

onde,

$$A_k(n) = \sum_{0 \leq h < k,\ (h,k)=1} exp \left(\pi i \sum_{j=1}^{k-1} \frac{j}{k} \left(\frac{hj}{k} - \left\lfloor \frac{hj}{k} \right\rfloor - \frac{1}{2} \right) - \frac{2\pi i h n}{k} \right)$$

Grafos de Ferrers

Os grafos de Ferrers são uma forma de representar partições.



representa a partição $7 + 5 + 5 + 4 + 1 + 1$.

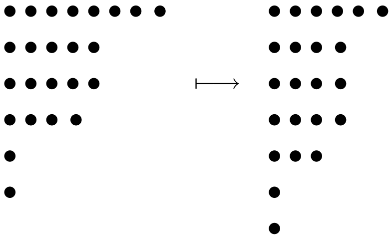
Exemplo

Teorema

$p(n| \leq m\ partes) = p(n|todas\ as\ partes \leq m)$

Demonstração

Fazendo corresponder a cada partição o seu conjugado prova-se facilmente o teorema.



Teorema de Euler

Teorema

$$p(n|partes\ distintas) = p(n|partes\ impares)$$

Demonstração

Juntando e separando as partes podemos relacionar as partições de ambos os conjuntos,

$$\begin{aligned} 8+5+2 &\to (4+4)+5+(1+1) \\ &\to (2+2)+(2+2)+5+1+1 \\ &\to 5+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1 \end{aligned}$$

Demonstração

Para $n = 7$ obtemos a seguinte bijecção,

$$\begin{aligned}
5+1+1 &\longmapsto 5+2\\
3+3+1 &\longmapsto 6+1\\
3+1+1+1+1 &\longmapsto 4+3\\
1+1+1+1+1+1+1 &\longmapsto 4+2+1
\end{aligned}$$

Funções geradoras

Para que servem as funções geradoras?

Se quisermos calcular todas as partições com exactamente duas partes ímpares < 6 basta fazer a seguinte multiplicação,

$$(q+q^3+q^5)(q+q^3+q^5) =$$
$$= q^{1+1}+q^{1+3}+q^{1+5}+q^{3+1}+q^{3+3}+q^{3+5}+q^{5+1}+q^{5+3}+q^{5+5} =$$
$$= q^2+2q^4+3q^6+2q^8+q^{10}$$

Funções geradoras

Para que servem as funções geradoras?

Se quisermos calcular todas as partições com exactamente duas partes ímpares < 6 basta fazer a seguinte multiplicação,

$$(q+q^3+q^5)(q+q^3+q^5) =$$
$$= q^{1+1}+q^{1+3}+q^{1+5}+q^{3+1}+q^{3+3}+q^{3+5}+q^{5+1}+q^{5+3}+q^{5+5} =$$
$$= q^2+2q^4+3q^6+2q^8+q^{10}$$

Um resultado de Euler

$$(1+q^1+q^2+\ldots)(1+q^2+q^4+\ldots)(1+q^3+q^6+\ldots)\ldots(1+q^k+q^{2k}+\ldots) =$$

$$= \sum_{n\geq 0} p(n)q^n$$

$$\frac{1}{1-q} \cdot \frac{1}{1-q^2} \cdot \frac{1}{1-q^3} \cdots \frac{1}{1-q^k} \cdots = \sum_{n\geq 0} p(n)q^n$$

$$\prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1-q^k} = \sum_{n\geq 0} p(n)q^n$$

Um resultado de Euler

$$(1+q^1+q^2+\ldots)(1+q^2+q^4+\ldots)(1+q^3+q^6+\ldots)\ldots(1+q^k+q^{2k}+\ldots) =$$

$$= \sum_{n\geq 0} p(n)q^n$$

$$\frac{1}{1-q}\cdot\frac{1}{1-q^2}\cdot\frac{1}{1-q^3}\cdots\frac{1}{1-q^k}\cdots = \sum_{n\geq 0} p(n)q^n$$

$$\prod_{k=1}^{\infty}\frac{1}{1-q^k} = \sum_{n\geq 0} p(n)q^n$$

Partições de um conjunto S

Podemos generalizar o resultado anterior para um conjunto S de naturais (finito ou infinito).

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} p(n|partes\ de\ S)q^n &= \prod_{i\in S}(1+q^i+q^{2i}+q^{3i}+\ldots)\\ &= \prod_{i\in S}\frac{1}{1-q^i}\end{aligned}$$

O polinómio acima desgina-se por função geradora das partições em partes de S.

Partições de um conjunto S

Outro tipo de partições cuja função geradora pode ser obtida são as partições em partes distintas.

$$\sum_{n=0}^{\infty} p(n|partes\ distintas\ de\ S)q^n = \prod_{i \in S}(1+q^i)$$

Teorema de Euler

Após a introdução das funções geradoras podemos reescrever o teorema de Euler:

Teorema

$\sum_{n=0}^{\infty} p(n|partes\ distintas)q^n = \sum_{n=0}^{\infty} p(n|partes\ impares)q^n$

Escolhendo o conjunto S como o conjunto dos naturais e dos ímpares, respectivamente:

$\sum_{n=0}^{\infty} p(n|partes\ distintas)q^n = \prod_{n=1}^{\infty}(1+q^n)$

$\sum_{n=0}^{\infty} p(n|partes\ impares)q^n = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1-q^{2n-1}}$

Demonstração

$$
\begin{aligned}
\prod_{n=1}^{\infty}(1+q^n) &= (1+q)(1+q^2)(1+q^3)\ldots \\
&= \left(\frac{1-q^2}{1-q}\right)\left(\frac{1-q^4}{1-q^2}\right)\left(\frac{1-q^6}{1-q^3}\right)\left(\frac{1-q^8}{1-q^4}\right)\ldots \\
&= \frac{1}{(1-q)(1-q^3)(1-q^5)\ldots} \\
&= \prod_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1-q^{2n-1}}
\end{aligned}
$$

Demonstração

$$
\begin{aligned}
\prod_{n=1}^{\infty}(1+q^n) &= (1+q)(1+q^2)(1+q^3)\ldots \\
&= \left(\frac{1-q^2}{1-q}\right)\left(\frac{1-q^4}{1-q^2}\right)\left(\frac{1-q^6}{1-q^3}\right)\left(\frac{1-q^8}{1-q^4}\right)\ldots \\
&= \frac{1}{(1-q)(1-q^3)(1-q^5)\ldots} \\
&= \prod_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1-q^{2n-1}}
\end{aligned}
$$

Demonstração

$$
\begin{aligned}
\prod_{n=1}^{\infty}(1+q^n) &= (1+q)(1+q^2)(1+q^3)\ldots \\
&= \left(\frac{1-q^2}{1-q}\right)\left(\frac{1-q^4}{1-q^2}\right)\left(\frac{1-q^6}{1-q^3}\right)\left(\frac{1-q^8}{1-q^4}\right)\cdots \\
&= \frac{1}{(1-q)(1-q^3)(1-q^5)\ldots} \\
&= \prod_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1-q^{2n-1}}
\end{aligned}
$$

Identidades de Rogers-Ramanujan

Teorema

$$p(n|partes\ 2-distintas) = p(n|partes\ \equiv \pm 1\ mod 5)$$

$$p(n|partes\ 2-distintas > 1) = p(n|partes\ \equiv \pm 2\ mod 5)$$

$p(n|partes\ 2-distintas)$

Note-se que a função geradora das partições de m partes 2-distintas pode ser escrita da forma seguinte:

$$\sum_{0\leq a_1\leq a_2\leq\ldots\leq a_m} q^{(1+a_1)+(3+a_2)+\ldots+(2m-1+a_m)} =$$

$$= q^{m^2}\sum_{0\leq a_1\leq a_2\leq\ldots\leq a_m} q^{a_1+a_2+\ldots+a_m} =$$

$$= q^{m^2}\sum_{0\leq a_1\leq a_2\leq\ldots\leq a_{m-1}} \frac{q^{a_1+a_2+\ldots+2a_{m-1}}}{1-q} =$$

$$= q^{m^2}\frac{1}{(1-q)(1-q^2)\ldots(1-q^m)}$$

$p(n|partes\ 2-distintas)$

Somando sobre a variável m obtém-se a função geradora destas partições,

$$\sum_{m=0}^{\infty} q^{m^2} \frac{1}{(1-q)(1-q^2)\ldots(1-q^m)}$$

$p(n|partes \equiv \pm 1 \ mod 5)$

Para o termo do lado direito da equação também podemos obter uma função geradora:

$$= \prod_{n=1}^{\infty}(1 + q^{5n-1} + q^{2(5n-1)} + ...)(1 + q^{5n-4} + q^{2(5n-4)} + ...) =$$

$$= \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1-q^{5n-1})(1-q^{5n-4})}$$

2a Identidade de Rogers-Ramanujan

Analogamente, as funções geradoras que ocorrem na 2a Id. de Rogers-Ramanujan são,

$$\sum_{m=0}^{\infty} q^{m^2+m} \frac{1}{(1-q)(1-q^2)\dots(1-q^m)}$$

$$\prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1-q^{5n-2})(1-q^{5n-3})}$$

As identidades

Teorema

$$\sum_{m=0}^{\infty} q^{m^2} \frac{1}{(1-q)\dots(1-q^m)} = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1-q^{5n-1})(1-q^{5n-4})}$$

$$\sum_{m=0}^{\infty} q^{m^2+m} \frac{1}{(1-q)\dots(1-q^m)} = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1-q^{5n-2})(1-q^{5n-3})}$$

Outras identidades 'à Ramanujan'

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} (-1)^m q^{m(3m-1)/2} = \prod_{n=1}^{\infty} (1-q^n)$$

$$\sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m q^{m(m+1)/2}(2m+1) = \prod_{n=1}^{\infty} (1-q^n)^3$$

$$\sum_{m=0}^{\infty} p(5n+4)q^m = \prod_{n=1}^{\infty} 5\frac{(1-q^{5n})^5}{(1-q)^6}$$

Conjectura de Alder

Tendo sido provado que,

$$p(n|partes\ 1-distintas) = p(n|partes \equiv \pm 1\ mod 4)$$
$$p(n|partes\ 2-distintas) = p(n|partes \equiv \pm 1\ mod 5)$$

Conjecturou-se,

$$p(n|partes\ d-distintas) = p(n|partes \equiv \pm 1\ mod(d+3))$$

que é falso para d>2.

Conjectura (Alder)

$$p(n|partes\ d-distintas) \geq p(n|partes \equiv \pm 1\ mod(d+3))$$

Outros problemas

- Será que $p(n)$ é primo para infinitos valores de n?
- Será que a razão entre valores pares e ímpares de $p(n)$ tende para 1?
- Será que, dados inteiros m e r, existem infinitas soluções da equação $p(n) \equiv r \ (mod \ m)$?

Bibliografia

- Andrews, G.E., Eriksson,K. (2004). *Integer Partitions*. Cambridge University Press
- Andrews, G.E. (1971). *On a partition problem of H. L. Alder*. Pac.J.Math. Vol. 36, No.2, 1971.
- Berndt, B.C. (2006). *Number Theory in the Spirit of Ramanujan*. American Mathematical Society
- Berndt, B.C., Ono, K. (1999) *Ramanujan's unpublished manuscript on the partition and tau functions with proofs and commentary* Sém. Lothar. Combin.