

Estabilidade e Inércia de Matrizes

Telmo Peixe

Departamento de Matemática da
Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa

Encontro Nacional
Lisboa, 7-8 de Setembro de 2007

Linhas Gerais da Apresentação

- Introdução
- Definições e Propriedades
- Algumas Notas Históricas
- Um Problema em Investigação
- Alguns Resultados

- **Introdução**
- Definições e Propriedades
- Algumas Notas Históricas
- Um Problema em Investigação
- Alguns Resultados

Linhas Gerais da Apresentação

- **Introdução**
- **Definições e Propriedades**
- Algumas Notas Históricas
- Um Problema em Investigação
- Alguns Resultados

Linhas Gerais da Apresentação

- Introdução
- Definições e Propriedades
- Algumas Notas Históricas
- Um Problema em Investigação
- Alguns Resultados

Linhas Gerais da Apresentação

- Introdução
- Definições e Propriedades
- Algumas Notas Históricas
- Um Problema em Investigação
- Alguns Resultados

Linhas Gerais da Apresentação

- Introdução
- Definições e Propriedades
- Algumas Notas Históricas
- Um Problema em Investigação
- Alguns Resultados

Consideremos um sistema de equações diferenciais lineares de primeira ordem com coeficientes constantes,

$$\dot{x}(t) = Ax(t)$$

onde

- $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$;
- $x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}$;
- $x_1(t), \dots, x_n(t)$ tomam valores em \mathbb{F} ;
- $\dot{x}(t)$ representa a derivada de $x(t)$ em ordem a t .

Consideremos um sistema de equações diferenciais lineares de primeira ordem com coeficientes constantes,

$$\dot{x}(t) = Ax(t)$$

onde

- $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$;
- $x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}$;
- $x_1(t), \dots, x_n(t)$ tomam valores em \mathbb{F} ;
- $\dot{x}(t)$ representa a derivada de $x(t)$ em ordem a t .

Consideremos um sistema de equações diferenciais lineares de primeira ordem com coeficientes constantes,

$$\dot{x}(t) = Ax(t)$$

onde

- $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$;
- $x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}$;
- $x_1(t), \dots, x_n(t)$ tomam valores em \mathbb{F} ;
- $\dot{x}(t)$ representa a derivada de $x(t)$ em ordem a t .

Consideremos um sistema de equações diferenciais lineares de primeira ordem com coeficientes constantes,

$$\dot{x}(t) = Ax(t)$$

onde

- $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$;
- $x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}$;
- $x_1(t), \dots, x_n(t)$ tomam valores em \mathbb{F} ;
- $\dot{x}(t)$ representa a derivada de $x(t)$ em ordem a t .

Consideremos um sistema de equações diferenciais lineares de primeira ordem com coeficientes constantes,

$$\dot{x}(t) = Ax(t)$$

onde

- $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$;
- $x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}$;
- $x_1(t), \dots, x_n(t)$ tomam valores em \mathbb{R} ;
- $\dot{x}(t)$ representa a derivada de $x(t)$ em ordem a t .

Definição

O sistema $\dot{x}(t) = Ax(t)$ diz-se (assintoticamente) **estável** se todas as suas soluções convergem para 0 quando t converge para $+\infty$.

Teorema

O sistema $\dot{x}(t) = Ax(t)$ é estável se e só se as partes reais dos valores próprios de A são negativas.

Definição

O sistema $\dot{x}(t) = Ax(t)$ diz-se (assintoticamente) **estável** se todas as suas soluções convergem para 0 quando t converge para $+\infty$.

Teorema

O sistema $\dot{x}(t) = Ax(t)$ é estável se e só se as partes reais dos valores próprios de A são negativas.

Definição

Seja $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$. Chama-se **inércia** de A ao terno

$$In(A) = (\pi(A), \nu(A), \delta(A))$$

onde

$\pi(A)$ representa o número de valores próprios de A com parte real positiva,

$\nu(A)$ representa o número de valores próprios de A com parte real negativa e

$\delta(A)$ representa o número de valores próprios de A com parte real nula.

Definição

Seja $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$. Chama-se **inércia** de A ao terno

$$In(A) = (\pi(A), \nu(A), \delta(A))$$

onde

$\pi(A)$ representa o número de valores próprios de A com parte real positiva,

$\nu(A)$ representa o número de valores próprios de A com parte real negativa e

$\delta(A)$ representa o número de valores próprios de A com parte real nula.

Definição

Seja $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$. Chama-se **inércia** de A ao terno

$$In(A) = (\pi(A), \nu(A), \delta(A))$$

onde

$\pi(A)$ representa o número de valores próprios de A com parte real positiva,

$\nu(A)$ representa o número de valores próprios de A com parte real negativa e

$\delta(A)$ representa o número de valores próprios de A com parte real nula.

Definição

Seja $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$. Chama-se **inércia** de A ao terno

$$In(A) = (\pi(A), \nu(A), \delta(A))$$

onde

$\pi(A)$ representa o número de valores próprios de A com parte real positiva,

$\nu(A)$ representa o número de valores próprios de A com parte real negativa e

$\delta(A)$ representa o número de valores próprios de A com parte real nula.



Charles Hermite (1822, Lorraine (Fr.) - 1901, Paris (Fr.))

- Teoria dos Números, Teoria das Formas Quadráticas e Funções Elípticas;
- Em 1858 mostra que uma equação algébrica do quinto grau pode ser resolvida usando funções elípticas;
- Em 1873 publica a primeira demonstração de que e é transcendente sobre \mathbb{Q} .



Charles Hermite (1822, Lorraine (Fr.) - 1901, Paris (Fr.))

- Teoria dos Números, Teoria das Formas Quadráticas e Funções Elípticas;
- Em 1858 mostra que uma equação algébrica do quinto grau pode ser resolvida usando funções elípticas;
- Em 1873 publica a primeira demonstração de que e é transcendente sobre \mathbb{Q} .



Charles Hermite (1822, Lorraine (Fr.) - 1901, Paris (Fr.))

- Teoria dos Números, Teoria das Formas Quadráticas e Funções Elípticas;
- Em 1858 mostra que uma equação algébrica do quinto grau pode ser resolvida usando funções elípticas;
- Em 1873 publica a primeira demonstração de que e é transcendente sobre \mathbb{Q} .



Charles Hermite (1822, Lorraine (Fr.) - 1901, Paris (Fr.))

- Teoria dos Números, Teoria das Formas Quadráticas e Funções Elípticas;
- Em 1858 mostra que uma equação algébrica do quinto grau pode ser resolvida usando funções elípticas;
- Em 1873 publica a primeira demonstração de que e é transcendente sobre \mathbb{Q} .

Definições e Propriedades

Definição

Uma matriz $H \in \mathbb{F}^{n \times n}$ diz-se **hermítica** se $H^* = H$, sendo H^* a matriz transposta da conjugada de H .

Definição

Uma matriz $S \in \mathbb{F}^{n \times n}$ diz-se **semi-definida positiva** (respectivamente, **definida positiva**) se para qualquer $u \in \mathbb{F}^{n \times 1} \setminus \{0\}$, $u^* S u$ é um real **não negativo** (respectivamente, **positivo**).

Proposição

Se $S \in \mathbb{F}^{n \times n}$ for semi-definida positiva, então S é hermítica.

Definições e Propriedades

Definição

Uma matriz $H \in \mathbb{F}^{n \times n}$ diz-se **hermítica** se $H^* = H$, sendo H^* a matriz transposta da conjugada de H .

Definição

Uma matriz $S \in \mathbb{F}^{n \times n}$ diz-se **semi-definida positiva** (respectivamente, **definida positiva**) se para qualquer $u \in \mathbb{F}^{n \times 1} \setminus \{0\}$, $u^* Su$ é um real **não negativo** (respectivamente, **positivo**).

Proposição

Se $S \in \mathbb{F}^{n \times n}$ for semi-definida positiva, então S é hermítica.

Definições e Propriedades

Definição

Uma matriz $H \in \mathbb{F}^{n \times n}$ diz-se **hermítica** se $H^* = H$, sendo H^* a matriz transposta da conjugada de H .

Definição

Uma matriz $S \in \mathbb{F}^{n \times n}$ diz-se **semi-definida positiva** (respectivamente, **definida positiva**) se para qualquer $u \in \mathbb{F}^{n \times 1} \setminus \{0\}$, $u^* S u$ é um real **não negativo** (respectivamente, **positivo**).

Proposição

Se $S \in \mathbb{F}^{n \times n}$ for semi-definida positiva, então S é hermítica.

Definições e Propriedades

Definição

Uma matriz $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$ diz-se **estável** se o sistema $\dot{x}(t) = Ax(t)$ é (assintoticamente) estável, ou seja, $ln(A) = (0, n, 0)$.

Definição

Uma matriz $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$ diz-se **estável positiva** se todos os seus valores próprios têm parte real positiva, isto é, $ln(A) = (n, 0, 0)$.

Observação

É relativamente fácil observar que A é **estável positiva** se e só se $-A$ é **estável**. Assim, nos enunciados e demonstrações usa-se a definição de estável positiva para simplificação da escrita.

Definições e Propriedades

Definição

Uma matriz $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$ diz-se **estável** se o sistema $\dot{x}(t) = Ax(t)$ é (assintoticamente) estável, ou seja, $\ln(A) = (0, n, 0)$.

Definição

Uma matriz $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$ diz-se **estável positiva** se todos os seus valores próprios têm parte real positiva, isto é, $\ln(A) = (n, 0, 0)$.

Observação

É relativamente fácil observar que A é estável positiva se e só se $-A$ é estável. Assim, nos enunciados e demonstrações usa-se a definição de estável positiva para simplificação da escrita.

Definições e Propriedades

Definição

Uma matriz $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$ diz-se **estável** se o sistema $\dot{x}(t) = Ax(t)$ é (assintoticamente) estável, ou seja, $\ln(A) = (0, n, 0)$.

Definição

Uma matriz $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$ diz-se **estável positiva** se todos os seus valores próprios têm parte real positiva, isto é, $\ln(A) = (n, 0, 0)$.

Observação

É relativamente fácil observar que **A é estável positiva se e só se $-A$ é estável**. Assim, nos enunciados e demonstrações usa-se a definição de estável positiva para simplificação da escrita.



*Aleksandr Mikhailovich Lyapunov (1857, Yaroslavl (Rús.)-
1918, Odessa (Rús.))*

- Hidrostática e Teoria da Probabilidade;
- Em 1900 e 1901 prova o Teorema do Limite Central usando funções características;
- Contribuições para o estudo da estabilidade das equações diferenciais.



*Aleksandr Mikhailovich Lyapunov (1857, Yaroslavl (Rús.)-
1918, Odessa (Rús.))*

- Hidrostática e Teoria da Probabilidade;
- Em 1900 e 1901 prova o Teorema do Limite Central usando funções características;
- Contribuições para o estudo da estabilidade das equações diferenciais.



*Aleksandr Mikhailovich Lyapunov (1857, Yaroslavl (Rús.)-
1918, Odessa (Rús.))*

- Hidrostática e Teoria da Probabilidade;
- Em 1900 e 1901 prova o Teorema do Limite Central usando funções características;
- Contribuições para o estudo da estabilidade das equações diferenciais.



*Aleksandr Mikhailovich Lyapunov (1857, Yaroslavl (Rús.)-
1918, Odessa (Rús.))*

- Hidrostática e Teoria da Probabilidade;
- Em 1900 e 1901 prova o Teorema do Limite Central usando funções características;
- Contribuições para o estudo da estabilidade das equações diferenciais.

Definições e Propriedades

Teorema de Lyapunov (1892)

Uma matriz $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$ é estável positiva se e só se existe uma matriz definida positiva $H \in \mathbb{F}^{n \times n}$ tal que $AH + HA^*$ é definida positiva.

Demonstração:

(\Leftarrow) Suponhamos que existe uma matriz definida positiva $H \in \mathbb{F}^{n \times n}$ tal que $AH + HA^*$ é definida positiva.

Seja $\lambda \in \mathbb{F}$ valor próprio de A .

Seja $u \in \mathbb{F}^{n \times 1}$ vector próprio de A^* associado ao valor próprio $\bar{\lambda}$ (conjugado de λ). Assim, temos que $A^*u = \bar{\lambda}u$, donde $(A^*u)^* = (\bar{\lambda}u)^*$, ou seja, $u^*A = \lambda u^*$.

Então $0 < u^*(AH + HA^*)u = u^*AHu + u^*HA^*u = \lambda u^*Hu + \bar{\lambda}u^*Hu = 2\operatorname{Re}(\lambda)u^*Hu$ e como H é uma matriz definida positiva temos que $u^*Hu > 0$. Logo $\operatorname{Re}(\lambda) > 0$. \square

Definições e Propriedades

Teorema de Lyapunov (1892)

Uma matriz $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$ é estável positiva se e só se existe uma matriz definida positiva $H \in \mathbb{F}^{n \times n}$ tal que $AH + HA^*$ é definida positiva.

Demonstração:

(\Leftarrow) Suponhamos que existe uma matriz definida positiva $H \in \mathbb{F}^{n \times n}$ tal que $AH + HA^*$ é definida positiva.

Seja $\lambda \in \mathbb{F}$ valor próprio de A .

Seja $u \in \mathbb{F}^{n \times 1}$ vector próprio de A^* associado ao valor próprio $\bar{\lambda}$ (conjugado de λ). Assim, temos que $A^*u = \bar{\lambda}u$, donde $(A^*u)^* = (\bar{\lambda}u)^*$, ou seja, $u^*A = \lambda u^*$.

Então $0 < u^*(AH + HA^*)u = u^*AHu + u^*HA^*u = \lambda u^*Hu + \bar{\lambda}u^*Hu = 2\operatorname{Re}(\lambda)u^*Hu$ e como H é uma matriz definida positiva temos que $u^*Hu > 0$. Logo $\operatorname{Re}(\lambda) > 0$. \square

Definições e Propriedades

Teorema de Lyapunov (1892)

Uma matriz $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$ é estável positiva se e só se existe uma matriz definida positiva $H \in \mathbb{F}^{n \times n}$ tal que $AH + HA^*$ é definida positiva.

Demonstração:

(\Leftarrow) Suponhamos que existe uma matriz definida positiva $H \in \mathbb{F}^{n \times n}$ tal que $AH + HA^*$ é definida positiva.

Seja $\lambda \in \mathbb{F}$ valor próprio de A .

Seja $u \in \mathbb{F}^{n \times 1}$ vector próprio de A^* associado ao valor próprio $\bar{\lambda}$ (conjugado de λ). Assim, temos que $A^*u = \bar{\lambda}u$, donde $(A^*u)^* = (\bar{\lambda}u)^*$, ou seja, $u^*A = \lambda u^*$.

Então $0 < u^*(AH + HA^*)u = u^*AHu + u^*HA^*u = \lambda u^*Hu + \bar{\lambda}u^*Hu = 2\operatorname{Re}(\lambda)u^*Hu$ e como H é uma matriz definida positiva temos que $u^*Hu > 0$. Logo $\operatorname{Re}(\lambda) > 0$. \square

Definições e Propriedades

Teorema de Lyapunov (1892)

Uma matriz $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$ é estável positiva se e só se existe uma matriz definida positiva $H \in \mathbb{F}^{n \times n}$ tal que $AH + HA^*$ é definida positiva.

Demonstração:

(\Leftarrow) Suponhamos que existe uma matriz definida positiva $H \in \mathbb{F}^{n \times n}$ tal que $AH + HA^*$ é definida positiva.

Seja $\lambda \in \mathbb{F}$ valor próprio de A .

Seja $u \in \mathbb{F}^{n \times 1}$ vector próprio de A^* associado ao valor próprio $\bar{\lambda}$ (conjugado de λ). Assim, temos que $A^*u = \bar{\lambda}u$, donde $(A^*u)^* = (\bar{\lambda}u)^*$, ou seja, $u^*A = \lambda u^*$.

Então $0 < u^*(AH + HA^*)u = u^*AHu + u^*HA^*u = \lambda u^*Hu + \bar{\lambda}u^*Hu = 2\operatorname{Re}(\lambda)u^*Hu$ e como H é uma matriz definida positiva temos que $u^*Hu > 0$. Logo $\operatorname{Re}(\lambda) > 0$. \square

Definições e Propriedades

Teorema de Lyapunov (1892)

Uma matriz $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$ é estável positiva se e só se existe uma matriz definida positiva $H \in \mathbb{F}^{n \times n}$ tal que $AH + HA^*$ é definida positiva.

Demonstração:

(\Leftarrow) Suponhamos que existe uma matriz definida positiva $H \in \mathbb{F}^{n \times n}$ tal que $AH + HA^*$ é definida positiva.

Seja $\lambda \in \mathbb{F}$ valor próprio de A .

Seja $u \in \mathbb{F}^{n \times 1}$ vector próprio de A^* associado ao valor próprio $\bar{\lambda}$ (conjugado de λ). Assim, temos que $A^*u = \bar{\lambda}u$, donde $(A^*u)^* = (\bar{\lambda}u)^*$, ou seja, $u^*A = \lambda u^*$.

Então $0 < u^*(AH + HA^*)u = u^*AHu + u^*HA^*u = \lambda u^*Hu + \bar{\lambda}u^*Hu = 2\operatorname{Re}(\lambda)u^*Hu$ e como H é uma matriz definida positiva temos que $u^*Hu > 0$. Logo $\operatorname{Re}(\lambda) > 0$. \square

Definições e Propriedades

Teorema de Lyapunov (1892)

Uma matriz $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$ é estável positiva se e só se existe uma matriz definida positiva $H \in \mathbb{F}^{n \times n}$ tal que $AH + HA^*$ é definida positiva.

Demonstração:

(\Leftarrow) Suponhamos que existe uma matriz definida positiva $H \in \mathbb{F}^{n \times n}$ tal que $AH + HA^*$ é definida positiva.

Seja $\lambda \in \mathbb{F}$ valor próprio de A .

Seja $u \in \mathbb{F}^{n \times 1}$ vector próprio de A^* associado ao valor próprio $\bar{\lambda}$ (conjugado de λ). Assim, temos que $A^*u = \bar{\lambda}u$, donde $(A^*u)^* = (\bar{\lambda}u)^*$, ou seja, $u^*A = \lambda u^*$.

Então $0 < u^*(AH + HA^*)u = u^*AHu + u^*HA^*u = \lambda u^*Hu + \bar{\lambda}u^*Hu = 2\operatorname{Re}(\lambda)u^*Hu$ e como H é uma matriz definida positiva temos que $u^*Hu > 0$. Logo $\operatorname{Re}(\lambda) > 0$. \square

Definições e Propriedades

Teorema de Lyapunov (1892)

Uma matriz $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$ é estável positiva se e só se existe uma matriz definida positiva $H \in \mathbb{F}^{n \times n}$ tal que $AH + HA^*$ é definida positiva.

Demonstração:

(\Leftarrow) Suponhamos que existe uma matriz definida positiva $H \in \mathbb{F}^{n \times n}$ tal que $AH + HA^*$ é definida positiva.

Seja $\lambda \in \mathbb{F}$ valor próprio de A .

Seja $u \in \mathbb{F}^{n \times 1}$ vector próprio de A^* associado ao valor próprio $\bar{\lambda}$ (conjugado de λ). Assim, temos que $A^*u = \bar{\lambda}u$, donde $(A^*u)^* = (\bar{\lambda}u)^*$, ou seja, $u^*A = \lambda u^*$.

Então $0 < u^*(AH + HA^*)u = u^*AHu + u^*HA^*u = \lambda u^*Hu + \bar{\lambda}u^*Hu = 2\operatorname{Re}(\lambda)u^*Hu$ e como H é uma matriz definida positiva temos que $u^*Hu > 0$. Logo $\operatorname{Re}(\lambda) > 0$. \square

Definições e Propriedades

Teorema de Lyapunov (1892)

Uma matriz $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$ é estável positiva se e só se existe uma matriz definida positiva $H \in \mathbb{F}^{n \times n}$ tal que $AH + HA^*$ é definida positiva.

Demonstração:

(\Leftarrow) Suponhamos que existe uma matriz definida positiva $H \in \mathbb{F}^{n \times n}$ tal que $AH + HA^*$ é definida positiva.

Seja $\lambda \in \mathbb{F}$ valor próprio de A .

Seja $u \in \mathbb{F}^{n \times 1}$ vector próprio de A^* associado ao valor próprio $\bar{\lambda}$ (conjugado de λ). Assim, temos que $A^*u = \bar{\lambda}u$, donde $(A^*u)^* = (\bar{\lambda}u)^*$, ou seja, $u^*A = \lambda u^*$.

Então $0 < u^*(AH + HA^*)u = u^*AHu + u^*HA^*u = \lambda u^*Hu + \bar{\lambda}u^*Hu = 2\operatorname{Re}(\lambda)u^*Hu$ e como H é uma matriz definida positiva temos que $u^*Hu > 0$. Logo $\operatorname{Re}(\lambda) > 0$. \square

Definições e Propriedades

Teorema de Lyapunov (1892)

Uma matriz $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$ é estável positiva se e só se existe uma matriz definida positiva $H \in \mathbb{F}^{n \times n}$ tal que $AH + HA^*$ é definida positiva.

Demonstração:

(\Leftarrow) Suponhamos que existe uma matriz definida positiva $H \in \mathbb{F}^{n \times n}$ tal que $AH + HA^*$ é definida positiva.

Seja $\lambda \in \mathbb{F}$ valor próprio de A .

Seja $u \in \mathbb{F}^{n \times 1}$ vector próprio de A^* associado ao valor próprio $\bar{\lambda}$ (conjugado de λ). Assim, temos que $A^*u = \bar{\lambda}u$, donde $(A^*u)^* = (\bar{\lambda}u)^*$, ou seja, $u^*A = \lambda u^*$.

Então $0 < u^*(AH + HA^*)u = u^*AHu + u^*HA^*u = \lambda u^*Hu + \bar{\lambda}u^*Hu = 2\operatorname{Re}(\lambda)u^*Hu$ e como H é uma matriz definida positiva temos que $u^*Hu > 0$. Logo $\operatorname{Re}(\lambda) > 0$. \square

Definições e Propriedades

Teorema de Lyapunov (1892)

Uma matriz $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$ é estável positiva se e só se existe uma matriz definida positiva $H \in \mathbb{F}^{n \times n}$ tal que $AH + HA^*$ é definida positiva.

Demonstração:

(\Leftarrow) Suponhamos que existe uma matriz definida positiva $H \in \mathbb{F}^{n \times n}$ tal que $AH + HA^*$ é definida positiva.

Seja $\lambda \in \mathbb{F}$ valor próprio de A .

Seja $u \in \mathbb{F}^{n \times 1}$ vector próprio de A^* associado ao valor próprio $\bar{\lambda}$ (conjugado de λ). Assim, temos que $A^*u = \bar{\lambda}u$, donde $(A^*u)^* = (\bar{\lambda}u)^*$, ou seja, $u^*A = \lambda u^*$.

Então $0 < u^*(AH + HA^*)u = u^*AHu + u^*HA^*u =$

$\lambda u^*Hu + \bar{\lambda}u^*Hu = 2\operatorname{Re}(\lambda)u^*Hu$ e como H é uma matriz definida positiva temos que $u^*Hu > 0$. Logo $\operatorname{Re}(\lambda) > 0$. \square

Definições e Propriedades

Teorema de Lyapunov (1892)

Uma matriz $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$ é estável positiva se e só se existe uma matriz definida positiva $H \in \mathbb{F}^{n \times n}$ tal que $AH + HA^*$ é definida positiva.

Demonstração:

(\Leftarrow) Suponhamos que existe uma matriz definida positiva $H \in \mathbb{F}^{n \times n}$ tal que $AH + HA^*$ é definida positiva.

Seja $\lambda \in \mathbb{F}$ valor próprio de A .

Seja $u \in \mathbb{F}^{n \times 1}$ vector próprio de A^* associado ao valor próprio $\bar{\lambda}$ (conjugado de λ). Assim, temos que $A^*u = \bar{\lambda}u$, donde $(A^*u)^* = (\bar{\lambda}u)^*$, ou seja, $u^*A = \lambda u^*$.

Então $0 < u^*(AH + HA^*)u = u^*AHu + u^*HA^*u =$

$\lambda u^*Hu + \bar{\lambda}u^*Hu = 2\operatorname{Re}(\lambda)u^*Hu$ e como H é uma matriz definida positiva temos que $u^*Hu > 0$. Logo $\operatorname{Re}(\lambda) > 0$. \square

Definições e Propriedades

Teorema de Lyapunov (1892)

Uma matriz $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$ é estável positiva se e só se existe uma matriz definida positiva $H \in \mathbb{F}^{n \times n}$ tal que $AH + HA^*$ é definida positiva.

Demonstração:

(\Leftarrow) Suponhamos que existe uma matriz definida positiva $H \in \mathbb{F}^{n \times n}$ tal que $AH + HA^*$ é definida positiva.

Seja $\lambda \in \mathbb{F}$ valor próprio de A .

Seja $u \in \mathbb{F}^{n \times 1}$ vector próprio de A^* associado ao valor próprio $\bar{\lambda}$ (conjugado de λ). Assim, temos que $A^*u = \bar{\lambda}u$, donde $(A^*u)^* = (\bar{\lambda}u)^*$, ou seja, $u^*A = \lambda u^*$.

Então $0 < u^*(AH + HA^*)u = u^*AHu + u^*HA^*u =$

$\lambda u^*Hu + \bar{\lambda}u^*Hu = 2\operatorname{Re}(\lambda)u^*Hu$ e como H é uma matriz definida positiva temos que $u^*Hu > 0$. Logo $\operatorname{Re}(\lambda) > 0$. \square

Definições e Propriedades

Teorema de Lyapunov (1892)

Uma matriz $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$ é estável positiva se e só se existe uma matriz definida positiva $H \in \mathbb{F}^{n \times n}$ tal que $AH + HA^*$ é definida positiva.

Demonstração:

(\Leftarrow) Suponhamos que existe uma matriz definida positiva $H \in \mathbb{F}^{n \times n}$ tal que $AH + HA^*$ é definida positiva.

Seja $\lambda \in \mathbb{F}$ valor próprio de A .

Seja $u \in \mathbb{F}^{n \times 1}$ vector próprio de A^* associado ao valor próprio $\bar{\lambda}$ (conjugado de λ). Assim, temos que $A^*u = \bar{\lambda}u$, donde $(A^*u)^* = (\bar{\lambda}u)^*$, ou seja, $u^*A = \lambda u^*$.

Então $0 < u^*(AH + HA^*)u = u^*AHu + u^*HA^*u = \lambda u^*Hu + \bar{\lambda}u^*Hu = 2\operatorname{Re}(\lambda)u^*Hu$ e como H é uma matriz definida positiva temos que $u^*Hu > 0$. Logo $\operatorname{Re}(\lambda) > 0$. \square

Definições e Propriedades

Teorema de Lyapunov (1892)

Uma matriz $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$ é estável positiva se e só se existe uma matriz definida positiva $H \in \mathbb{F}^{n \times n}$ tal que $AH + HA^*$ é definida positiva.

Demonstração:

(\Leftarrow) Suponhamos que existe uma matriz definida positiva $H \in \mathbb{F}^{n \times n}$ tal que $AH + HA^*$ é definida positiva.

Seja $\lambda \in \mathbb{F}$ valor próprio de A .

Seja $u \in \mathbb{F}^{n \times 1}$ vector próprio de A^* associado ao valor próprio $\bar{\lambda}$ (conjugado de λ). Assim, temos que $A^*u = \bar{\lambda}u$, donde $(A^*u)^* = (\bar{\lambda}u)^*$, ou seja, $u^*A = \lambda u^*$.

Então $0 < u^*(AH + HA^*)u = u^*AHu + u^*HA^*u = \lambda u^*Hu + \bar{\lambda}u^*Hu = 2\operatorname{Re}(\lambda)u^*Hu$ e como H é uma matriz definida positiva temos que $u^*Hu > 0$. Logo $\operatorname{Re}(\lambda) > 0$. \square

Definições e Propriedades

Teorema de Lyapunov (1892)

Uma matriz $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$ é estável positiva se e só se existe uma matriz definida positiva $H \in \mathbb{F}^{n \times n}$ tal que $AH + HA^*$ é definida positiva.

Demonstração:

(\Leftarrow) Suponhamos que existe uma matriz definida positiva $H \in \mathbb{F}^{n \times n}$ tal que $AH + HA^*$ é definida positiva.

Seja $\lambda \in \mathbb{F}$ valor próprio de A .

Seja $u \in \mathbb{F}^{n \times 1}$ vector próprio de A^* associado ao valor próprio $\bar{\lambda}$ (conjugado de λ). Assim, temos que $A^*u = \bar{\lambda}u$, donde $(A^*u)^* = (\bar{\lambda}u)^*$, ou seja, $u^*A = \lambda u^*$.

Então $0 < u^*(AH + HA^*)u = u^*AHu + u^*HA^*u = \lambda u^*Hu + \bar{\lambda}u^*Hu = 2\operatorname{Re}(\lambda)u^*Hu$ e como H é uma matriz definida positiva temos que $u^*Hu > 0$. Logo $\operatorname{Re}(\lambda) > 0$. \square

Definição

Duas matrizes $A, B \in \mathbb{F}^{n \times n}$ dizem-se **semelhantes** se existir uma matriz invertível $U \in \mathbb{F}^{n \times n}$ tal que $B = UAU^{-1}$.

Definição

Duas matrizes $A, B \in \mathbb{F}^{n \times n}$ dizem-se **congruentes** se existir uma matriz invertível $X \in \mathbb{F}^{n \times n}$ tal que $B = XAX^*$.

Definição

Duas matrizes $A, B \in \mathbb{F}^{n \times n}$ dizem-se **semelhantes** se existir uma matriz invertível $U \in \mathbb{F}^{n \times n}$ tal que $B = UAU^{-1}$.

Definição

Duas matrizes $A, B \in \mathbb{F}^{n \times n}$ dizem-se **congruentes** se existir uma matriz invertível $X \in \mathbb{F}^{n \times n}$ tal que $B = XAX^*$.

Definições e Propriedades

Teorema da Inércia de Sylvester

Seja $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$ uma matriz hermítica. Então A é congruente com a matriz diagonal

$$\begin{bmatrix} I_{\pi(A)} & & \\ & I_{\nu(A)} & \\ & & 0_{\delta(A)} \end{bmatrix}$$

Teorema

Duas matrizes hermíticas $A, B \in \mathbb{F}^{n \times n}$ são congruentes se e só se $\text{In}(A) = \text{In}(B)$.

Teorema da Inércia de Sylvester

Seja $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$ uma matriz hermítica. Então A é congruente com a matriz diagonal

$$\begin{bmatrix} I_{\pi(A)} & & \\ & I_{\nu(A)} & \\ & & 0_{\delta(A)} \end{bmatrix}$$

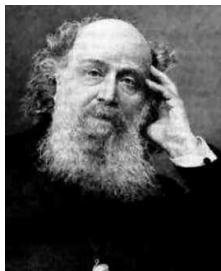
Teorema

Duas matrizes hermíticas $A, B \in \mathbb{F}^{n \times n}$ são congruentes se e só se $\text{In}(A) = \text{In}(B)$.



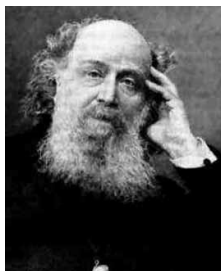
James Joseph Sylvester (1814, Londres (Ingl.) - 1897, Londres, (Ingl.))

- Desenvolveu ideias em Teoria das Matrizes nos corredores dos tribunais de Londres discutindo-as com A. Cayley;
- Em 1841 tinha já publicado 15 artigos sobre dinâmica de fluidos e equações algébricas;
- Em 1878 funda o *American Journal of Mathematics*, o primeiro jornal de matemática nos EUA.



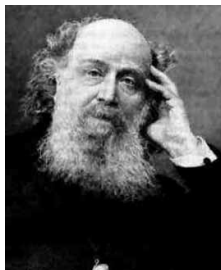
James Joseph Sylvester (1814, Londres (Ingl.) - 1897, Londres, (Ingl.))

- Desenvolveu ideias em Teoria das Matrizes nos corredores dos tribunais de Londres discutindo-as com A. Cayley;
- Em 1841 tinha já publicado 15 artigos sobre dinâmica de fluidos e equações algébricas;
- Em 1878 funda o *American Journal of Mathematics*, o primeiro jornal de matemática nos EUA.



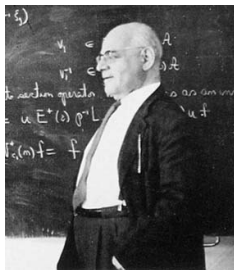
James Joseph Sylvester (1814, Londres (Ingl.) - 1897, Londres, (Ingl.))

- Desenvolveu ideias em Teoria das Matrizes nos corredores dos tribunais de Londres discutindo-as com A. Cayley;
- Em 1841 tinha já publicado 15 artigos sobre dinâmica de fluidos e equações algébricas;
- Em 1878 funda o *American Journal of Mathematics*, o primeiro jornal de matemática nos EUA.



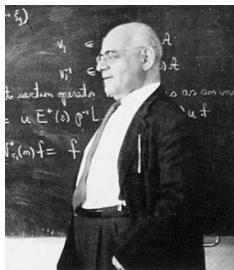
James Joseph Sylvester (1814, Londres (Ingl.) - 1897, Londres, (Ingl.))

- Desenvolveu ideias em Teoria das Matrizes nos corredores dos tribunais de Londres discutindo-as com A. Cayley;
- Em 1841 tinha já publicado 15 artigos sobre dinâmica de fluidos e equações algébricas;
- Em 1878 funda o *American Journal of Mathematics*, o primeiro jornal de matemática nos EUA.



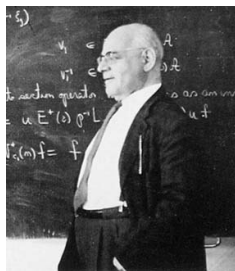
Alexander Markowich Ostrowski (1893, Kiev (Ucr.) - 1986, Lugano, (Suíça))

- Em 1973 publica a obra *Soluções de Equações em Espaços Euclidianos e de Banach*;
- Publica cerca de 275 trabalhos em diversos tópicos como álgebra linear, equações algébricas, álgebra, teoria dos números, geometria, topologia, equações diferenciais, análise complexa e análise numérica.



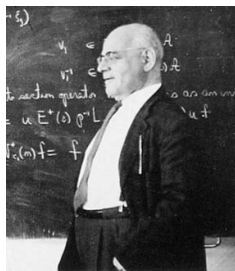
Alexander Markowich Ostrowski (1893, Kiev (Ucr.) - 1986, Lugano, (Suíça))

- Em 1973 publica a obra *Soluções de Equações em Espaços Euclidianos e de Banach*;
- Publica cerca de 275 trabalhos em diversos tópicos como álgebra linear, equações algébricas, álgebra, teoria dos números, geometria, topologia, equações diferenciais, análise complexa e análise numérica.



Alexander Markowich Ostrowski (1893, Kiev (Ucr.) - 1986, Lugano, (Suíça))

- Em 1973 publica a obra *Soluções de Equações em Espaços Euclidianos e de Banach*;
- Publica cerca de 275 trabalhos em diversos tópicos como álgebra linear, equações algébricas, álgebra, teoria dos números, geometria, topologia, equações diferenciais, análise complexa e análise numérica.



Alexander Markowich Ostrowski (1893, Kiev (Ucr.) - 1986, Lugano, (Suíça))

- Em 1973 publica a obra *Soluções de Equações em Espaços Euclidianos e de Banach*;
- Publica cerca de 275 trabalhos em diversos tópicos como álgebra linear, equações algébricas, álgebra, teoria dos números, geometria, topologia, equações diferenciais, análise complexa e análise numérica.



Hans Schneider (1927 Viena (Áustria) -)

- Central no desenvolvimento e consolidação da comunidade científica em Álgebra Linear e Teoria de Matrizes;
- Fundou a Revista *Linear Algebra and its Applications* e a *International Linear Algebra Society*;
- Apesar de “oficialmente” retirado desde 1993 é *J. J. Sylvester Emeritus Professor of Mathematics* em Madison-Wisconsin.



Hans Schneider (1927 Viena (Áustria) -)

- Central no desenvolvimento e consolidação da comunidade científica em Álgebra Linear e Teoria de Matrizes;
- Fundou a Revista *Linear Algebra and its Applications* e a *International Linear Algebra Society*;
- Apesar de “oficialmente” retirado desde 1993 é *J. J. Sylvester Emeritus Professor of Mathematics* em Madison-Wisconsin.



Hans Schneider (1927 Viena (Áustria) -)

- Central no desenvolvimento e consolidação da comunidade científica em Álgebra Linear e Teoria de Matrizes;
- Fundou a Revista *Linear Algebra and its Applications* e a *International Linear Algebra Society*;
- Apesar de “oficialmente” retirado desde 1993 é *J. J. Sylvester Emeritus Professor of Mathematics* em Madison-Wisconsin.



Hans Schneider (1927 Viena (Áustria) -)

- Central no desenvolvimento e consolidação da comunidade científica em Álgebra Linear e Teoria de Matrizes;
- Fundou a Revista *Linear Algebra and its Applications* e a *International Linear Algebra Society*;
- Apesar de “oficialmente” retirado desde 1993 é *J. J. Sylvester Emeritus Professor of Mathematics* em Madison-Wisconsin.



Olga Taussky-Todd (1906, Olomuc (Rep. Checa) - 1995, Califórnia (USA))

- A área de estudo em que foi mais influente foi em Teoria de Matrizes;
- Fez a sua primeira investigação em Teoria dos Números, área em que teve contribuições importantes;
- Escreveu também artigos sobre Teoria de Grupos e Análise Numérica.



Olga Taussky-Todd (1906, Olomuc (Rep. Checa) - 1995, Califórnia (USA))

- A área de estudo em que foi mais influente foi em Teoria de Matrizes;
- Fez a sua primeira investigação em Teoria dos Números, área em que teve contribuições importantes;
- Escreveu também artigos sobre Teoria de Grupos e Análise Numérica.



Olga Taussky-Todd (1906, Olomuc (Rep. Checa) - 1995, Califórnia (USA))

- A área de estudo em que foi mais influente foi em Teoria de Matrizes;
- Fez a sua primeira investigação em Teoria dos Números, área em que teve contribuições importantes;
- Escreveu também artigos sobre Teoria de Grupos e Análise Numérica.



Olga Taussky-Todd (1906, Olomuc (Rep. Checa) - 1995, Califórnia (USA))

- A área de estudo em que foi mais influente foi em Teoria de Matrizes;
- Fez a sua primeira investigação em Teoria dos Números, área em que teve contribuições importantes;
- Escreveu também artigos sobre Teoria de Grupos e Análise Numérica.

Teorema Geral da Inércia

Ostrowski e Schneider (1962) e Taussky (1961)

Seja $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$. Existe uma matriz hermítica $H \in \mathbb{F}^{n \times n}$ tal que $AH + HA^*$ é definida positiva se e só se $\delta(A) = 0$. Além disso, se existir uma matriz hermítica $H \in \mathbb{F}^{n \times n}$ tal que $AH + HA^*$ é definida positiva, então $\ln(A) = \ln(H)$.

Este teorema motivou a procura de novos resultados sobre estabilidade e inércia de matrizes.

Teorema Geral da Inércia

Ostrowski e Schneider (1962) e Taussky (1961)

Seja $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$. Existe uma matriz hermítica $H \in \mathbb{F}^{n \times n}$ tal que $AH + HA^*$ é definida positiva se e só se $\delta(A) = 0$. Além disso, se existir uma matriz hermítica $H \in \mathbb{F}^{n \times n}$ tal que $AH + HA^*$ é definida positiva, então $\text{In}(A) = \text{In}(H)$.

Este teorema motivou a procura de novos resultados sobre estabilidade e inércia de matrizes.

Teorema Geral da Inércia

Ostrowski e Schneider (1962) e Taussky (1961)

Seja $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$. Existe uma matriz hermítica $H \in \mathbb{F}^{n \times n}$ tal que $AH + HA^*$ é definida positiva se e só se $\delta(A) = 0$. Além disso, se existir uma matriz hermítica $H \in \mathbb{F}^{n \times n}$ tal que $AH + HA^*$ é definida positiva, então $\ln(A) = \ln(H)$.

Este teorema motivou a procura de novos resultados sobre estabilidade e inércia de matrizes.

Observação

Seja $S \in \mathbb{F}^{n \times n}$ uma matriz invertível. Facilmente se verifica que

$$AH + HA^* = K$$



$$(SAS^{-1})(SHS^*) + (SHS^*)(SAS^{-1})^* = SKS^*$$

Observação

Seja $S \in \mathbb{F}^{n \times n}$ uma matriz invertível. Facilmente se verifica que

$$AH + HA^* = K$$

$$\Leftrightarrow$$

$$(SAS^{-1})(SHS^*) + (SHS^*)(SAS^{-1})^* = SKS^*$$

Observação

Seja $S \in \mathbb{F}^{n \times n}$ uma matriz invertível. Facilmente se verifica que

$$AH + HA^* = K$$



$$(SAS^{-1})(SHS^*) + (SHS^*)(SAS^{-1})^* = SKS^*$$

Utilizando a observação anterior, deduz-se facilmente este outro enunciado do Teorema Geral da Inércia

Teorema

Sejam $A_o, H_o \in \mathbb{F}^{n \times n}$ e H_o hermítica. São equivalentes:

- (a) Existem matrizes A semelhante a A_o , H congruente com H_o e K congruente com I_n , tais que $AH + HA^* = K$;
- (b) $\delta(A) = 0$ e $\ln(A) = \ln(H)$.

Esta outra forma de enunciar o Teorema Geral da Inércia conduz ao seguinte problema:

Utilizando a observação anterior, deduz-se facilmente este outro enunciado do Teorema Geral da Inércia

Teorema

Sejam $A_o, H_o \in \mathbb{F}^{n \times n}$ e H_o hermítica. São equivalentes:

- (a) Existem matrizes A semelhante a A_o , H congruente com H_o e K congruente com I_n , tais que $AH + HA^* = K$;
- (b) $\delta(A) = 0$ e $\text{In}(A) = \text{In}(H)$.

Esta outra forma de enunciar o Teorema Geral da Inércia conduz ao seguinte problema:

Utilizando a observação anterior, deduz-se facilmente este outro enunciado do Teorema Geral da Inércia

Teorema

Sejam $A_o, H_o \in \mathbb{F}^{n \times n}$ e H_o hermítica. São equivalentes:

- (a) Existem matrizes A semelhante a A_o , H congruente com H_o e K congruente com I_n , tais que $AH + HA^* = K$;
- (b) $\delta(A) = 0$ e $\ln(A) = \ln(H)$.

Esta outra forma de enunciar o Teorema Geral da Inércia conduz ao seguinte problema:

Um Problema para Investigar

Problema

Quais são as relações entre a classe de semelhança de A e as classes de congruência de H e de K quando se verifica a equação de Lyapunov $AH + HA^* = K$.

Observação

O Teorema Geral da Inércia resolve um caso particular deste problema.

Não se tendo ainda conseguido responder totalmente a este problema, alguns investigadores têm publicado resultados relacionados. Vamos ver alguns desses resultados, no entanto, será necessário apresentar mais algumas definições e propriedades.

Um Problema para Investigar

Problema

Quais são as relações entre a classe de semelhança de A e as classes de congruência de H e de K quando se verifica a equação de Lyapunov $AH + HA^* = K$.

Observação

O Teorema Geral da Inércia resolve um caso particular deste problema.

Não se tendo ainda conseguido responder totalmente a este problema, alguns investigadores têm publicado resultados relacionados. Vamos ver alguns desses resultados, no entanto, será necessário apresentar mais algumas definições e propriedades.

Um Problema para Investigar

Problema

Quais são as relações entre a classe de semelhança de A e as classes de congruência de H e de K quando se verifica a equação de Lyapunov $AH + HA^* = K$.

Observação

O Teorema Geral da Inércia resolve um caso particular deste problema.

Não se tendo ainda conseguido responder totalmente a este problema, alguns investigadores têm publicado resultados relacionados. Vamos ver alguns desses resultados, no entanto, será necessário apresentar mais algumas definições e propriedades.

Um Problema para Investigar

Problema

Quais são as relações entre a classe de semelhança de A e as classes de congruência de H e de K quando se verifica a equação de Lyapunov $AH + HA^* = K$.

Observação

O Teorema Geral da Inércia resolve um caso particular deste problema.

Não se tendo ainda conseguido responder totalmente a este problema, alguns investigadores têm publicado resultados relacionados. Vamos ver alguns desses resultados, no entanto, será necessário apresentar mais algumas definições e propriedades.

Definições e Propriedades

Sejam \mathbb{F} um corpo e $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$. Para qualquer polinómio

$$f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n \in \mathbb{F}[x],$$

seja

$$f(A) = a_0I_n + a_1A + \dots + a_{n-1}A^{n-1} + a_nA^n \in \mathbb{F}^{n \times n}.$$

Teorema de Hamilton-Cayley

Seja $f(x) = \det(xI_n - A)$ o polinómio característico de $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$. Então $f(A) = 0$.

Definições e Propriedades

Sejam \mathbb{F} um corpo e $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$. Para qualquer polinómio

$$f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n \in \mathbb{F}[x],$$

seja

$$f(A) = a_0I_n + a_1A + \dots + a_{n-1}A^{n-1} + a_nA^n \in \mathbb{F}^{n \times n}.$$

Teorema de Hamilton-Cayley

Seja $f(x) = \det(xI_n - A)$ o polinómio característico de $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$. Então $f(A) = 0$.

Definições e Propriedades

Sejam \mathbb{F} um corpo e $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$. Para qualquer polinómio

$$f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n \in \mathbb{F}[x],$$

seja

$$f(A) = a_0I_n + a_1A + \dots + a_{n-1}A^{n-1} + a_nA^n \in \mathbb{F}^{n \times n}.$$

Teorema de Hamilton-Cayley

Seja $f(x) = \det(xI_n - A)$ o polinómio característico de $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$. Então $f(A) = 0$.

Sejam \mathbb{F} um corpo e $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$. Para qualquer polinómio

$$f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n \in \mathbb{F}[x],$$

seja

$$f(A) = a_0I_n + a_1A + \dots + a_{n-1}A^{n-1} + a_nA^n \in \mathbb{F}^{n \times n}.$$

Teorema de Hamilton-Cayley

Seja $f(x) = \det(xI_n - A)$ o polinómio característico de $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$. Então $f(A) = 0$.



William Rowan Hamilton (1805, Dublin (Irl.) - 1865, Dublin (Irl.))

- Matemático, físico e astrónomo que fez contribuições importantes no desenvolvimento da óptica, da dinâmica e da álgebra;
- Uma contribuição importante para a matemática foi a descoberta dos quatérnios em 1843;
- Entidades da física que ficaram com o seu nome: função Hamiltoniana e operador Hamiltoniano.



William Rowan Hamilton (1805, Dublin (Irl.) - 1865, Dublin (Irl.))

- Matemático, físico e astrónomo que fez contribuições importantes no desenvolvimento da óptica, da dinâmica e da álgebra;
- Uma contribuição importante para a matemática foi a descoberta dos quatérnios em 1843;
- Entidades da física que ficaram com o seu nome: função Hamiltoniana e operador Hamiltoniano.



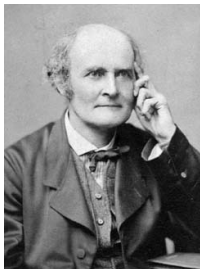
William Rowan Hamilton (1805, Dublin (Irl.) - 1865, Dublin (Irl.))

- Matemático, físico e astrónomo que fez contribuições importantes no desenvolvimento da óptica, da dinâmica e da álgebra;
- Uma contribuição importante para a matemática foi a descoberta dos quatérnios em 1843;
- Entidades da física que ficaram com o seu nome: função Hamiltoniana e operador Hamiltoniano.



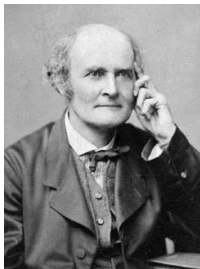
William Rowan Hamilton (1805, Dublin (Irl.) - 1865, Dublin (Irl.))

- Matemático, físico e astrónomo que fez contribuições importantes no desenvolvimento da óptica, da dinâmica e da álgebra;
- Uma contribuição importante para a matemática foi a descoberta dos quatérnios em 1843;
- Entidades da física que ficaram com o seu nome: função Hamiltoniana e operador Hamiltoniano.



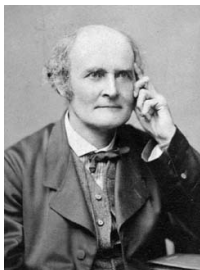
Arthur Cayley (1821, Richmond (Ingl.) - 1895, Cambr. (Ingl.))

- Cruza-se com J. J. Sylvester nos corredores dos tribunais de Londres, onde discutem ideias sobre Teoria de Matrizes;
- Desenvolve trabalhos importantes em álgebra de matrizes, geometria não euclidiana e geometria n-dimensional;
- Cria as “Tabelas de Cayley” de um dado grupo de permutação e ao desenvolver o conceito de grupo abstracto toma consciência que as matrizes e os quaterniões também formam grupos.



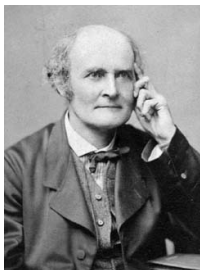
Arthur Cayley (1821, Richmond (Ingl.) - 1895, Cambr. (Ingl.))

- Cruza-se com J. J. Sylvester nos corredores dos tribunais de Londres, onde discutem ideias sobre Teoria de Matrizes;
- Desenvolve trabalhos importantes em álgebra de matrizes, geometria não euclidiana e geometria n-dimensional;
- Cria as “Tabelas de Cayley” de um dado grupo de permutação e ao desenvolver o conceito de grupo abstracto toma consciência que as matrizes e os quaterniões também formam grupos.



Arthur Cayley (1821, Richmond (Ingl.) - 1895, Cambr. (Ingl.))

- Cruza-se com J. J. Sylvester nos corredores dos tribunais de Londres, onde discutem ideias sobre Teoria de Matrizes;
- Desenvolve trabalhos importantes em álgebra de matrizes, geometria não euclidiana e geometria n-dimensional;
- Cria as “Tabelas de Cayley” de um dado grupo de permutação e ao desenvolver o conceito de grupo abstracto toma consciência que as matrizes e os quaterniões também formam grupos.



Arthur Cayley (1821, Richmond (Ingl.) - 1895, Cambr. (Ingl.))

- Cruza-se com J. J. Sylvester nos corredores dos tribunais de Londres, onde discutem ideias sobre Teoria de Matrizes;
- Desenvolve trabalhos importantes em álgebra de matrizes, geometria não euclidiana e geometria n-dimensional;
- Cria as “Tabelas de Cayley” de um dado grupo de permutação e ao desenvolver o conceito de grupo abstracto toma consciência que as matrizes e os quatérniões também formam grupos.

Definições e Propriedades

Sejam \mathbb{F} um corpo e $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$.

Consideremos a aplicação

$$\phi_A : \mathbb{F}[x] \longrightarrow \mathbb{F}^{n \times n},$$

definida por $\phi_A(f(x)) = f(A)$, para qualquer $f(x) \in \mathbb{F}[x]$.

Prova-se que esta aplicação é um homomorfismo de anéis.
Assim,

$$I_A = \{f(x) \in \mathbb{F}[x] : f(A) = 0\}$$

é um ideal não nulo, do domínio de ideais principais $\mathbb{F}[x]$.

Definições e Propriedades

Sejam \mathbb{F} um corpo e $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$.

Consideremos a aplicação

$$\phi_A : \mathbb{F}[x] \longrightarrow \mathbb{F}^{n \times n},$$

definida por $\phi_A(f(x)) = f(A)$, para qualquer $f(x) \in \mathbb{F}[x]$.

Prova-se que esta aplicação é um homomorfismo de anéis.
Assim,

$$I_A = \{f(x) \in \mathbb{F}[x] : f(A) = 0\}$$

é um ideal não nulo, do domínio de ideais principais $\mathbb{F}[x]$.

Definições e Propriedades

Sejam \mathbb{F} um corpo e $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$.

Consideremos a aplicação

$$\phi_A : \mathbb{F}[x] \longrightarrow \mathbb{F}^{n \times n},$$

definida por $\phi_A(f(x)) = f(A)$, para qualquer $f(x) \in \mathbb{F}[x]$.

Prova-se que esta aplicação é um homomorfismo de anéis.

Assim,

$$I_A = \{f(x) \in \mathbb{F}[x] : f(A) = 0\}$$

é um ideal não nulo, do domínio de ideais principais $\mathbb{F}[x]$.

Definições e Propriedades

Sejam \mathbb{F} um corpo e $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$.

Consideremos a aplicação

$$\phi_A : \mathbb{F}[x] \longrightarrow \mathbb{F}^{n \times n},$$

definida por $\phi_A(f(x)) = f(A)$, para qualquer $f(x) \in \mathbb{F}[x]$.

Prova-se que esta aplicação é um homomorfismo de anéis.
Assim,

$$I_A = \{f(x) \in \mathbb{F}[x] : f(A) = 0\}$$

é um ideal não nulo, do domínio de ideais principais $\mathbb{F}[x]$.

Definição

O único gerador mónico do ideal I_A chama-se o **polinómio mínimo** de A .

Observação

Resulta, do teorema de Hamilton-Cayley, que o polinómio mínimo de $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$ divide o polinómio característico de A .

Definição

Uma matriz $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$ diz-se **não derogatória** se o seu polinómio mínimo e característico coincidem.

Definição

O único gerador mónico do ideal I_A chama-se o **polinómio mínimo** de A .

Observação

Resulta, do teorema de Hamilton-Cayley, que o polinómio mínimo de $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$ divide o polinómio característico de A .

Definição

Uma matriz $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$ diz-se **não derogatória** se o seu polinómio mínimo e característico coincidem.

Definição

O único gerador mónico do ideal I_A chama-se o **polinómio mínimo** de A .

Observação

Resulta, do teorema de Hamilton-Cayley, que o polinómio mínimo de $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$ divide o polinómio característico de A .

Definição

Uma matriz $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$ diz-se **não derogatória** se o seu polinómio mínimo e característico coincidem.

Proposição

Matrizes semelhantes têm o mesmo polinómio mínimo.

Demonstração:

Sejam $A, B \in \mathbb{F}^{n \times n}$ matrizes semelhantes.

Então existe $P \in \mathbb{F}^{n \times n}$ invertível tal que $B = P^{-1}AP$.

Para qualquer $f(x) \in \mathbb{F}[x]$, temos que $f(P^{-1}AP) = P^{-1}f(A)P$ e portanto,

$$\{f(x) \in \mathbb{F}[x] : f(A) = 0\} = \{f(x) \in \mathbb{F}[x] : f(B) = 0\}.$$

Logo os polinómios mínimos de A e de B coincidem. \square

Proposição

Matrizes semelhantes têm o mesmo polinómio mínimo.

Demonstração:

Sejam $A, B \in \mathbb{F}^{n \times n}$ matrizes semelhantes.

Então existe $P \in \mathbb{F}^{n \times n}$ invertível tal que $B = P^{-1}AP$.

Para qualquer $f(x) \in \mathbb{F}[x]$, temos que $f(P^{-1}AP) = P^{-1}f(A)P$ e portanto,

$$\{f(x) \in \mathbb{F}[x] : f(A) = 0\} = \{f(x) \in \mathbb{F}[x] : f(B) = 0\}.$$

Logo os polinómios mínimos de A e de B coincidem. \square

Proposição

Matrizes semelhantes têm o mesmo polinómio mínimo.

Demonstração:

Sejam $A, B \in \mathbb{F}^{n \times n}$ matrizes semelhantes.

Então existe $P \in \mathbb{F}^{n \times n}$ invertível tal que $B = P^{-1}AP$.

Para qualquer $f(x) \in \mathbb{F}[x]$, temos que $f(P^{-1}AP) = P^{-1}f(A)P$ e portanto,

$$\{f(x) \in \mathbb{F}[x] : f(A) = 0\} = \{f(x) \in \mathbb{F}[x] : f(B) = 0\}.$$

Logo os polinómios mínimos de A e de B coincidem. \square

Proposição

Matrizes semelhantes têm o mesmo polinómio mínimo.

Demonstração:

Sejam $A, B \in \mathbb{F}^{n \times n}$ matrizes semelhantes.

Então existe $P \in \mathbb{F}^{n \times n}$ invertível tal que $B = P^{-1}AP$.

Para qualquer $f(x) \in \mathbb{F}[x]$, temos que $f(P^{-1}AP) = P^{-1}f(A)P$ e portanto,

$$\{f(x) \in \mathbb{F}[x] : f(A) = 0\} = \{f(x) \in \mathbb{F}[x] : f(B) = 0\}.$$

Logo os polinómios mínimos de A e de B coincidem. \square

Proposição

Matrizes semelhantes têm o mesmo polinómio mínimo.

Demonstração:

Sejam $A, B \in \mathbb{F}^{n \times n}$ matrizes semelhantes.

Então existe $P \in \mathbb{F}^{n \times n}$ invertível tal que $B = P^{-1}AP$.

Para qualquer $f(x) \in \mathbb{F}[x]$, temos que $f(P^{-1}AP) = P^{-1}f(A)P$ e portanto,

$$\{f(x) \in \mathbb{F}[x] : f(A) = 0\} = \{f(x) \in \mathbb{F}[x] : f(B) = 0\}.$$

Logo os polinómios mínimos de A e de B coincidem. \square

Proposição

Matrizes semelhantes têm o mesmo polinómio mínimo.

Demonstração:

Sejam $A, B \in \mathbb{F}^{n \times n}$ matrizes semelhantes.

Então existe $P \in \mathbb{F}^{n \times n}$ invertível tal que $B = P^{-1}AP$.

Para qualquer $f(x) \in \mathbb{F}[x]$, temos que $f(P^{-1}AP) = P^{-1}f(A)P$ e portanto,

$$\{f(x) \in \mathbb{F}[x] : f(A) = 0\} = \{f(x) \in \mathbb{F}[x] : f(B) = 0\}.$$

Logo os polinómios mínimos de A e de B coincidem. \square

Proposição

Matrizes semelhantes têm o mesmo polinómio mínimo.

Demonstração:

Sejam $A, B \in \mathbb{F}^{n \times n}$ matrizes semelhantes.

Então existe $P \in \mathbb{F}^{n \times n}$ invertível tal que $B = P^{-1}AP$.

Para qualquer $f(x) \in \mathbb{F}[x]$, temos que $f(P^{-1}AP) = P^{-1}f(A)P$ e portanto,

$$\{f(x) \in \mathbb{F}[x] : f(A) = 0\} = \{f(x) \in \mathbb{F}[x] : f(B) = 0\}.$$

Logo os polinómios mínimos de A e de B coincidem. \square

Proposição

Matrizes semelhantes têm o mesmo polinómio mínimo.

Demonstração:

Sejam $A, B \in \mathbb{F}^{n \times n}$ matrizes semelhantes.

Então existe $P \in \mathbb{F}^{n \times n}$ invertível tal que $B = P^{-1}AP$.

Para qualquer $f(x) \in \mathbb{F}[x]$, temos que $f(P^{-1}AP) = P^{-1}f(A)P$ e portanto,

$$\{f(x) \in \mathbb{F}[x] : f(A) = 0\} = \{f(x) \in \mathbb{F}[x] : f(B) = 0\}.$$

Logo os polinómios mínimos de A e de B coincidem. \square

Carlson, D. e Schneider, H. (1963) apresentam um resultado geral que podemos particularizar para matrizes não derogatórias.

Teorema

Seja $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ não derogatória. Então existe $H \in \mathbb{C}^{n \times n}$ definida positiva se e só se A é semiestável positiva (todos os seus valores próprios têm parte real não negativa) e não tem valores próprios imaginários (puros) múltiplos.

Carlson, D. e Schneider, H. (1963) apresentam um resultado geral que podemos particularizar para matrizes não derogatórias.

Teorema

Seja $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ não derogatória. Então existe $H \in \mathbb{C}^{n \times n}$ definida positiva se e só se A é semiestável positiva (todos os seus valores próprios têm parte real não negativa) e não tem valores próprios imaginários (puros) múltiplos.

Alguns Resultados

A inércia de uma matriz é um invariante para a semelhança, no entanto, não caracteriza completamente a sua classe de semelhança. Partindo de relações entre as inércias de matrizes, DeAlba, L. M. e Johnson, C. R. (1995) apresentam alguns resultados, como por exemplo o seguinte Teorema:

Teorema

Se $\pi_h, \nu_h, \delta_h, \pi_k, \nu_k, \delta_k, \pi_a, \nu_a, \delta_a$ são inteiros não negativos tais que $0 < \pi_h, \nu_h \leq \pi_k + \nu_k$ e

$$\pi_h + \nu_h + \delta_h = \pi_k + \nu_k + \delta_k = \pi_a + \nu_a + \delta_a = n$$

então existem $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ invertível e $H, K \in \mathbb{C}^{n \times n}$ hermíticas tais que

- $AH + HA^* = K$;
- $In(H) = (\pi_h, \nu_h, \delta_h)$, $In(K) = (\pi_k, \nu_k, \delta_k)$ e $In(A) = (\pi_a, \nu_a, \delta_a)$.

Alguns Resultados

A inércia de uma matriz é um invariante para a semelhança, no entanto, não caracteriza completamente a sua classe de semelhança. Partindo de relações entre as inércias de matrizes, DeAlba, L. M. e Johnson, C. R. (1995) apresentam alguns resultados, como por exemplo o seguinte Teorema:

Teorema

Se $\pi_h, \nu_h, \delta_h, \pi_k, \nu_k, \delta_k, \pi_a, \nu_a, \delta_a$ são inteiros não negativos tais que $0 < \pi_h, \nu_h \leq \pi_k + \nu_k$ e

$$\pi_h + \nu_h + \delta_h = \pi_k + \nu_k + \delta_k = \pi_a + \nu_a + \delta_a = n$$

então existem $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ invertível e $H, K \in \mathbb{C}^{n \times n}$ hermíticas tais que

- $AH + HA^* = K$;
- $\text{In}(H) = (\pi_h, \nu_h, \delta_h)$, $\text{In}(K) = (\pi_k, \nu_k, \delta_k)$ e $\text{In}(A) = (\pi_a, \nu_a, \delta_a)$.

Alguns Resultados

A inércia de uma matriz é um invariante para a semelhança, no entanto, não caracteriza completamente a sua classe de semelhança. Partindo de relações entre as inércias de matrizes, DeAlba, L. M. e Johnson, C. R. (1995) apresentam alguns resultados, como por exemplo o seguinte Teorema:

Teorema

Se $\pi_h, \nu_h, \delta_h, \pi_k, \nu_k, \delta_k, \pi_a, \nu_a, \delta_a$ são inteiros não negativos tais que $0 < \pi_h, \nu_h \leq \pi_k + \nu_k$ e

$$\pi_h + \nu_h + \delta_h = \pi_k + \nu_k + \delta_k = \pi_a + \nu_a + \delta_a = n$$

então existem $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ invertível e $H, K \in \mathbb{C}^{n \times n}$ hermiticas tais que

- $AH + HA^* = K$;
- $\text{In}(H) = (\pi_h, \nu_h, \delta_h)$, $\text{In}(K) = (\pi_k, \nu_k, \delta_k)$ e $\text{In}(A) = (\pi_a, \nu_a, \delta_a)$.

Alguns Resultados

A inércia de uma matriz é um invariante para a semelhança, no entanto, não caracteriza completamente a sua classe de semelhança. Partindo de relações entre as inércias de matrizes, DeAlba, L. M. e Johnson, C. R. (1995) apresentam alguns resultados, como por exemplo o seguinte Teorema:

Teorema

Se $\pi_h, \nu_h, \delta_h, \pi_k, \nu_k, \delta_k, \pi_a, \nu_a, \delta_a$ são inteiros não negativos tais que $0 < \pi_h, \nu_h \leq \pi_k + \nu_k$ e

$$\pi_h + \nu_h + \delta_h = \pi_k + \nu_k + \delta_k = \pi_a + \nu_a + \delta_a = n$$

então existem $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ invertível e $H, K \in \mathbb{C}^{n \times n}$ hermíticas tais que

- $AH + HA^* = K$;
- $\text{In}(H) = (\pi_h, \nu_h, \delta_h)$, $\text{In}(K) = (\pi_k, \nu_k, \delta_k)$ e $\text{In}(A) = (\pi_a, \nu_a, \delta_a)$.

Alguns Resultados

A inércia de uma matriz é um invariante para a semelhança, no entanto, não caracteriza completamente a sua classe de semelhança. Partindo de relações entre as inércias de matrizes, DeAlba, L. M. e Johnson, C. R. (1995) apresentam alguns resultados, como por exemplo o seguinte Teorema:

Teorema

Se $\pi_h, \nu_h, \delta_h, \pi_k, \nu_k, \delta_k, \pi_a, \nu_a, \delta_a$ são inteiros não negativos tais que $0 < \pi_h, \nu_h \leq \pi_k + \nu_k$ e

$$\pi_h + \nu_h + \delta_h = \pi_k + \nu_k + \delta_k = \pi_a + \nu_a + \delta_a = n$$

então existem $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ invertível e $H, K \in \mathbb{C}^{n \times n}$ hermiticas tais que

- $AH + HA^* = K;$
- $\text{In}(H) = (\pi_h, \nu_h, \delta_h), \text{In}(K) = (\pi_k, \nu_k, \delta_k)$ e $\text{In}(A) = (\pi_a, \nu_a, \delta_a).$

Alguns Resultados

A inércia de uma matriz é um invariante para a semelhança, no entanto, não caracteriza completamente a sua classe de semelhança. Partindo de relações entre as inércias de matrizes, DeAlba, L. M. e Johnson, C. R. (1995) apresentam alguns resultados, como por exemplo o seguinte Teorema:

Teorema

Se $\pi_h, \nu_h, \delta_h, \pi_k, \nu_k, \delta_k, \pi_a, \nu_a, \delta_a$ são inteiros não negativos tais que $0 < \pi_h, \nu_h \leq \pi_k + \nu_k$ e

$$\pi_h + \nu_h + \delta_h = \pi_k + \nu_k + \delta_k = \pi_a + \nu_a + \delta_a = n$$

então existem $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ invertível e $H, K \in \mathbb{C}^{n \times n}$ hermiticas tais que

- $AH + HA^* = K$;
- $\text{In}(H) = (\pi_h, \nu_h, \delta_h)$, $\text{In}(K) = (\pi_k, \nu_k, \delta_k)$ e $\text{In}(A) = (\pi_a, \nu_a, \delta_a)$.

Silva, F. C. e Simões, R. (2007) apresentam um resultado que generaliza um artigo de DeAlba, L. M. (1996), que é o seguinte:

Teorema

Sejam $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ e $\pi_h, \nu_h, \pi_k, \nu_k, \delta_k$ inteiros não negativos tais que $\pi_h + \nu_h = \pi_k + \nu_k + \delta_k = n$. Se A é não derogatória e $\min\{\pi_k, \nu_k\} > 0$, então existem matrizes Hermíticas $H, K \in \mathbb{C}^{n \times n}$ tais que

- $AH + HA^* = K$;
- $\text{In}(H) = (\pi_h, \nu_h, 0)$ e $\text{In}(K) = (\pi_k, \nu_k, \delta_k)$.

Silva, F. C. e Simões, R. (2007) apresentam um resultado que generaliza um artigo de DeAlba, L. M. (1996), que é o seguinte:

Teorema

Sejam $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ e $\pi_h, \nu_h, \pi_k, \nu_k, \delta_k$ inteiros não negativos tais que $\pi_h + \nu_h = \pi_k + \nu_k + \delta_k = n$. Se A é não derogatória e $\min\{\pi_k, \nu_k\} > 0$, então existem matrizes Hermíticas $H, K \in \mathbb{C}^{n \times n}$ tais que

- $AH + HA^* = K$;
- $\text{In}(H) = (\pi_h, \nu_h, 0)$ e $\text{In}(K) = (\pi_k, \nu_k, \delta_k)$.

Silva, F. C. e Simões, R. (2007) apresentam um resultado que generaliza um artigo de DeAlba, L. M. (1996), que é o seguinte:

Teorema

Sejam $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ e $\pi_h, \nu_h, \pi_k, \nu_k, \delta_k$ inteiros não negativos tais que $\pi_h + \nu_h = \pi_k + \nu_k + \delta_k = n$. Se A é não derogatória e $\min\{\pi_k, \nu_k\} > 0$, então existem matrizes Hermíticas $H, K \in \mathbb{C}^{n \times n}$ tais que

- $AH + HA^* = K$;
- $\text{In}(H) = (\pi_h, \nu_h, 0)$ e $\text{In}(K) = (\pi_k, \nu_k, \delta_k)$.

Silva, F. C. e Simões, R. (2007) apresentam um resultado que generaliza um artigo de DeAlba, L. M. (1996), que é o seguinte:

Teorema

Sejam $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ e $\pi_h, \nu_h, \pi_k, \nu_k, \delta_k$ inteiros não negativos tais que $\pi_h + \nu_h = \pi_k + \nu_k + \delta_k = n$. Se A é não derogatória e $\min\{\pi_k, \nu_k\} > 0$, então existem matrizes Hermíticas $H, K \in \mathbb{C}^{n \times n}$ tais que

- $AH + HA^* = K$;
- $\text{In}(H) = (\pi_h, \nu_h, 0)$ e $\text{In}(K) = (\pi_k, \nu_k, \delta_k)$.

Silva, F. C. e Simões, R. (2007) apresentam um resultado que generaliza um artigo de DeAlba, L. M. (1996), que é o seguinte:

Teorema

Sejam $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ e $\pi_h, \nu_h, \pi_k, \nu_k, \delta_k$ inteiros não negativos tais que $\pi_h + \nu_h = \pi_k + \nu_k + \delta_k = n$. Se A é não derogatória e $\min\{\pi_k, \nu_k\} > 0$, então existem matrizes Hermíticas $H, K \in \mathbb{C}^{n \times n}$ tais que

- $AH + HA^* = K$;
- $\text{In}(H) = (\pi_h, \nu_h, 0)$ e $\text{In}(K) = (\pi_k, \nu_k, \delta_k)$.

- **Brualdi, R.A.**, *A tribute to Hans Schneider*, Linear Algebra and its Applications 302-303 (1999) 3-16.
- **Carlson, D. e Schneider, H.**, *Inertia theorems for matrices: the semidefinite case*, J. Math. Anal. Appl. 6 (1963) 430-446.
- **DeAlba, L.M. e Johnson, C.R.**, *Possible Inertia combinations in the Stein and Lyapunov equations*, Linear Algebra Appl. 222 (1995) 227-240.
- **DeAlba, L.M.**, *Inertia of the Stein transformation with respect to some nonderogatory matrices*, Linear Algebra Appl. 241/243 (1996) 191-201.

- **Ostrowski, A. e Schneider, H.**, *Some theorems on the inertia of general matrices*, J. Math. Anal. Appl. 4 (1962) 72-84.
- **Silva, Fernando C. e Simões, R.**, *On the Lyapunov and Stein Equations*, Linear Algebra Appl. 420 (2007) 329-338.
- **Silva, Fernando C. e Simões, R.**, *On the Lyapunov and Stein Equations, II*, Linear Algebra Appl. 426 (2007) 305-311.
- **Taussky-Todd, O.**, *A generalization of a theorem of Lyapunov*, J. Soc. Indus. Appl. Math. 9 (1961) 640-643.