

Cálculo Umbral

Raimundo Leong

Tutor: António Machiavelo

30 de Abril, 2007

Programa Gulbenkian *Novos Talentos em Matemática*

2006/2007

Somas de Potências

Jacob Bernoulli (séc. XVII): *Quanto é $\sum_{k=0}^{1000} k^{10}$?*

Notação: $p \in \mathbb{N}$

$$\sum_{k=0}^{x-1} k^p = S_p(x)$$

$x \in \mathbb{N}$

$$S_p(x) = S_p$$

$$S_{10}(1001) = ?$$

$$S_1(x) = \sum_{k=0}^{x-1} k = \frac{x(x-1)}{2} \quad S_2(x) = ?$$

$$(x+1)^3 - x^3 = 3x^2 + 3x + 1$$

$$1^3 - 0^3 = 3 \times 0^2 + 3 \times 0 + 1$$

$$2^3 - 1^3 = 3 \times 1^2 + 3 \times 1 + 1$$

$$\vdots$$

$$x^3 - (x-1)^3 = 3(x-1)^2 + 3(x-1) + 1$$

$$x^3 = 3S_2(x) + 3S_1(x) + x$$

$$\begin{aligned}
 3S_2(x) &= x^3 - x - 3S_1(x) \\
 &= x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}x
 \end{aligned}$$

$$S_p(x) = ?$$

f polinómio

$$f(x+1) - f(x) = a_0x^p + a_1x^{p-1} + \dots + a_px^0$$

$$f(1) - f(0) = \sum_{k=0}^n a_k 0^{p-k}$$

$$f(2) - f(1) = \sum_{k=0}^n a_k 1^{p-k}$$

$$\vdots$$

$$f(x) - f(x-1) = \sum_{k=0}^n a_k (x-1)^{p-k}$$

$$f(x) - f(0) = \sum_{k=0}^n a_k S_{p-k}$$

- $f(x+1) - f(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^{p-k}$

$$\begin{aligned}
 f(x) - f(0) &= \sum_{k=0}^n a_k S_{p-k} \\
 &\doteq \sum_{k=0}^n a_k S^{p-k} \\
 &= f(S+1) - f(S)
 \end{aligned}$$

Identidade Fundamental de S

$$f(S+1) - f(S) \simeq f(x) - f(0)$$

Corolário

$$S_{p-1} = \sum_{k=0}^{x-1} k^{p-1}$$

- *é um polinómio em x de grau p*
- *o coeficiente de x^p é $\frac{1}{p}$*
- *não tem termo constante*

Exemplo: $3S_2(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}x$

$$f(S+1) - f(S) \doteq f(x) - f(0)$$

Demonstração: (Por indução sobre p)

Seja $f(x) = x^p$.

$$\begin{aligned} (S+1)^p - S^p &= \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} S^k - S^p \\ &\doteq \sum_{k=0}^{p-1} \binom{p}{k} S^k \\ &= x^p \quad \square \end{aligned}$$

- $f(x) = x^p$

$$(S+1)^p - S^p \simeq \sum_{k=0}^{p-1} \binom{p}{k} S_k = x^p$$

- $f(x) = (x-1)^p$

$$S^p - (S-1)^p \simeq \sum_{k=0}^{p-1} \binom{p}{k} (-1)^{p-k} S_k = (x-1)^p - (-1)^p$$

⋮

$$S_{p-1}(x) = \sum_{k=0}^{x-1} k^{p-1}$$

- é um polinómio em x de grau p
- o coeficiente de x^p é $\frac{1}{p}$
- não tem termo constante

Exemplo: $3S_2(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}x$

$$\begin{aligned} pS_{p-1}(x) &= a_0x^p + a_1x^{p-1} + \cdots + a_{p-1}x \\ &= \binom{p}{0} B_0x^p + \binom{p}{1} B_1x^{p-1} + \cdots + \binom{p}{p-1} B_{p-1}x \\ &\doteq (x+B)^p - B^p \end{aligned}$$

$(B_n)_n$ - Números de Bernoulli

- $S_{p-1}(x) = \sum_{k=0}^{x-1} k^{p-1}$
- $pS_{p-1}(x) = (x+B)^p - B^p$

$$pS_{p-1}(x+1) - pS_{p-1}(x) =$$

$$\begin{aligned}
 px^{p-1} &\doteq (x+1+B)^p - (x+B)^p \\
 &= \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} x^{p-k} ((B+1)^k - B^k)
 \end{aligned}$$

- $(B + 1)^k - B^k \simeq \delta_{k,1}$

$$B_0 = 1$$

$$B_1 = -\frac{1}{2}$$

$$B_2 = \frac{1}{6}$$

$$B_3 = 0$$

$$B_4 = -\frac{1}{30}$$

$$B_5 = 0$$

$$\vdots$$

Teorema

$$pS_{p-1}(x) \doteq (x+B)^p - B^p \doteq \sum_{k=0}^{p-1} \binom{p}{k} x^{p-k} B_k$$

onde $(B_n)_n$ é a sucessão dos números de Bernoulli.

Questão:

$$\sum_{k=0}^{x-1} f(k) = ?$$

(f polinómio)

Identidade Fundamental de B

$$f(x+1+B) - f(x+B) \simeq f'(x)$$

(f polinómio)

Demonstração: Seja $f(x) = a_0x^p + a_1x^{p-1} + \dots + a_px^0$.

- $(x+1+B)^p - (x+B)^p \simeq px^{p-1}$

$$\begin{aligned} f(x+1+B) &\simeq a_0(x+1+B)^p + a_1(x+1+B)^{p-1} + \dots + a_p(x+1+B)^0 \\ f(x+B) &\simeq a_0(x+B)^p + a_1(x+B)^{p-1} + \dots + a_p(x+B)^0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(x+1+B) - f(x+B) &\simeq a_0px^{p-1} + a_1(p-1)x^{p-2} + \dots + a_px^0 \\ &= f'(x) \quad \square \end{aligned}$$

$$f(x+1+B) - f(x+B) \simeq f'(x)$$

Exemplo: $f(x) = (2x-1)^p$ em $x=0$

$$(2B+1)^p - (2B-1)^p \simeq 2p(-1)^{p-1}$$

$$\vdots$$

- $f(x+1+B) - f(x+B) \simeq f'(x)$

F uma primitiva de f ,

$$f(x) \simeq F(x+1+B) - F(x+B)$$

$$x = 0, 1, 2, \dots, n-1$$

$$f(0) + f(1) + f(2) + \dots + f(n-1) \simeq F(n+B) - F(B)$$

$$\sum_{k=0}^{n-1} f(k) \simeq \int_B^{n+B} f(x) dx$$

Teorema

$$\sum_{k=0}^{n-1} f(k) \simeq \int_B^{n+B} f(x) dx$$

Corolário

(Generalização do teorema)

$$\sum_{x=0}^{n-1} f(rx + j) \simeq \frac{1}{r} \int_{rB+j}^{r(n+B)+j} f(x) dx, r \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, j \in \mathbb{R}$$

$$\sum_{k=0}^{n-1} f(k) \simeq \int_B^{n+B} f(x) dx$$

Exemplo: $f(x) = x^2 + 2x$

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n-1} f(k) &\simeq \frac{1}{3}((n+B)^3 - B^3) + (n+B)^2 - B^2 \\ &\simeq nB_2 + n^2B_1 + \frac{1}{3}n^3B_0 + 2nB_1 + n^2B_0 \\ &= \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 - \frac{5}{6}n \end{aligned}$$

Questão:

$S? B? \simeq?$

Cálculo Umbral?

Outras aplicações?

Estrutura

O Cálculo Umbral consiste em:

- A , **alfabeto** cujos elementos são **sombras** (ex: S)
- D , um domínio de integridade comutativo (ex: \mathbb{R})
- $D[A]$, anel dos **polinômios umbrais** (ex: $(B+1)^p - B^p$)
- $L : D[A] \rightarrow D$ uma função linear tal que: $L(1) = 1$, onde 1 é a identidade de D ; se a, b, \dots, c são sombras distintas e i, j, \dots, k inteiros não negativos, então

$$L(a^i b^j \cdots c^k) = L(a^i) L(b^j) \cdots L(c^k)$$

- Um elemento constante ε de A tal que

$$L(\varepsilon^n) = \delta_{n,0}$$

Definições

- a é uma **sombra** de $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ sse

$$L(a^n) = a_n, \forall n \in \mathbb{N}_0$$

(ex: S é sombra de S_p)

- p e q são **umbralmente equivalentes** ($p \simeq q$) sse

$$L(p) = L(q)$$

Em particular, $a^n \simeq a_n \Leftrightarrow L(a^n) = a_n$. (ex: $S^p \simeq S_p$)

- p é **substituível** por q ($p \equiv q$) se

$$L(p^n) = L(q^n), \forall n \in \mathbb{N}_0$$

(ex: $B + 1 \equiv -B$)

Aplicações

- Combinatória
- Cálculo de algumas séries, por exemplo:

$$2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{2n}} = (-1)^{n+1} \frac{(2\pi)^{2n}}{(2n)!} B_{2n}$$

- Provas da Fórmula interpoladora de Newton e da Fórmula de Taylor
- Relações entre termos de uma sucessão definida por recorrência
- ...

Voltando à questão de Jacob Bernoulli...

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=0}^{1000} k^{10} &= S_{10}(1000) + 1000^{10} \\
 &\doteq \frac{1}{11} ((1000 + B)^{11} - B^{11}) + 1000^{10} \\
 &\doteq \frac{1}{11} \sum_{k=0}^{10} \binom{11}{k} B_k 1000^{11-k} + 1000^{10} \\
 &= 91409924241424243424241924242500
 \end{aligned}$$

Bibliografia

- M. Lalín, *Bernoulli numbers*, Junior Number Theory Seminar - University of Texas at Austin, September 6th, 2005.
- E. Lucas, *Théorie des nombres*, Gauthier-Villars, Paris, 1891.
- G.-C. Rota, B.D. Taylor, *The Classical Umbral Calculus*, SIAM Journal on Mathematical Analysis, Vol. 25, No. 2, p.694-711, March 1994.
- P. Sebah, X. Gourdon, *Introduction on Bernoulli's numbers*,
<http://numbers.computation.free.fr/Constants/Miscellaneous/bernoulli.html>