

O Anel dos Adelos dos Racionais

Edgar Costa

Encontro Nacional NTM, 2007

Tópicos

- 1 p -Ádicos
 - Introdução
 - A Métrica
 - \mathbb{Q}_p
- 2 Anel dos Adelos ($\mathbb{A}_{\mathbb{Q}}$)
- 3 Grupos Duais
 - Introdução
 - $\hat{\mathbb{Q}} \cong \mathbb{A}_{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}$
 - $\hat{\mathbb{Q}} \cong \varprojlim \mathbb{R}/n\mathbb{Z}$

Tópicos

- 1 p -Ádicos
 - Introdução
 - A Métrica
 - \mathbb{Q}_p
- 2 Anel dos Adelos ($\mathbb{A}_{\mathbb{Q}}$)
- 3 Grupos Duais
 - Introdução
 - $\hat{\mathbb{Q}} \cong \mathbb{A}_{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}$
 - $\hat{\mathbb{Q}} \cong \mathbb{R}/n\mathbb{Z}$

Introdução aos p -Ádicos

- Completação de um espaço, o que é?

Construção sempre possível e única.

- \mathbb{R} é uma completção de \mathbb{Q} .

- Cada \mathbb{Q}_p (corpo p -ádico) também é uma completção de \mathbb{Q} .¹

Quais são as diferenças?

- A métrica!

(x_n) é Cauchy sse $\forall \epsilon \exists_N n, m > N \Rightarrow d(x_n, x_m) < \epsilon$

¹em que p é um primo.

Introdução aos p -Ádicos

- Completação de um espaço, o que é?
Construção sempre possível e única.
- \mathbb{R} é uma completção de \mathbb{Q} .
- Cada \mathbb{Q}_p (corpo p -ádico) também é uma completção de \mathbb{Q} .¹
Qual é a diferença?
- A métrica!
 (x_n) é Cauchy sse $\forall \epsilon \exists_N n, m > N \Rightarrow d(x_n, x_m) < \epsilon$

¹em que p é um primo.

Introdução aos p -Ádicos

- Completação de um espaço, o que é?
Construção sempre possível e única.
- \mathbb{R} é uma completação de \mathbb{Q} .
- Cada \mathbb{Q}_p (corpo p -ádico) também é uma completação de \mathbb{Q} .¹
Como são as diferenças?
- A métrica!
(x_n) é Cauchy sse $\forall \epsilon \exists_N n, m > N \Rightarrow d(x_n, x_m) < \epsilon$

¹em que p é um primo.

Introdução aos p -Ádicos

- Completação de um espaço, o que é?
Construção sempre possível e única.
- \mathbb{R} é uma completção de \mathbb{Q} .
- Cada \mathbb{Q}_p (corpo p -ádico) também é uma completção de \mathbb{Q} .¹

Quais são as diferenças?

- A métrica!

(x_n) é Cauchy sse $\forall \epsilon \exists_N n, m > N \Rightarrow d(x_n, x_m) < \epsilon$

¹em que p é um primo.

Introdução aos p -Ádicos

- Completação de um espaço, o que é?
Construção sempre possível e única.
- \mathbb{R} é uma completação de \mathbb{Q} .
- Cada \mathbb{Q}_p (corpo p -ádico) também é uma completação de \mathbb{Q} .¹
Quais são as diferenças?

• A métrica!

(x_n) é Cauchy sse $\forall \epsilon \exists_N n, m > N \Rightarrow d(x_n, x_m) < \epsilon$

¹em que p é um primo.

Introdução aos p -Ádicos

- Completação de um espaço, o que é?
Construção sempre possível e única.
- \mathbb{R} é uma completação de \mathbb{Q} .
- Cada \mathbb{Q}_p (corpo p -ádico) também é uma completação de \mathbb{Q} .¹
Quais são as diferenças?
- A métrica!
(x_n) é Cauchy sse $\forall \epsilon \exists_N n, m > N \Rightarrow d(x_n, x_m) < \epsilon$

¹em que p é um primo.

Tópicos

- 1 p -Ádicos
 - Introdução
 - **A Métrica**
 - \mathbb{Q}_p
- 2 Anel dos Adelos ($\mathbb{A}_{\mathbb{Q}}$)
- 3 Grupos Duais
 - Introdução
 - $\hat{\mathbb{Q}} \cong \mathbb{A}_{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}$
 - $\hat{\mathbb{Q}} \cong \mathbb{R}/n\mathbb{Z}$

A Métrica

Definição

- $\text{ord}_{p_n}(\pm \prod_{\mathbb{P}} p_i^{\alpha_i}) = \alpha_n$
- $|\cdot|_p : \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{R}$
 $x \longrightarrow p^{-\text{ord}_p(x)}$
- $d_p(x, y) = |x - y|_p$

Exemplo

$$x = \frac{17}{8} \quad |x|_2 = 8 \quad |x|_{17} = \frac{1}{17} \quad \forall p \neq 2, 17 |x|_p = 1 \quad |x|_{\infty} = x$$

- $d_p(x, y) \leq \max\{d_p(x, z), d_p(y, z)\}$
 - $\sum_{\mathbb{N}} b_n$ converge sse $\lim b_n = 0$
 - Se duas bolas se intersectarem então uma está contida na outra.

A Métrica

Definição

- $\text{ord}_{p_n}(\pm \prod_{\mathbb{P}} p_i^{\alpha_i}) = \alpha_n$
- $|\cdot|_p : \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{R}$
 $x \longrightarrow p^{-\text{ord}_p(x)}$
- $d_p(x, y) = |x - y|_p$

Exemplo

$$x = \frac{17}{8} \quad |x|_2 = 8 \quad |x|_{17} = \frac{1}{17} \quad \forall_{p \neq 2, 17} |x|_p = 1 \quad |x|_{\infty} = x$$

- $d_p(x, y) \leq \max\{d_p(x, z), d_p(y, z)\}$
 - $\sum_{\mathbb{N}} b_n$ converge sse $\lim b_n = 0$
 - Se duas bolas se intersectarem então uma está contida na outra.

A Métrica

Definição

- $\text{ord}_{p_n}(\pm \prod_{\mathbb{P}} p_i^{\alpha_i}) = \alpha_n$
- $|\cdot|_p : \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{R}$
 $x \longrightarrow p^{-\text{ord}_p(x)}$
- $d_p(x, y) = |x - y|_p$

Exemplo

$$x = \frac{17}{8} \quad |x|_2 = 8 \quad |x|_{17} = \frac{1}{17} \quad \forall_{p \neq 2, 17} |x|_p = 1 \quad |x|_{\infty} = x$$

- $d_p(x, y) \leq \max\{d_p(x, z), d_p(y, z)\}$
 - $\sum_{\mathbb{N}} b_n$ converge sse $\lim b_n = 0$
 - Se duas bolas se intersectarem então uma está contida na outra.

A Métrica

Definição

- $\text{ord}_{p_n}(\pm \prod_{\mathbb{P}} p_i^{\alpha_i}) = \alpha_n$
- $|\cdot|_p : \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{R}$
 $x \longrightarrow p^{-\text{ord}_p(x)}$
- $d_p(x, y) = |x - y|_p$

Exemplo

$$x = \frac{17}{8} \quad |x|_2 = 8 \quad |x|_{17} = \frac{1}{17} \quad \forall_{p \neq 2, 17} |x|_p = 1 \quad |x|_{\infty} = x$$

- $d_p(x, y) \leq \max\{d_p(x, z), d_p(y, z)\}$
- $\sum_{\mathbb{N}} b_n$ converge sse $\lim b_n = 0$
- Se duas bolas se intersectarem então uma está contida na outra.

A Métrica

Definição

- $\text{ord}_{p_n}(\pm \prod_{\mathbb{P}} p_i^{\alpha_i}) = \alpha_n$
- $|\cdot|_p : \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{R}$
 $x \longrightarrow p^{-\text{ord}_p(x)}$
- $d_p(x, y) = |x - y|_p$

Exemplo

$$x = \frac{17}{8} \quad |x|_2 = 8 \quad |x|_{17} = \frac{1}{17} \quad \forall_{p \neq 2, 17} |x|_p = 1 \quad |x|_{\infty} = x$$

- $d_p(x, y) \leq \max\{d_p(x, z), d_p(y, z)\}$
 - $\sum_{\mathbb{N}} b_n$ converge sse $\lim b_n = 0$
 - Se duas bolas se intersectarem então uma está contida na outra.

A Métrica

Definição

- $\text{ord}_{p_n}(\pm \prod_{\mathbb{P}} p_i^{\alpha_i}) = \alpha_n$
- $|\cdot|_p : \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{R}$
 $x \longrightarrow p^{-\text{ord}_p(x)}$
- $d_p(x, y) = |x - y|_p$

Exemplo

$$x = \frac{17}{8} \quad |x|_2 = 8 \quad |x|_{17} = \frac{1}{17} \quad \forall_{p \neq 2, 17} |x|_p = 1 \quad |x|_{\infty} = x$$

- $d_p(x, y) \leq \max\{d_p(x, z), d_p(y, z)\}$
 - $\sum_{\mathbb{N}} b_n$ converge sse $\lim b_n = 0$
 - Se duas bolas se intersectarem então uma está contida na outra.

A Métrica

Definição

- $\text{ord}_{p_n}(\pm \prod_{\mathbb{P}} p_i^{\alpha_i}) = \alpha_n$
- $|\cdot|_p : \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{R}$
 $x \longrightarrow p^{-\text{ord}_p(x)}$
- $d_p(x, y) = |x - y|_p$

Exemplo

$$x = \frac{17}{8} \quad |x|_2 = 8 \quad |x|_{17} = \frac{1}{17} \quad \forall_{p \neq 2, 17} |x|_p = 1 \quad |x|_{\infty} = x$$

- $d_p(x, y) \leq \max\{d_p(x, z), d_p(y, z)\}$
 - $\sum_{\mathbb{N}} b_n$ converge sse $\lim b_n = 0$
 - Se duas bolas se intersectarem então uma está contida na outra.

Tópicos

- 1 p -Ádicos
 - Introdução
 - A Métrica
 - \mathbb{Q}_p
- 2 Anel dos Adelos ($\mathbb{A}_{\mathbb{Q}}$)
- 3 Grupos Duais
 - Introdução
 - $\hat{\mathbb{Q}} \cong \mathbb{A}_{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}$
 - $\hat{\mathbb{Q}} \cong \mathbb{R}/n\mathbb{Z}$

- $\mathcal{C} = \mathcal{C}_p(\mathbb{Q}) = \{(x_n) : (x_n) \text{ é Cauchy com respeito a } d_p\}$
 $\mathcal{N} = \{(x_n) : \lim |x_n|_p = 0\}$
 - $\mathbb{Q}_p = \mathcal{C}/\mathcal{N}$
 - $\mathbb{Q}_p = \{\sum_{k \geq n} a_k p^k : a_k \in \{0, 1, \dots, p-1\}, n \in \mathbb{Z}\}$

- $\mathcal{C} = \mathcal{C}_p(\mathbb{Q}) = \{(x_n) : (x_n) \text{ é Cauchy com respeito a } d_p\}$
 $\mathcal{N} = \{(x_n) : \lim |x_n|_p = 0\}$
- $\mathbb{Q}_p = \mathcal{C}/\mathcal{N}$
- $\mathbb{Q}_p = \{\sum_{k \geq n} a_k p^k : a_k \in \{0, 1, \dots, p-1\}, n \in \mathbb{Z}\}$

- $\mathcal{C} = \mathcal{C}_p(\mathbb{Q}) = \{(x_n) : (x_n) \text{ é Cauchy com respeito a } d_p\}$
 $\mathcal{N} = \{(x_n) : \lim |x_n|_p = 0\}$
- $\mathbb{Q}_p = \mathcal{C}/\mathcal{N}$
- $\mathbb{Q}_p = \{\sum_{k \geq n} a_k p^k : a_k \in \{0, 1, \dots, p-1\}, n \in \mathbb{Z}\}$

$$X^2 \equiv 2 \pmod{7^n}$$

- $n=1 \quad X \equiv 3, 4$
 $n=2 \quad X \equiv 10, 39$
 $n=3 \quad X \equiv 108, 235$
 $n=4 \quad X \equiv 2166, 235$
Este processo pode ser continuado indefinidamente
- Temos então duas soluções: $x_1 = (3, 10, 108, 2166, \dots)$
ou $x_2 = (4, 39, 235, 235, \dots) = (-3, -10, -108, -2166, \dots) = -x_1$
- $\alpha_{n+1} \equiv \alpha_n \pmod{7^n}$

$$X^2 \equiv 2 \pmod{7^n}$$

- $n = 1 \quad X \equiv 3, 4 \qquad n = 2 \quad X \equiv 10, 39$
 $n = 3 \quad X \equiv 108, 235 \quad n = 4 \quad X \equiv 2166, 235$
Este processo pode ser continuado indefinidamente
- Temos então duas soluções: $x_1 = (3, 10, 108, 2166, \dots)$
ou $x_2 = (4, 39, 235, 235, \dots) = (-3, -10, -108, -2166, \dots) = -x_1$
- $\alpha_{n+1} \equiv \alpha_n \pmod{7^n}$

$$X^2 \equiv 2 \pmod{7^n}$$

- $n=1 \quad X \equiv 3, 4 \qquad n=2 \quad X \equiv 10, 39$
 $n=3 \quad X \equiv 108, 235 \qquad n=4 \quad X \equiv 2166, 235$

Este processo pode ser continuado indefinidamente

- Temos então duas soluções: $x_1 = (3, 10, 108, 2166, \dots)$
ou $x_2 = (4, 39, 235, 235, \dots) = (-3, -10, -108, -2166, \dots) = -x_1$
- $\alpha_{n+1} \equiv \alpha_n \pmod{7^n}$

$$X^2 \equiv 2 \pmod{7^n}$$

- $n=1 \quad X \equiv 3, 4$
 $n=3 \quad X \equiv 108, 235$
- $n=2 \quad X \equiv 10, 39$
 $n=4 \quad X \equiv 2166, 235$

Este processo pode ser continuado indefinidamente

- Temos então duas soluções: $x_1 = (3, 10, 108, 2166, \dots)$
ou $x_2 = (4, 39, 235, 235, \dots) = (-3, -10, -108, -2166, \dots) = -x_1$
- $\alpha_{n+1} \equiv \alpha_n \pmod{7^n}$

$$X^2 \equiv 2 \pmod{7^n}$$

- $n=1 \quad X \equiv 3, 4 \qquad n=2 \quad X \equiv 10, 39$
 $n=3 \quad X \equiv 108, 235 \quad n=4 \quad X \equiv 2166, 235$

Este processo pode ser continuado indefenidamente

- Temos então duas soluções: $x_1 = (3, 10, 108, 2166, \dots)$
ou $x_2 = (4, 39, 235, 235, \dots) = (-3, -10, -108, -2166, \dots) = -x_1$
- $\alpha_{n+1} \equiv \alpha_n \pmod{7^n}$

$$X^2 \equiv 2 \pmod{7^n}$$

- $n = 1 \quad X \equiv 3, 4 \qquad n = 2 \quad X \equiv 10, 39$
 $n = 3 \quad X \equiv 108, 235 \quad n = 4 \quad X \equiv 2166, 235$
Este processo pode ser continuado indefenidamente
- Temos então duas soluções: $x_1 = (3, 10, 108, 2166, \dots)$
ou $x_2 = (4, 39, 235, 235, \dots) = (-3, -10, -108, -2166, \dots) = -x_1$
- $\alpha_{n+1} \equiv \alpha_n \pmod{7^n}$

$$X^2 \equiv 2 \pmod{7^n}$$

- $n = 1 \quad X \equiv 3, 4 \qquad n = 2 \quad X \equiv 10, 39$
 $n = 3 \quad X \equiv 108, 235 \quad n = 4 \quad X \equiv 2166, 235$

Este processo pode ser continuado indefenidamente

- Temos então duas soluções: $x_1 = (3, 10, 108, 2166, \dots)$
ou $x_2 = (4, 39, 235, 235, \dots) = (-3, -10, -108, -2166, \dots) = -x_1$
- $\alpha_{n+1} \equiv \alpha_n \pmod{7^n}$

$$X^2 \equiv 2 \pmod{7^n}$$

- $n=1 \quad X \equiv 3, 4 \qquad n=2 \quad X \equiv 10, 39$
 $n=3 \quad X \equiv 108, 235 \quad n=4 \quad X \equiv 2166, 235$

Este processo pode ser continuado indefenidamente

- Temos então duas soluções: $x_1 = (3, 10, 108, 2166, \dots)$
ou $x_2 = (4, 39, 235, 235, \dots) = (-3, -10, -108, -2166, \dots) = -x_1$
- $\alpha_{n+1} \equiv \alpha_n \pmod{7^n}$

$$X^2 \equiv 2 \pmod{7^n}$$

As sucessões são as soma parciais de uma expansão 7-ádica

$$\begin{aligned}x_1 &= (3, 10, 108, 2166, \dots) \\3 &= 3 \\10 &= 3 + 1 \times 7 \\108 &= 3 + 1 \times 7 + 2 \times 7^2 \\2166 &= 3 + 1 \times 7 + 2 \times 7^2 + 6 \times 7^3 \\&\dots\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x_2 &= (4, 39, 235, 235, \dots) \\4 &= 4 \\39 &= 4 + 5 \times 7 \\235 &= 4 + 5 \times 7 + 4 \times 7^2 \\235 &= 4 + 5 \times 7 + 4 \times 7^2 + 0 \times 7^3 \\&\dots\end{aligned}$$

$$X^2 \equiv 2 \pmod{7^n}$$

As sucessões são as soma parciais de uma expansão 7-ádica

$$\begin{aligned}x_1 &= (3, 10, 108, 2166, \dots) \\3 &= 3 \\10 &= 3 + 1 \times 7 \\108 &= 3 + 1 \times 7 + 2 \times 7^2 \\2166 &= 3 + 1 \times 7 + 2 \times 7^2 + 6 \times 7^3 \\&\dots\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x_2 &= (4, 39, 235, 235, \dots) \\4 &= 4 \\39 &= 4 + 5 \times 7 \\235 &= 4 + 5 \times 7 + 4 \times 7^2 \\235 &= 4 + 5 \times 7 + 4 \times 7^2 + 0 \times 7^3 \\&\dots\end{aligned}$$

- $\mathbb{Z}_p = \{x \in \mathbb{Q}_p : |x|_p \leq 1\}$
sub-anel maximal compacto de \mathbb{Q}_p
- $\mathbb{Z}_p = \{\sum_{k \geq 0} a_k p^k : a_k \in \{0, 1, \dots, p-1\}\}$
- $\mathbb{Z}_p = \varprojlim \mathbb{Z}/p^n \mathbb{Z} = \{(x_n) : x_n \in \mathbb{Z}/p^n \mathbb{Z} \text{ } \alpha_{n+1} \equiv \alpha_n \bmod p^n\}$
 $x_n = \sum_{k=0}^n a_k p^k$
- Existem outras completações de \mathbb{Q} ?
- Teorema de Ostrowski

- $\mathbb{Z}_p = \{x \in \mathbb{Q}_p : |x|_p \leq 1\}$
sub-anel maximal compacto de \mathbb{Q}_p
- $\mathbb{Z}_p = \{\sum_{k \geq 0} a_k p^k : a_k \in \{0, 1, \dots, p-1\}\}$
- $\mathbb{Z}_p = \varprojlim \mathbb{Z}/p^n \mathbb{Z} = \{(x_n) : x_n \in \mathbb{Z}/p^n \mathbb{Z} \text{ } \alpha_{n+1} \equiv \alpha_n \bmod p^n\}$
 $x_n = \sum_{k=0}^n a_k p^k$
- Existem outras completações de \mathbb{Q} ?
- Teorema de Ostrowski

- $\mathbb{Z}_p = \{x \in \mathbb{Q}_p : |x|_p \leq 1\}$
sub-anel maximal compacto de \mathbb{Q}_p
- $\mathbb{Z}_p = \{\sum_{k \geq 0} a_k p^k : a_k \in \{0, 1, \dots, p-1\}\}$
- $\mathbb{Z}_p = \varprojlim \mathbb{Z}/p^n \mathbb{Z} = \{(x_n) : x_n \in \mathbb{Z}/p^n \mathbb{Z} \text{ } \alpha_{n+1} \equiv \alpha_n \text{ mod } p^n\}$
 $x_n = \sum_{k=0}^n a_k p^k$
- Existem outras completções de \mathbb{Q} ?
- Teorema de Ostrowski

- $\mathbb{Z}_p = \{x \in \mathbb{Q}_p : |x|_p \leq 1\}$
sub-anel maximal compacto de \mathbb{Q}_p
- $\mathbb{Z}_p = \{\sum_{k \geq 0} a_k p^k : a_k \in \{0, 1, \dots, p-1\}\}$
- $\mathbb{Z}_p = \varprojlim \mathbb{Z}/p^n \mathbb{Z} = \{(x_n) : x_n \in \mathbb{Z}/p^n \mathbb{Z} \quad \alpha_{n+1} \equiv \alpha_n \bmod p^n\}$
 $x_n = \sum_{k=0}^n a_k p^k$
- Existem outras completações de \mathbb{Q} ?
- Teorema de Ostrowski

- $\mathbb{Z}_p = \{x \in \mathbb{Q}_p : |x|_p \leq 1\}$
sub-anel maximal compacto de \mathbb{Q}_p
- $\mathbb{Z}_p = \{\sum_{k \geq 0} a_k p^k : a_k \in \{0, 1, \dots, p-1\}\}$
- $\mathbb{Z}_p = \varprojlim \mathbb{Z}/p^n \mathbb{Z} = \{(x_n) : x_n \in \mathbb{Z}/p^n \mathbb{Z} \quad \alpha_{n+1} \equiv \alpha_n \bmod p^n\}$
 $x_n = \sum_{k=0}^n a_k p^k$
- Existem outras completações de \mathbb{Q} ?
- Teorema de Ostrowski

- $\mathbb{Z}_p = \{x \in \mathbb{Q}_p : |x|_p \leq 1\}$
sub-anel maximal compacto de \mathbb{Q}_p
- $\mathbb{Z}_p = \{\sum_{k \geq 0} a_k p^k : a_k \in \{0, 1, \dots, p-1\}\}$
- $\mathbb{Z}_p = \varprojlim \mathbb{Z}/p^n \mathbb{Z} = \{(x_n) : x_n \in \mathbb{Z}/p^n \mathbb{Z} \quad \alpha_{n+1} \equiv \alpha_n \bmod p^n\}$
 $x_n = \sum_{k=0}^n a_k p^k$
- Existem outras completações de \mathbb{Q} ?

• Teorema de Ostrowski

- $\mathbb{Z}_p = \{x \in \mathbb{Q}_p : |x|_p \leq 1\}$
sub-anel maximal compacto de \mathbb{Q}_p
- $\mathbb{Z}_p = \{\sum_{k \geq 0} a_k p^k : a_k \in \{0, 1, \dots, p-1\}\}$
- $\mathbb{Z}_p = \varprojlim \mathbb{Z}/p^n \mathbb{Z} = \{(x_n) : x_n \in \mathbb{Z}/p^n \mathbb{Z} \quad \alpha_{n+1} \equiv \alpha_n \bmod p^n\}$
 $x_n = \sum_{k=0}^n a_k p^k$
- Existem outras completações de \mathbb{Q} ?
- Teorema de Ostrowski

Uma aplicação dos corpos p -Ádicos

- Princípio Global-Local²

A existência ou não existência de soluções em \mathbb{Q} (soluções globais) de uma equação diofantina podem ser encontradas estudando, para cada $p \leq \infty$, as soluções da equação em \mathbb{Q}_p (soluções locais).

- Teorema:

O princípio Global-Local é teorema no caso das equações da seguinte forma:

$$\sum_{i,j} a_{ij} x_i x_j = 0 \quad a_{ij} \in \mathbb{Z} \text{ (formas quadráticas)}$$

²Não é um teorema, mas sim um “plano de ataque”

Uma aplicação dos corpos p -Ádicos

- Princípio Global-Local²

A existência ou não existência de soluções em \mathbb{Q} (soluções globais) de uma equação diofantina podem ser encontradas estudando, para cada $p \leq \infty$, as soluções da equação em \mathbb{Q}_p (soluções locais).

- Teorema:

O princípio Global-Local é teorema no caso das equações da seguinte forma:

$$\sum_{i,j} a_{ij} x_i x_j = 0 \quad a_{ij} \in \mathbb{Z} \text{ (formas quadráticas)}$$

²Não é um teorema, mas sim um “plano de ataque”

Uma aplicação dos corpos p -Ádicos

- Princípio Global-Local²

A existência ou não existência de soluções em \mathbb{Q} (soluções globais) de uma equação diofantina podem ser encontradas estudando, para cada $p \leq \infty$, as soluções da equação em \mathbb{Q}_p (soluções locais).

- Teorema:

O princípio Global-Local é teorema no caso das equações da seguinte forma:

$$\sum_{i,j} a_{ij} x_i x_j = 0 \quad a_{ij} \in \mathbb{Z} \text{ (formas quadráticas)}$$

²Não é um teorema, mas sim um “plano de ataque”

Tópicos

- 1 p -Ádicos
 - Introdução
 - A Métrica
 - \mathbb{Q}_p
- 2 Anel dos Adelos ($\mathbb{A}_{\mathbb{Q}}$)
- 3 Grupos Duais
 - Introdução
 - $\hat{\mathbb{Q}} \cong \mathbb{A}_{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}$
 - $\hat{\mathbb{Q}} \cong \varprojlim \mathbb{R}/n\mathbb{Z}$

Anel dos Adelos

Definição

- $\mathbb{A}_{\mathbb{Q}} = \{x \in \prod_{p \in \mathbb{P} \cup \{\infty\}} \mathbb{Q}_p : x_p \in \mathbb{Z}_p \text{ para quase todo } p\}$
- $\mathbb{A}_{\mathbb{Q}}(P) = \{x \in \mathbb{A}_{\mathbb{Q}} : x_p \in \mathbb{Z}_p, p \notin P\} = \prod_{p \in P} \mathbb{Q}_p \times \prod_{p \in \mathbb{P} - P} \mathbb{Z}_p$
 $\{\infty\} \subset P \text{ finito} \subset \{\infty\} \cup \mathbb{P}$

- Topologia nos adelos tem como base os conjuntos $\mathbb{A}_{\mathbb{Q}}(P)$
-

$$\begin{aligned} \phi : \mathbb{Q} &\hookrightarrow \mathbb{A}_{\mathbb{Q}} \\ x &\longrightarrow (x, x, \dots, x, \dots). \end{aligned}$$

Anel dos Adelos

Definição

- $\mathbb{A}_{\mathbb{Q}} = \{x \in \prod_{p \in \mathbb{P} \cup \{\infty\}} \mathbb{Q}_p : x_p \in \mathbb{Z}_p \text{ para quase todo } p\}$
- $\mathbb{A}_{\mathbb{Q}}(P) = \{x \in \mathbb{A}_{\mathbb{Q}} : x_p \in \mathbb{Z}_p, p \notin P\} = \prod_{p \in P} \mathbb{Q}_p \times \prod_{p \in \mathbb{P} - P} \mathbb{Z}_p$
 $\{\infty\} \subset P \text{ finito} \subset \{\infty\} \cup \mathbb{P}$

• Topologia nos adelos tem como base os conjuntos $\mathbb{A}_{\mathbb{Q}}(P)$

•

$$\begin{aligned} \phi : \mathbb{Q} &\hookrightarrow \mathbb{A}_{\mathbb{Q}} \\ x &\longrightarrow (x, x, \dots, x, \dots). \end{aligned}$$

Anel dos Adelos

Definição

- $\mathbb{A}_{\mathbb{Q}} = \{x \in \prod_{p \in \mathbb{P} \cup \{\infty\}} \mathbb{Q}_p : x_p \in \mathbb{Z}_p \text{ para quase todo } p\}$
- $\mathbb{A}_{\mathbb{Q}}(P) = \{x \in \mathbb{A}_{\mathbb{Q}} : x_p \in \mathbb{Z}_p, p \notin P\} = \prod_{p \in P} \mathbb{Q}_p \times \prod_{p \in \mathbb{P} - P} \mathbb{Z}_p$
 $\{\infty\} \subset P \text{ finito} \subset \{\infty\} \cup \mathbb{P}$
- Topologia nos adelos tem como base os conjuntos $\mathbb{A}_{\mathbb{Q}}(P)$

$$\begin{aligned} \phi : \mathbb{Q} &\hookrightarrow \mathbb{A}_{\mathbb{Q}} \\ x &\longrightarrow (x, x, \dots, x, \dots). \end{aligned}$$

Anel dos Adelos

Definição

- $\mathbb{A}_{\mathbb{Q}} = \{x \in \prod_{p \in \mathbb{P} \cup \{\infty\}} \mathbb{Q}_p : x_p \in \mathbb{Z}_p \text{ para quase todo } p\}$
- $\mathbb{A}_{\mathbb{Q}}(P) = \{x \in \mathbb{A}_{\mathbb{Q}} : x_p \in \mathbb{Z}_p, p \notin P\} = \prod_{p \in P} \mathbb{Q}_p \times \prod_{p \in \mathbb{P} - P} \mathbb{Z}_p$
 $\{\infty\} \subset P \text{ finito} \subset \{\infty\} \cup \mathbb{P}$

- Topologia nos adelos tem como base os conjuntos $\mathbb{A}_{\mathbb{Q}}(P)$
-

$$\begin{aligned} \phi : \mathbb{Q} &\hookrightarrow \mathbb{A}_{\mathbb{Q}} \\ x &\longrightarrow (x, x, \dots, x, \dots). \end{aligned}$$

Alguns Resultados sobre $\mathbb{A}_{\mathbb{Q}}$

Resultados

- $\phi(\mathbb{Q})$ é um subgrupo discreto de $\mathbb{A}_{\mathbb{Q}}$
 - $\mathbb{A}_{\mathbb{Q}}/\phi(\mathbb{Q})$ é compacto.
- \mathbb{Z} é um subgrupo discreto de \mathbb{R}
- $\mathbb{R}/\mathbb{Z} (= \mathbb{T}) \cong S^1$ e é compacto.

Alguns Resultados sobre $\mathbb{A}_{\mathbb{Q}}$

Resultados

- $\phi(\mathbb{Q})$ é um subgrupo discreto de $\mathbb{A}_{\mathbb{Q}}$
- $\mathbb{A}_{\mathbb{Q}}/\phi(\mathbb{Q})$ é compacto.

- \mathbb{Z} é um subgrupo discreto de \mathbb{R}
- $\mathbb{R}/\mathbb{Z} (= \mathbb{T}) \cong S^1$ e é compacto.

Alguns Resultados sobre $\mathbb{A}_{\mathbb{Q}}$

Resultados

- $\phi(\mathbb{Q})$ é um subgrupo discreto de $\mathbb{A}_{\mathbb{Q}}$
 - $\mathbb{A}_{\mathbb{Q}}/\phi(\mathbb{Q})$ é compacto.
-
- \mathbb{Z} é um subgrupo discreto de \mathbb{R}
 - $\mathbb{R}/\mathbb{Z} (= \mathbb{T}) \cong S^1$ e é compacto.

Tópicos

- 1 p -Ádicos
 - Introdução
 - A Métrica
 - \mathbb{Q}_p
- 2 Anel dos Adelos ($\mathbb{A}_{\mathbb{Q}}$)
- 3 Grupos Duais
 - **Introdução**
 - $\hat{\mathbb{Q}} \cong \mathbb{A}_{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}$
 - $\hat{\mathbb{Q}} \cong \mathbb{R}/n\mathbb{Z}$
 \leftarrow

Introdução

Definição

- $\hat{\mathbb{K}} = \{h : \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{T}, h \text{ é um homomorfismo contínuo}\}$
Os elementos de \hat{K} designam-se por caracteres.

Exemplos

- $\hat{\mathbb{Z}} = \mathbb{T}$
- $\hat{\mathbb{T}} = \mathbb{Z}$

Análise Harmónica

$$f : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{C} \qquad \hat{f} : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{C}$$
$$\hat{f}(n) = \int_{\mathbb{S}^1} f(z) e^{-niz} dz \qquad f(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}(n) e^{niz}$$

Introdução

Definição

- $\widehat{\mathbb{K}} = \{h : \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{T}, h \text{ é um homomorfismo contínuo}\}$
Os elementos de \widehat{K} designam-se por caracteres.

Exemplos

- $\widehat{\mathbb{Z}} = \mathbb{T}$
- $\widehat{\mathbb{T}} = \mathbb{Z}$

Análise Harmónica

$$f : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{C} \qquad \widehat{f} : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{C}$$
$$\widehat{f}(n) = \int_{S^1} f(z) e^{-niz} dz \qquad f(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \widehat{f}(n) e^{niz}$$

Introdução

Definição

- $\widehat{\mathbb{K}} = \{h : \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{T}, h \text{ é um homomorfismo contínuo}\}$
Os elementos de \widehat{K} designam-se por caracteres.

Exemplos

- $\widehat{\mathbb{Z}} = \mathbb{T}$
- $\widehat{\mathbb{T}} = \mathbb{Z}$

Análise Harmónica

$$f : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{C} \qquad \widehat{f} : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{C}$$

$$\widehat{f}(n) = \int_{S^1} f(z) e^{-niz} dz \qquad f(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \widehat{f}(n) e^{niz}$$

Introdução

Exemplos

- $\mathbb{R} = \widehat{\mathbb{R}}$
- $\mathbb{Q}_p = \widehat{\mathbb{Q}_p}$
- $\mathbb{A}_{\mathbb{Q}} = \widehat{\mathbb{A}_{\mathbb{Q}}}$

Tópicos

- 1 p -Ádicos
 - Introdução
 - A Métrica
 - \mathbb{Q}_p
- 2 Anel dos Adelos ($\mathbb{A}_{\mathbb{Q}}$)
- 3 Grupos Duais
 - Introdução
 - $\hat{\mathbb{Q}} \cong \mathbb{A}_{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}$
 - $\hat{\mathbb{Q}} \cong \mathbb{R}/n\mathbb{Z}$
 \leftarrow

Caracteres e Auto-Dualidade dos Adelos

- Seja G um \mathbb{Q}_p ou \mathbb{R} , seja χ_1 um carácter não trivial de G , então qualquer carácter desse grupo consegue-se escrever da seguinte forma $\chi_a(x) = \chi_1(ax)$.
- O mapa de $a \longrightarrow \chi_a$ é um isomorfismo entre G e o seu dual.
- $\chi(x) = \prod \chi_p(x_p)$ em que $\chi_p(\mathbb{Z}_p) = 1$ para quase todo o p .
- $\chi_{\infty}(x_{\infty}) = e^{-2\pi i x_{\infty}}$ $\chi_p(x_p = \xi_p + n_p \in \mathbb{Q} + \mathbb{Z}_p) = e^{2\pi i \xi_p}$
- $\widehat{\mathbb{A}_{\mathbb{Q}}} \cong \mathbb{A}_{\mathbb{Q}}$

Caracteres e Auto-Dualidade dos Adelos

- Seja G um \mathbb{Q}_p ou \mathbb{R} , seja χ_1 um carácter não trivial de G , então qualquer carácter desse grupo consegue-se escrever da seguinte forma $\chi_a(x) = \chi_1(ax)$.
- O mapa de $a \longrightarrow \chi_a$ é um isomorfismo entre G e o seu dual.
- $\chi(x) = \prod \chi_p(x_p)$ em que $\chi_p(\mathbb{Z}_p) = 1$ para quase todo o p .
- $\chi_{\infty}(x_{\infty}) = e^{-2\pi i x_{\infty}}$ $\chi_p(x_p = \xi_p + n_p \in \mathbb{Q} + \mathbb{Z}_p) = e^{2\pi i \xi_p}$
- $\widehat{\mathbb{A}_{\mathbb{Q}}} \cong \mathbb{A}_{\mathbb{Q}}$

Caracteres e Auto-Dualidade dos Adelos

- Seja G um \mathbb{Q}_p ou \mathbb{R} , seja χ_1 um carácter não trivial de G , então qualquer carácter desse grupo consegue-se escrever da seguinte forma $\chi_a(x) = \chi_1(ax)$.
- O mapa de $a \longrightarrow \chi_a$ é um isomorfismo entre G e o seu dual.
- $\chi(x) = \prod \chi_p(x_p)$ em que $\chi_p(\mathbb{Z}_p) = 1$ para quase todo o p .
- $\chi_{\infty}(x_{\infty}) = e^{-2\pi i x_{\infty}}$ $\chi_p(x_p = \xi_p + \eta_p \in \mathbb{Q} + \mathbb{Z}_p) = e^{2\pi i \xi_p}$
- $\widehat{\mathbb{A}_{\mathbb{Q}}} \cong \mathbb{A}_{\mathbb{Q}}$

Caracteres e Auto-Dualidade dos Adelos

- Seja G um \mathbb{Q}_p ou \mathbb{R} , seja χ_1 um carácter não trivial de G , então qualquer carácter desse grupo consegue-se escrever da seguinte forma $\chi_a(x) = \chi_1(ax)$.
- O mapa de $a \longrightarrow \chi_a$ é um isomorfismo entre G e o seu dual.
- $\chi(x) = \prod \chi_p(x_p)$ em que $\chi_p(\mathbb{Z}_p) = 1$ para quase todo o p .
- $\chi_{\infty}(x_{\infty}) = e^{-2\pi i x_{\infty}}$ $\chi_p(x_p = \xi_p + n_p \in \mathbb{Q} + \mathbb{Z}_p) = e^{2\pi i \xi_p}$
- $\widehat{\mathbb{A}_{\mathbb{Q}}} \cong \mathbb{A}_{\mathbb{Q}}$

Caracteres e Auto-Dualidade dos Adelos

- Seja G um \mathbb{Q}_p ou \mathbb{R} , seja χ_1 um carácter não trivial de G , então qualquer carácter desse grupo consegue-se escrever da seguinte forma $\chi_a(x) = \chi_1(ax)$.
- O mapa de $a \longrightarrow \chi_a$ é um isomorfismo entre G e o seu dual.
- $\chi(x) = \prod \chi_p(x_p)$ em que $\chi_p(\mathbb{Z}_p) = 1$ para quase todo o p .
- $\chi_{\infty}(x_{\infty}) = e^{-2\pi i x_{\infty}}$ $\chi_p(x_p = \xi_p + n_p \in \mathbb{Q} + \mathbb{Z}_p) = e^{2\pi i \xi_p}$
- $\widehat{\mathbb{A}_{\mathbb{Q}}} \cong \mathbb{A}_{\mathbb{Q}}$

$$\widehat{\mathbb{Q}} \cong \mathbb{A}_{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}$$

- $\Gamma = \phi(\mathbb{Q})^{\perp} = \{a = (a_p) \in \mathbb{A}_{\mathbb{Q}} : \chi_a(\xi) = 1 \quad \xi \in \phi(\mathbb{Q})\}$
- $\phi(\mathbb{Q}) \subset \Gamma$
 $\chi_a(\xi) = \chi(a\xi)$ e $a\xi \in \mathbb{Q}$
- $\mathbb{A}_{\mathbb{Q}} = \phi(\mathbb{Q}) + [1/2, -1/2] \times \prod_p \mathbb{Z}_p$
- $\Gamma = \phi(\mathbb{Q})$
- $\widehat{G}/H^{\perp} \cong \widehat{H}$
- $\mathbb{A}_{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q} \cong \mathbb{A}_{\mathbb{Q}}/\phi(\mathbb{Q}) \cong \widehat{\mathbb{A}_{\mathbb{Q}}}/\phi(\mathbb{Q}) \cong \widehat{\mathbb{A}_{\mathbb{Q}}}/\phi(\mathbb{Q})^{\perp} \cong \widehat{\phi(\mathbb{Q})} \cong \widehat{\mathbb{Q}}$

$$\widehat{\mathbb{Q}} \cong \mathbb{A}_{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}$$

- $\Gamma = \phi(\mathbb{Q})^{\perp} = \{a = (a_p) \in \mathbb{A}_{\mathbb{Q}} : \chi_a(\xi) = 1 \quad \xi \in \phi(\mathbb{Q})\}$
- $\phi(\mathbb{Q}) \subset \Gamma$
 $\chi_a(\xi) = \chi(a\xi)$ e $a\xi \in \mathbb{Q}$
 - $\mathbb{A}_{\mathbb{Q}} = \phi(\mathbb{Q}) + [1/2, -1/2] \times \prod_p \mathbb{Z}_p$
 - $\Gamma = \phi(\mathbb{Q})$
 - $\widehat{G}/H^{\perp} \cong \widehat{H}$
 - $\mathbb{A}_{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q} \cong \mathbb{A}_{\mathbb{Q}}/\phi(\mathbb{Q}) \cong \widehat{\mathbb{A}_{\mathbb{Q}}}/\phi(\mathbb{Q}) \cong \widehat{\mathbb{A}_{\mathbb{Q}}}/\phi(\mathbb{Q})^{\perp} \cong \widehat{\phi(\mathbb{Q})} \cong \widehat{\mathbb{Q}}$

$$\widehat{\mathbb{Q}} \cong \mathbb{A}_{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}$$

- $\Gamma = \phi(\mathbb{Q})^{\perp} = \{a = (a_p) \in \mathbb{A}_{\mathbb{Q}} : \chi_a(\xi) = 1 \quad \xi \in \phi(\mathbb{Q})\}$
- $\phi(\mathbb{Q}) \subset \Gamma$
 $\chi_a(\xi) = \chi(a\xi)$ e $a\xi \in \mathbb{Q}$
- $\mathbb{A}_{\mathbb{Q}} = \phi(\mathbb{Q}) + [1/2, -1/2] \times \prod_{\mathbb{P}} \mathbb{Z}_p$

$$\Gamma = \phi(\mathbb{Q})$$

$$\widehat{G}/H^{\perp} \cong \widehat{H}$$

$$\mathbb{A}_{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q} \cong \mathbb{A}_{\mathbb{Q}}/\phi(\mathbb{Q}) \cong \widehat{\mathbb{A}_{\mathbb{Q}}}/\phi(\mathbb{Q}) \cong \widehat{\mathbb{A}_{\mathbb{Q}}}/\phi(\mathbb{Q})^{\perp} \cong \widehat{\phi(\mathbb{Q})} \cong \widehat{\mathbb{Q}}$$

$$\widehat{\mathbb{Q}} \cong \mathbb{A}_{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}$$

- $\Gamma = \phi(\mathbb{Q})^{\perp} = \{a = (a_p) \in \mathbb{A}_{\mathbb{Q}} : \chi_a(\xi) = 1 \quad \xi \in \phi(\mathbb{Q})\}$
- $\phi(\mathbb{Q}) \subset \Gamma$
 $\chi_a(\xi) = \chi(a\xi)$ e $a\xi \in \mathbb{Q}$
- $\mathbb{A}_{\mathbb{Q}} = \phi(\mathbb{Q}) + [1/2, -1/2] \times \prod_{\mathbb{P}} \mathbb{Z}_p$
- $\Gamma = \phi(\mathbb{Q})$

$$\bullet \widehat{G}/H^{\perp} \cong \widehat{H}$$

$$\bullet \mathbb{A}_{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q} \cong \mathbb{A}_{\mathbb{Q}}/\phi(\mathbb{Q}) \cong \widehat{\mathbb{A}_{\mathbb{Q}}}/\phi(\mathbb{Q}) \cong \widehat{\mathbb{A}_{\mathbb{Q}}}/\phi(\mathbb{Q})^{\perp} \cong \widehat{\phi(\mathbb{Q})} \cong \widehat{\mathbb{Q}}$$

$$\widehat{\mathbb{Q}} \cong \mathbb{A}_{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}$$

- $\Gamma = \phi(\mathbb{Q})^{\perp} = \{a = (a_p) \in \mathbb{A}_{\mathbb{Q}} : \chi_a(\xi) = 1 \quad \xi \in \phi(\mathbb{Q})\}$
- $\phi(\mathbb{Q}) \subset \Gamma$
 $\chi_a(\xi) = \chi(a\xi)$ e $a\xi \in \mathbb{Q}$
- $\mathbb{A}_{\mathbb{Q}} = \phi(\mathbb{Q}) + [1/2, -1/2] \times \prod_{\mathbb{P}} \mathbb{Z}_p$
- $\Gamma = \phi(\mathbb{Q})$
- $\widehat{G}/H^{\perp} \cong \widehat{H}$

$$\bullet \mathbb{A}_{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q} \cong \mathbb{A}_{\mathbb{Q}}/\phi(\mathbb{Q}) \cong \widehat{\mathbb{A}_{\mathbb{Q}}}/\phi(\mathbb{Q}) \cong \widehat{\mathbb{A}_{\mathbb{Q}}}/\phi(\mathbb{Q})^{\perp} \cong \widehat{\phi(\mathbb{Q})} \cong \widehat{\mathbb{Q}}$$

$$\widehat{\mathbb{Q}} \cong \mathbb{A}_{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}$$

- $\Gamma = \phi(\mathbb{Q})^{\perp} = \{a = (a_p) \in \mathbb{A}_{\mathbb{Q}} : \chi_a(\xi) = 1 \quad \xi \in \phi(\mathbb{Q})\}$
- $\phi(\mathbb{Q}) \subset \Gamma$
 $\chi_a(\xi) = \chi(a\xi)$ e $a\xi \in \mathbb{Q}$
- $\mathbb{A}_{\mathbb{Q}} = \phi(\mathbb{Q}) + [1/2, -1/2] \times \prod_{\mathbb{P}} \mathbb{Z}_p$
- $\Gamma = \phi(\mathbb{Q})$
- $\widehat{G}/H^{\perp} \cong \widehat{H}$
- $\mathbb{A}_{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q} \cong \mathbb{A}_{\mathbb{Q}}/\phi(\mathbb{Q}) \cong \widehat{\mathbb{A}_{\mathbb{Q}}}/\phi(\mathbb{Q}) \cong \widehat{\mathbb{A}_{\mathbb{Q}}}/\phi(\mathbb{Q})^{\perp} \cong \widehat{\phi(\mathbb{Q})} \cong \widehat{\mathbb{Q}}$

Tópicos

- 1 p -Ádicos
 - Introdução
 - A Métrica
 - \mathbb{Q}_p
- 2 Anel dos Adelos ($\mathbb{A}_{\mathbb{Q}}$)
- 3 Grupos Duais
 - Introdução
 - $\hat{\mathbb{Q}} \cong \mathbb{A}_{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}$
 - $\hat{\mathbb{Q}} \cong \mathbb{R}/n\mathbb{Z}$

$$\varprojlim \mathbb{R}/n\mathbb{Z}$$

Definição

$$\varprojlim \mathbb{R}/n\mathbb{Z} = \left\{ (x_n) : x_n \in \frac{\mathbb{R}}{n\mathbb{Z}}; x_m \equiv x_n \pmod{n} \quad \forall_{n|m} \right\}$$

- $\mathbb{Q} = \langle \{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \} \rangle$
- $\varphi : \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{T}$
 $\frac{1}{n} \longrightarrow \frac{c_n}{n} \pmod{1}$
- $(c_n) \in \varprojlim \mathbb{R}/n\mathbb{Z}$
- $\hat{\mathbb{Q}} \cong \varprojlim \mathbb{R}/n\mathbb{Z}$

$$\varprojlim \mathbb{R}/n\mathbb{Z}$$

Definição

$$\varprojlim \mathbb{R}/n\mathbb{Z} = \left\{ (x_n) : x_n \in \frac{\mathbb{R}}{n\mathbb{Z}}; x_m \equiv x_n \pmod{n} \quad \forall_{n|m} \right\}$$

- $\mathbb{Q} = \langle \{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \} \rangle$

- $\varphi : \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{T}$
 $\frac{1}{n} \longrightarrow \frac{c_n}{n} \pmod{1}$

- $(c_n) \in \varprojlim \mathbb{R}/n\mathbb{Z}$

- $\hat{\mathbb{Q}} \cong \varprojlim \mathbb{R}/n\mathbb{Z}$

$$\varprojlim \mathbb{R}/n\mathbb{Z}$$

Definição

$$\varprojlim \mathbb{R}/n\mathbb{Z} = \left\{ (x_n) : x_n \in \frac{\mathbb{R}}{n\mathbb{Z}}; x_m \equiv x_n \pmod{n} \quad \forall n|m \right\}$$

- $\mathbb{Q} = \langle \{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \} \rangle$

- $\varphi : \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{T}$

$$\frac{1}{n} \longrightarrow \frac{c_n}{n} \pmod{1}$$

- $(c_n) \in \varprojlim \mathbb{R}/n\mathbb{Z}$

- $\hat{\mathbb{Q}} \cong \varprojlim \mathbb{R}/n\mathbb{Z}$

$$\varprojlim \mathbb{R}/n\mathbb{Z}$$

Definição

$$\varprojlim \mathbb{R}/n\mathbb{Z} = \left\{ (x_n) : x_n \in \frac{\mathbb{R}}{n\mathbb{Z}}; x_m \equiv x_n \pmod{n} \quad \forall_{n|m} \right\}$$

- $\mathbb{Q} = \langle \{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \} \rangle$
- $\varphi : \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{T}$
 $\frac{1}{n} \longrightarrow \frac{c_n}{n} \pmod{1}$
- $(c_n) \in \varprojlim \mathbb{R}/n\mathbb{Z}$
- $\hat{\mathbb{Q}} \cong \varprojlim \mathbb{R}/n\mathbb{Z}$

$$\varprojlim \mathbb{R}/n\mathbb{Z}$$

Definição

$$\varprojlim \mathbb{R}/n\mathbb{Z} = \left\{ (x_n) : x_n \in \frac{\mathbb{R}}{n\mathbb{Z}}; x_m \equiv x_n \pmod{n} \quad \forall_{n|m} \right\}$$

- $\mathbb{Q} = \langle \{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \} \rangle$
- $\varphi : \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{T}$
 $\frac{1}{n} \longrightarrow \frac{c_n}{n} \pmod{1}$
- $(c_n) \in \varprojlim \mathbb{R}/n\mathbb{Z}$
- $\hat{\mathbb{Q}} \cong \varprojlim \mathbb{R}/n\mathbb{Z}$

Conclusões

- Os **Corpos p -Ádicos** são uma construção interessante e útil.
- Existe o **Anel dos Adelos dos Racionais** que nos permite ter uma visão global de todas as completações de \mathbb{Q} , existindo um paralelismo entre este e os Reais.
- Uma compreensão mais profunda do Anel dos Adelos por $\mathbb{A}_{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q} \cong \varprojlim \mathbb{R}/n\mathbb{Z}$, visto o limite inverso ser um modelo mais simples e intuitivo do que o anel dos Adelos.

Bibliografia



Fenando Q. Gouvêa

p-adic Numbers.



A. Weil

Basic Number Theory