

Sistemas de Numeração



Célia Borlido

07/09/2007

Encontro Nacional dos Novos Talentos em Matemática

Alguma notação para começar...

- ϵ representa a palavra vazia.
- Se Σ é um alfabeto, isto é, um conjunto não vazio de símbolos (finito ou infinito), então, Σ^* representa o conjunto de todas as palavras finitas cujas letras estão em Σ e Σ^n representa o conjunto de todas as palavras com n letras em Σ .
 - Por exemplo, se $\Sigma = \{1, 0\}$, então:
 $\Sigma^* = \{\epsilon, 0, 1, 00, 01, 10, 11, 000, \dots\}$ e
 $\Sigma^2 = \{00, 01, 10, 11\}$.

Definição:

□ Semi-anel:

- Um semi-anel é um conjunto S que contém os elementos 0 e 1 , juntamente com as operações binárias $+$ e \cdot , tal que $(S, +, 0)$ e $(S, \cdot, 1)$ são estruturas comutativas e associativas e:

- $a \cdot 0 = 0 = 0 \cdot a$

- $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$

- $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$

O que é um Sistema de Numeração?

- Um Sistema de Numeração é um modo de expressar um elemento de um dado semi-anel como combinação linear

$$n = a_0 u_0 + a_1 u_1 + \dots + a_r u_r$$

de elementos de $\mathcal{U} = \{u_0, u_1, u_2, \dots\}$ sendo os elementos a_i chamados os dígitos de n . A palavra finita $a_r a_{r-1} \dots a_2 a_1 a_0$ diz-se a representação de n .

O que é um Sistema de Numeração?

- Mais formalmente, define-se um Sistema de Numeração \mathcal{N} como sendo um triplo $\mathcal{N} = (\mathcal{U}, \mathcal{D}, \mathcal{R})$, onde:
 - $\mathcal{U} = \{u_0, u_1, u_2, \dots\}$ é uma sequência de elementos de \mathcal{S} , chamada a base de \mathcal{N} ;
 - \mathcal{D} é um subconjunto de \mathcal{S} , normalmente finito, chamado o conjunto de dígitos;
 - $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{D}^*$ é o conjunto das representações válidas.

O que é um Sistema de Numeração?

- Define-se a função

$$[w]_u : \mathcal{D}^* \rightarrow \mathcal{S}$$

$$a_r a_{r-1} \dots a_2 a_1 a_0 = w \rightsquigarrow a_0 u_0 + a_1 u_1 + \dots + a_r u_r$$

- Exemplo:

- Se considerarmos o semi anel \mathbb{N} , um exemplo de um Sistema de Numeração é o sistema decimal. Neste caso temos:

- $\mathcal{U} = \{1, 10, 100, \dots\}$;
- $\mathcal{D} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$;
- $\mathcal{R} = \{\epsilon\} \cup (\mathcal{D} \setminus \{0\}) \mathcal{D}^*$.

$$\frac{.1!}{2} + \frac{.2!}{3} + \frac{.3!}{4} + \dots + \frac{.(k-1)!}{k} + \frac{.k!}{k} = \mathbf{k \times k!}$$

Sistemas de Numeração Perfeitos:

■ Sejam

$$\square \mathcal{A} = a_1 1! + a_2 2! + a_3 3! + \dots + a_n n!$$

$$\square \mathcal{B} = b_1 1! + b_2 2! + b_3 3! + \dots + b_n n!$$

dois números iguais.

- Se $a_n > b_n$ temos:

$$(a_n - b_n) n! \geq n!$$

e

$$\underbrace{(a_1 1! + a_2 2! + a_3 3! + \dots + a_{n-1} (n-1)!)}_{\geq 0} - \underbrace{(b_1 1! + b_2 2! + b_3 3! + \dots + b_{n-1} (n-1)!)}_{\leq n! - 1} \geq 1 - n!$$

- E somando...

$$\mathcal{A} - \mathcal{B} \geq 1, \text{ contradição!!!}$$

Algoritmo Guloso

□ Sejam $1 = u_0 < u_1 < u_2 < \dots$ elementos de \mathbb{N} que formam uma base \mathcal{U} .

■ *Greedy* (n):

$t := 0$

while $u_{t+1} \leq n$ *do*

$t := t + 1$

for $i = t$ *down to* 0 *do*:

$a_i := \lfloor n / u_i \rfloor$

$n := n - a_i u_i$

output (a_i)

Algoritmo Guloso:

- Conjunto das representações válidas:

- $\mathcal{R} = \{Greedy(n) : n \geq 1\} \cup \{\epsilon\}$

- Conjunto de dígitos:

- Como $a_i < u_{i+1}/u_i$, \mathcal{D} é finito se $c = \sup_{i \geq 0} (u_{i+1}/u_i)$ for finito e, neste caso, temos $\mathcal{D} = \{0, 1, 2, \dots, [c]\}$.

Teorema 1:

□ Seja $\mathcal{U} = \{u_0, u_1, u_2, \dots\}$ uma base de elementos de \mathbb{N} tal que $1 = u_0 < u_1 < u_2 < \dots$. Então, todo o inteiro não negativo tem exactamente uma representação como combinação linear $a_0 u_0 + a_1 u_1 + \dots + a_r u_r$ se os dígitos satisfizerem a seguinte desigualdade:

■
$$a_0 u_0 + a_1 u_1 + \dots + a_i u_i < u_{i+1}$$

Conjuntos de Dígitos Alternativos I

- Seja $E_k = \{1, 2, \dots, k\}$, o conjunto de dígitos.
Então:

$\mathcal{N} = (\{1, k, k^2, \dots\}, E_k, E_k^*)$ é perfeito.

- Para provar isto podemos usar o Teorema 1:

$$\square a_0 + a_1 k + a_2 k^2 + \dots + a_{n-1} k^{n-1} \leq$$

$$\leq k(1 + k + k^2 + \dots + k^{n-1}) =$$

$$= k(1 - k^{n+1}) / (1 - k) <$$

$$< k^n, \quad k \geq 2$$

Conjuntos de Dígitos Alternativos III:

■ Sistema de Numeração Ternário Equilibrado:

$$\mathcal{N} = (\{1, 3, 3^2, 3^3, \dots\}, \mathcal{F}, \{\epsilon\} \cup (\mathcal{F} \setminus \{0\}) \mathcal{F}^*),$$

onde $\mathcal{F} = \{-1, 0, 1\}$.

■ Exemplo:

n	...	3^2	3^1	3^0	n	...	3^2	3^1	3^0
1				1	-1				-1
2			1	-1	-2			-1	1
3			1	0	-3			-1	0
4			1	1	-4			-1	-1
5		1	-1	-1	-5		-1	1	1
6		1	-1	0	-6		-1	1	0
7		1	-1	1	-7		-1	1	-1
8		1	0	-1	-8		-1	0	1

Conjuntos de Dígitos Alternativos III:

□ Generalização do Sistema de Numeração Ternário Equilibrado:

$\mathcal{N} = (\{1, k + l + 1, (k + l + 1)^2, \dots\}, F, \{\epsilon\} \cup (F \setminus \{0\}) F^*),$
sendo $F = \{-k, 1 - k, 2 - k, \dots, -1, 0, 1, 2, \dots, l - 1, l\}$

- Sistema de Numeração Ternário Equilibrado:
Caso particular em que $k = l = 1$.

Definições:

- Dado um conjunto finito de dígitos inteiros, \mathcal{D} , este diz-se básico para uma base $k \geq 2$ se:
 - $0 \in \mathcal{D}$;
 - $(\{1, k, k^2, k^3, \dots\}, \mathcal{D}, \{\epsilon\} \cup (\mathcal{D} \setminus \{0\})\mathcal{D}^*)$ é um Sistema de Numeração Perfeito.

- Um conjunto S diz-se um sistema de restos completo $(\text{mod } k)$ se, $|S| = k$ e,
 $\forall n \in \mathbb{Z}, \exists m \in S : m \equiv n \text{ mod } k$.

Teorema 2:

□ Seja $k \in \mathbb{N}_{\geq 2}$.

O conjunto de dígitos \mathcal{D} , que contém o zero, é básico para k se e só se:

- \mathcal{D} é um sistema de restos completo $(\text{mod } k)$;
- $\forall n \geq 1, \forall w \in \mathcal{D}^n, [w]_k$ não é múltiplo não nulo de $k^n - 1$.

Conjuntos de Dígitos Alternativos III:

- $\mathcal{F} = \{-1, 0, 1\}$ é um sistema de restos completo.
- $3^n - 1$ não divide $[w]_{\mathcal{K}} \quad \forall w \in \mathcal{D}^n$, pois $[w]_{\mathcal{K}} \leq 1 + 3 + 3^2 + \dots + 3^{n-1} = (3^n - 1)/2 < 3^n - 1$.

Conjuntos de Dígitos Alternativos IV:

- Todo o inteiro n se pode escrever de forma única como combinação linear

$$n = a_0 - a_1 k + a_2 k^2 - a_3 k^3 + \dots + a_t (-k)^t$$

- *RepBaseNeg* (n, k):

$i := 0$

while $n \neq 0$ *do*

(1) $a_i := n \pmod k$

(2) $n := (n - a_i) / (-k)$

(3) $i := i + 1$

Conjuntos de Dígitos Alternativos IV:

□ Sejam:

$$n_0 = n$$

$$n_i = (n_{i-1} - a_{i-1}) / (-k)$$

Pelo algoritmo da divisão inteira temos:

$$n_i = q_{i+1} k + a_i$$

$$\Rightarrow n_{i+1} = (n_i - a_i) / (-k) = (q_{i+1} k + a_i - a_i) / (-k) = -q_{i+1}$$

$$\Rightarrow a_i = n_i - q_{i+1} k = -q_i - q_{i+1} k$$

Conjuntos de Dígitos Alternativos IV:

Ou seja,

$$a_0 = n - q_1 k$$

$$a_1 = -q_1 - q_2 k$$

$$a_2 = -q_2 - q_3 k$$

$$a_3 = -q_3 - q_4 k$$

.

.

.

E portanto,

$$a_0 - a_1 k + a_2 k^2 - a_3 k^3 + \dots =$$

$$(n - \cancel{q_1 k}) - k(-\cancel{q_1} - \cancel{q_2 k}) +$$

$$k^2(-\cancel{q_2} - \cancel{q_3 k}) - k^3(-\cancel{q_3} - \cancel{q_4 k}) + \dots =$$

$$= n$$

Conjuntos de Dígitos Alternativos IV:

□ *RepBaseNeg* (n, k):

$i := 0$

while $n \neq 0$ *do*

(1) $a_i := n \pmod{k}$

(2) $n := (n - a_i)/(-k)$

(3) $i := i + 1$

$$|n| \leq 1$$

$$n' = (n - a_i)/(-k)$$

$$|n'| < |n|$$

Conjuntos de Dígitos Alternativos IV:

□ *RepBaseNeg* (n, k):

$i := 0$

while $n \neq 0$ *do*

(1) $a_i := n \pmod{k}$

(2) $n := (n - a_i) / (-k)$

(3) $i := i + 1$

□ Exemplo:

■ $k = 3; n = 5$:

□ $a_0 := 5 \pmod{3} = 2$

□ $n := (5 - 2) / (-3) = -1$
 $a_1 := -1 \pmod{3} = 2$

□ $n := (-1 - 2) / (-3) = 1$
 $a_2 := 1 \pmod{3} = 1$

□ $n := (1 - 1) / (-3) = 0$

$\therefore 5 = 1 \cdot 3^2 - 2 \cdot 3 + 2$

Conjuntos de Dígitos Alternativos V:

□ $F_0 = 0$

$F_1 = 1$

$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$

- Cada inteiro pode ser representado de forma única como combinação linear

$$n = a_2 F_2 + a_3 F_3 + \dots + a_r F_r$$

$$a_i \in \{0, 1\},$$

$$a_i a_{i+1} = 0, \forall 2 \leq i < r$$

Conjuntos de Dígitos Alternativos V:

□ $a_2 F_2 + a_3 F_3 + \dots + a_t F_t < F_{t+1} \quad \forall t$ se e só se $a_i a_{i+1} = 0, \quad \forall 2 \leq i < t, a_i \in \{0, 1\}.$

■ Suponhamos que existe i tal que $a_i a_{i+1} = 1$. Então,
$$a_2 F_2 + a_3 F_3 + \dots + a_i F_i + a_{i+1} F_{i+1} \geq F_i + F_{i+1} = F_{i+2}$$

■ Reciprocamente, suponhamos que $a_i a_{i+1} = 0, \quad \forall 2 \leq i < t.$

(1) $a_2 F_2 + a_3 F_3 + \dots + a_t F_t \leq F_2 + F_4 + \dots + F_t$ se t par ;

(2) $a_2 F_2 + a_3 F_3 + \dots + a_t F_t \leq F_3 + F_5 + \dots + F_t$ se t ímpar.

Conjunto de Dígitos Alternativos V:

□ Exemplo:

n	...	$F_7 = 13$	$F_6 = 8$	$F_5 = 5$	$F_4 = 3$	$F_3 = 2$	$F_2 = 1$
1							1
2						1	0
3					1	0	0
4					1	0	1
5				1	0	0	0
6				1	0	0	1
7				1	0	1	0
8			1	0	0	0	0
9			1	0	0	0	1
10			1	0	0	1	0
11			1	0	1	0	0

Conjuntos de Dígitos Alternativos VI:

□ Seja $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

$$\alpha = [a_0, a_1, a_2, \dots] = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{\ddots}}}$$

Define –se :

$$p_{-2} = 0$$

$$p_{-1} = 1$$

$$p_n = a_n p_{n-1} + p_{n-2}$$

$$q_{-2} = 0$$

$$q_{-1} = 1$$

$$q_n = a_n q_{n-1} + q_{n-2}$$

$$p_n/q_n = [a_0, a_1, a_2, \dots, a_n]$$

Conjuntos de Dígitos Alternativos VI:

- Seja α um número irracional e $(q_n)_{n \geq 0}$ a sequência dos denominadores da sucessão de fracções que convergem para α . Então, todo o inteiro n não negativo pode ser representado de forma única como a seguinte soma:

$$b_0 q_0 + b_1 q_1 + \dots + b_j q_j$$

onde b_i são inteiros que satisfazem:

(1) $0 \leq b_0 < a_1$;

(2) $0 \leq b_i \leq a_{i+1}$, para $i \geq 1$

(3) Para $i \geq 1$, se $b_i = a_{i+1}$, então, $b_{i-1} = 0$.

Conjuntos de Dígitos Alternativos VI:

□ Exemplo:

■ $\alpha = (1 + \sqrt{5})/2 = [1, 1, 1, 1, \dots].$

$$q_k = q_{k-1} + q_{k-2} \qquad q_{-2} = 1 \qquad q_{-1} = 0$$

■ (1) $0 \leq b_0 < a_1 \Leftrightarrow 0 \leq b_0 < 1 \Leftrightarrow b_0 = 0$
 $\Rightarrow b_0 q_0 + b_1 q_1 + \dots + b_j q_j = b_1 q_1 + \dots + b_j q_j$

(2) $0 \leq b_i \leq a_{i+1} \Leftrightarrow 0 \leq b_i \leq 1 \Leftrightarrow b_i \in \{0, 1\}.$

(3) $i \geq 1: (b_i = a_{i+1} \Rightarrow b_{i-1} = 0) \Leftrightarrow (b_i = 1 \Rightarrow b_{i-1} = 0)$
 $\Leftrightarrow b_i b_{i+1} = 0$

Conjuntos de Dígitos Alternativos VII:

□ $\mathbb{Z}[i] = \{a + b i : a, b \in \mathbb{Z}\}, i = \sqrt{-1}.$

□ $\theta = d + e i$

$\|\theta\| = d^2 + e^2 \quad \rightarrow \quad \text{Norma de } \theta$

$$\mathcal{N} = (\mathcal{U}, \mathcal{D}, \{\epsilon\} \cup (\mathcal{D} \setminus \{0\}) \mathcal{D}^*),$$

$$\mathcal{U} = \{1, \theta, \theta^2, \theta^3, \dots\} \text{ e } \mathcal{D} = \{0, 1, 2, \dots, \|\theta\| - 1\}$$

\mathcal{N} é perfeito se e só se $\theta = -\mathcal{A} \pm 1, \mathcal{A} \in \mathbb{Z}_{\geq 1}.$

Conjuntos de Dígitos Alternativos VII:

□ Exemplo:

$$\theta = -1 + i = -\mathcal{A} + i; \quad \|\theta\| = 2.$$

$$\alpha = -1 + 4i = e + fi.$$

■ Seja $c = e + \mathcal{A}f = -1 + 4 = 3$.

$$\text{Tem-se } c + f\theta = e + \mathcal{A}f + f(-\mathcal{A} + i) = e + fi = \alpha$$

Como $\theta^2 + 2\mathcal{A}\theta + \mathcal{A}^2 = (\theta + \mathcal{A})^2 = -1$, se $c < 0$ ou $f < 0$,
então:

$$c \rightarrow (-c)(\theta^2 + 2\mathcal{A}\theta + \mathcal{A}^2)$$

$$f \rightarrow (-f)(\theta^2 + 2\mathcal{A}\theta + \mathcal{A}^2)$$

No nosso caso:

$$\square \alpha = 3 + 4\theta.$$

Conjuntos de Dígitos Alternativos VII:

- Divide-se o primeiro dígito por $\mathcal{A}^2 + 1 = 2$:

$$3 = (\mathcal{A}^2 + 1) 1 + 1 = 2 + 1$$

- $\mathcal{A}^2 + 1 = (\mathcal{A} - 1)^2 \theta + (2\mathcal{A} - 1) \theta^2 + \theta^3$

$$3 = ((\mathcal{A} - 1)^2 \theta + (2\mathcal{A} - 1) \theta^2 + \theta^3) + 1 = 1 + \theta^2 + \theta^3$$

$$\therefore \alpha = 1 + \theta^2 + \theta^3 + 4\theta = 1 + 4\theta + \theta^2 + \theta^3 = 1 + \theta(4 + \theta + \theta^2)$$

Conjuntos de Dígitos Alternativos VII:

□ E repete-se o processo para $\alpha_1 = 4 + \theta + \theta^2 \dots$

■ $4 = 2 \cdot 2 + 0$

■ $4 = 2 ((\mathcal{A} - 1)^2 \theta + (2\mathcal{A} - 1) \theta^2 + \theta^3) = 2 \theta^2 + 2 \theta^3$

$$\therefore \alpha_1 = 2 \theta^2 + 2 \theta^3 + \theta + \theta^2 = \theta + 3 \theta^2 + 2 \theta^3 = \theta (1 + 3 \theta + 2 \theta^2)$$

⋮

$$\alpha_2 = 1 + 3 \theta + 2 \theta^2 = 1 + \theta (3 + 2 \theta)$$

$$\alpha_3 = 3 + 2 \theta = 1 + \theta (2 + \theta + \theta^2)$$

$$\alpha_4 = 2 + \theta + \theta^2 = \theta (1 + 2 \theta + \theta^2)$$

$$\alpha_5 = 1 + 2 \theta + \theta^2 = 1 + \theta (2 + \theta)$$

$$\alpha_6 = 2 + \theta = \theta + \theta^2 + \theta^3$$

$$\alpha = 1 + \theta^2 + \theta^3 + \theta^5 + \theta^7 + \theta^8 + \theta^9$$

Bibliografia:

- ▣ *Jean-Paul Allouche & Jeffrey Shallit.*
“Automatic Sequences – Theory, Applications,
Generalizations”. Cambridge University
Press, 2003.

Problemas em aberto...

- *Encontrar uma fórmula simples ou uma forma eficiente de calcular*

$$\sum_{n=0}^{N-1} s_k(n^2)$$

- *Podem todos os inteiros não múltiplos de 3 ser escritos na forma a/b , onde a e b têm representações na base 3 que usam unicamente os dígitos 1 e -1 ?*

Um último desafio...

- ▣ Será que existem inteiros $a, b, c \geq 0$ tais que:
 - $s_{10}(a + b) < 5$
 - $s_{10}(a + c) < 5$
 - $s_{10}(b + c) < 5$
 - $s_{10}(a + b + c) > 50$