

# Nem todos os caminhos vão dar a Roma

## Encontro de Novos Talentos em Matemática

Afonso Bandeira

8 de Setembro de 2007

# Passeio Aleatório

No espaço  $\mathbb{Z}^d$ , com  $d \geq 1$ , consideramos o movimento de uma partícula que parte da origem e que em cada instante inteiro se desloca para uma das  $2d$  posições vizinhas com a mesma probabilidade ( $\frac{1}{2d}$ ).

# Passeio Aleatório

No espaço  $\mathbb{Z}^d$ , com  $d \geq 1$ , consideramos o movimento de uma partícula que parte da origem e que em cada instante inteiro se desloca para uma das  $2d$  posições vizinhas com a mesma probabilidade ( $\frac{1}{2d}$ ).

*Posição da partícula no instante  $n$ :*

$$X_0 = 0$$

$$X_n = U_1 + \cdots + U_n,$$

*onde  $U_i$  são variáveis aleatórias independentes que tomam cada um dos valores  $\pm e_j$ ,  $j = 1, \dots, d$ , com probabilidade  $\frac{1}{2d}$ .*

# Os Problemas

- Será certo que a partícula regressa ao ponto de partida pelo menos uma vez?

# Os Problemas

- Será certo que a partícula regressa ao ponto de partida pelo menos uma vez?
- Será certo que a partícula regressa ao ponto de partida um número infinito de vezes?

# Os Problemas

- Será certo que a partícula regressa ao ponto de partida pelo menos uma vez?
- Será certo que a partícula regressa ao ponto de partida um número infinito de vezes?
- Será certo que a partícula visita (uma infinidade de vezes) todos os pontos de  $\mathbb{Z}^d$ ?

# Problema 1

Estamos interessados no acontecimento:

$\mathcal{O} = \text{"Regressar à origem em algum instante } k \geq 1\text{"}$

# Problema 1

Estamos interessados no acontecimento:

$\mathcal{O}$  = “Regressar à origem em algum instante  $k \geq 1$ ”

*Teremos  $P(\mathcal{O}) = 1$  para algum  $d \geq 1$ ? Se sim, para quais?*



# Probabilidades de primeira passagem

Temos

$$\begin{aligned}\mathcal{O} &= \text{“Regressar à origem em algum instante } k \geq 1\text{”} \\ &= \{\exists_{k \geq 1} \text{ tal que } X_k = 0\} \\ &= \bigcup_{k=1}^{\infty} \{X_k = 0\}\end{aligned}$$

# Probabilidades de primeira passagem

Temos

$$\begin{aligned}\mathcal{O} &= \text{“Regressar à origem em algum instante } k \geq 1\text{”} \\ &= \{\exists_{k \geq 1} \text{ tal que } X_k = 0\} \\ &= \bigcup_{k=1}^{\infty} \{X_k = 0\}\end{aligned}$$

Definimos

$$\begin{aligned}\mathcal{O}_k &= \text{“Regressar à origem pela primeira vez no instante } k\text{”} \\ &= \{X_1 \neq 0, \dots, X_{k-1} \neq 0, X_k = 0\}\end{aligned}$$

# Probabilidades de primeira passagem

Temos

$$\begin{aligned}\mathcal{O} &= \text{“Regressar à origem em algum instante } k \geq 1\text{”} \\ &= \{\exists_{k \geq 1} \text{ tal que } X_k = 0\} \\ &= \bigcup_{k=1}^{\infty} \{X_k = 0\}\end{aligned}$$

Definimos

$$\begin{aligned}\mathcal{O}_k &= \text{“Regressar à origem pela primeira vez no instante } k\text{”} \\ &= \{X_1 \neq 0, \dots, X_{k-1} \neq 0, X_k = 0\}\end{aligned}$$

$$\mathcal{O} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \mathcal{O}_k$$

# Sucessões

## Resultado

$$P(\mathcal{O}) = \sum_{k=1}^{\infty} P(\mathcal{O}_k)$$

# Sucessões

## Resultado

$$P(\mathcal{O}) = \sum_{k=1}^{\infty} P(\mathcal{O}_k)$$

- Precisamos de obter informação sobre das probabilidades

$$f_k = P(\mathcal{O}_k),$$

que são difíceis de calcular directamente.

- Fáceis de obter são as probabilidades

$$u_k = P(X_k = 0).$$

# Sucessões

## Resultado

$$P(\mathcal{O}) = \sum_{k=1}^{\infty} P(\mathcal{O}_k)$$

- Precisamos de obter informação sobre das probabilidades

$$f_k = P(\mathcal{O}_k),$$

que são difíceis de calcular directamente.

- Fáceis de obter são as probabilidades

$$u_k = P(X_k = 0).$$

## Objectivo

*Obter uma relação entre  $(u_k)$  e  $(f_k)$ .*

# Relação FU

Tendo em conta que cada deslocamento é independente dos restantes, decompondo os passeios que voltam à origem no instante  $n$  através do instante do primeiro regresso, obtemos

# Relação FU

Tendo em conta que cada deslocamento é independente dos restantes, decompondo os passeios que voltam à origem no instante  $n$  através do instante do primeiro regresso, obtemos

$$P(X_n = 0) = \sum_{k=1}^n P(X_1 \neq 0, \dots, X_{k-1} \neq 0, X_k = 0, X_n = 0)$$



# Relação FU

Tendo em conta que cada deslocamento é independente dos restantes, decompondo os passeios que voltam à origem no instante  $n$  através do instante do primeiro regresso, obtemos

$$\begin{aligned}
 P(X_n = 0) &= \sum_{k=1}^n P(X_1 \neq 0, \dots, X_{k-1} \neq 0, X_k = 0, X_n = 0) \\
 &= \sum_{k=1}^n P(X_1 \neq 0, \dots, X_{k-1} \neq 0, X_k = 0, X_n - X_k = 0) \\
 &= \sum_{k=1}^n P(\mathcal{O}_k) P(X_{n-k} = 0)
 \end{aligned}$$

# Relação FU

Tendo em conta que cada deslocamento é independente dos restantes, decompondo os passeios que voltam à origem no instante  $n$  através do instante do primeiro regresso, obtemos

$$\begin{aligned}
 P(X_n = 0) &= \sum_{k=1}^n P(X_1 \neq 0, \dots, X_{k-1} \neq 0, X_k = 0, X_n = 0) \\
 &= \sum_{k=1}^n P(X_1 \neq 0, \dots, X_{k-1} \neq 0, X_k = 0, X_n - X_k = 0) \\
 &= \sum_{k=1}^n P(\mathcal{O}_k) P(X_{n-k} = 0)
 \end{aligned}$$

## Resultado

Para  $n \geq 1$ ,

$$u_n = f_0 u_n + f_1 u_{n-1} + \dots + f_{n-1} u_1 + f_n u_0$$

onde  $u_0 = 1$  e  $f_0 = 0$ .

# Funções Geradoras

Sejam

$$U(s) = \sum_{n=0}^{\infty} s^n u_n \quad \text{e} \quad F(s) = \sum_{n=0}^{\infty} s^n f_n$$

# Funções Geradoras

Sejam

$$U(s) = \sum_{n=0}^{\infty} s^n u_n \quad \text{e} \quad F(s) = \sum_{n=0}^{\infty} s^n f_n$$

- Reparemos que  $F(1) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n = P(\mathcal{O})$ .

# Funções Geradoras

Sejam

$$U(s) = \sum_{n=0}^{\infty} s^n u_n \quad \text{e} \quad F(s) = \sum_{n=0}^{\infty} s^n f_n$$

- Reparemos que  $F(1) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n = P(\mathcal{O})$ .

## Resultado

Para  $|s| < 1$ :

$$U(s)F(s) = u_0 f_0 + (f_0 u_1 + f_1 u_0)s + (f_0 u_2 + f_1 u_1 + f_2 u_0)s^2 + \dots$$

Pela relação anterior:

$$U(s)F(s) = U(s) - 1$$

# O Teorema

Teorema (Pólya, 1921)

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n < \infty \Leftrightarrow P(\mathcal{O}) < 1$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n < \infty \Rightarrow P(\mathcal{O}) < 1$$

Esta implicação é trivial pois

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n < \infty \Leftrightarrow U(1) < \infty.$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n < \infty \Rightarrow P(\mathcal{O}) < 1$$

Esta implicação é trivial pois

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n < \infty \Leftrightarrow U(1) < \infty.$$

Logo, a relação

$$U(s)F(s) = U(s) - 1$$

vale também para  $s = 1$ :



$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n < \infty \Rightarrow P(\mathcal{O}) < 1$$

Esta implicação é trivial pois

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n < \infty \Leftrightarrow U(1) < \infty.$$

Logo, a relação

$$U(s)F(s) = U(s) - 1$$

vale também para  $s = 1$ :

$$P(\mathcal{O}) = F(1) = \frac{U(1) - 1}{U(1)} < 1.$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n < \infty \Leftrightarrow P(\mathcal{O}) < 1$$

Temos

$$F(1) = P(\mathcal{O}) < 1.$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n < \infty \Leftrightarrow P(\mathcal{O}) < 1$$

Temos

$$F(1) = P(\mathcal{O}) < 1.$$

Para  $N \in \mathbb{N}$ ,

$$\sum_{k=0}^N u_k = \lim_{s \uparrow 1} \sum_{k=0}^N s^k u_k \leq \lim_{s \uparrow 1} U(s) = \lim_{s \uparrow 1} \frac{1}{1 - F(s)} = \frac{1}{1 - F(1)}.$$

# Teorema de Pólya

$$P(\mathcal{O}) = \begin{cases} = 1 & \text{se } \sum_{k=0}^{\infty} u_k = \infty \\ < 1 & \text{se } \sum_{k=0}^{\infty} u_k < \infty \end{cases}$$

$$d = 1$$

Para  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$u_{2n-1} = P(X_{2n-1} = 0) = 0$$

$$u_{2n} = P(X_{2n} = 0) = \binom{2n}{n} \frac{1}{2^{2n}}$$

$$d = 1$$

Para  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$u_{2n-1} = P(X_{2n-1} = 0) = 0$$

$$u_{2n} = P(X_{2n} = 0) = \binom{2n}{n} \frac{1}{2^{2n}}$$

*Fórmula de Stirling:*

$$n! \sim n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n} \sqrt{2\pi}$$

$$d = 1$$

Para  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$u_{2n-1} = P(X_{2n-1} = 0) = 0$$

$$u_{2n} = P(X_{2n} = 0) = \binom{2n}{n} \frac{1}{2^{2n}}$$

*Fórmula de Stirling:*

$$n! \sim n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n} \sqrt{2\pi}$$

$$u_{2n} \sim \frac{1}{\sqrt{\pi n}}$$

$$d = 1$$

Para  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$u_{2n-1} = P(X_{2n-1} = 0) = 0$$

$$u_{2n} = P(X_{2n} = 0) = \binom{2n}{n} \frac{1}{2^{2n}}$$

*Fórmula de Stirling:*

$$n! \sim n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n} \sqrt{2\pi}$$

$$u_{2n} \sim \frac{1}{\sqrt{\pi n}}$$



$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n = \infty \longrightarrow P(\mathcal{O}) = 1.$$



$$d = 2$$

$$u_{2n} = \frac{1}{4^{2n}} \sum_{k=0}^n \frac{(2n)!}{k!^2(n-k)!^2} = \frac{1}{4^{2n}} \binom{2n}{n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}^2 \frac{1}{4^{2n}}$$

$$d = 2$$

$$u_{2n} = \frac{1}{4^{2n}} \sum_{k=0}^n \frac{(2n)!}{k!^2(n-k)!^2} = \frac{1}{4^{2n}} \binom{2n}{n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}^2 \frac{1}{4^{2n}}$$

Usando a fórmula de Stirling:

$$u_{2n} = \binom{2n}{n}^2 \frac{1}{4^{2n}} \sim \frac{1}{\pi n}$$

$$d = 2$$

$$u_{2n} = \frac{1}{4^{2n}} \sum_{k=0}^n \frac{(2n)!}{k!^2(n-k)!^2} = \frac{1}{4^{2n}} \binom{2n}{n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}^2 \frac{1}{4^{2n}}$$

Usando a fórmula de Stirling:

$$u_{2n} = \binom{2n}{n}^2 \frac{1}{4^{2n}} \sim \frac{1}{\pi n}$$

↓

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n = \infty \longrightarrow P(\mathcal{O}) = 1.$$

$$d = 3$$

$$u_{2n} = \frac{1}{6^{2n}} \sum_{\substack{j,k=0 \\ j+k \leq n}}^n \frac{(2n)!}{j!j!k!k!(n-j-k)!(n-j-k)!}$$

$$d = 3$$

$$\begin{aligned}
 u_{2n} &= \frac{1}{6^{2n}} \sum_{\substack{j,k=0 \\ j+k \leq n}}^n \frac{(2n)!}{j!j!k!k!(n-j-k)!(n-j-k)!} \\
 &= \frac{1}{2^n} \binom{2n}{n} \sum_{\substack{j,k=0 \\ j+k \leq n}}^n \left( \frac{1}{3^n} \frac{n!}{j!k!(n-j-k)!} \right)^2
 \end{aligned}$$

$$d = 3$$

$$\begin{aligned}
 u_{2n} &= \frac{1}{6^{2n}} \sum_{\substack{j,k=0 \\ j+k \leq n}}^n \frac{(2n)!}{j!j!k!k!(n-j-k)!(n-j-k)!} \\
 &= \frac{1}{2^n} \binom{2n}{n} \sum_{\substack{j,k=0 \\ j+k \leq n}}^n \left( \frac{1}{3^n} \frac{n!}{j!k!(n-j-k)!} \right)^2 \\
 &\leq \frac{1}{3^n} \frac{n!}{\frac{n}{3}!\frac{n}{3}!(n-\frac{n}{3}-\frac{n}{3})!} \frac{1}{2^{2n}} \binom{2n}{n}
 \end{aligned}$$

$$d = 3$$

$$\begin{aligned}
 u_{2n} &= \frac{1}{6^{2n}} \sum_{\substack{j,k=0 \\ j+k \leq n}}^n \frac{(2n)!}{j!j!k!k!(n-j-k)!(n-j-k)!} \\
 &= \frac{1}{2^n} \binom{2n}{n} \sum_{\substack{j,k=0 \\ j+k \leq n}}^n \left( \frac{1}{3^n} \frac{n!}{j!k!(n-j-k)!} \right)^2 \\
 &\leq \frac{1}{3^n} \frac{n!}{\frac{n}{3}!\frac{n}{3}!(n-\frac{n}{3}-\frac{n}{3})!} \frac{1}{2^{2n}} \binom{2n}{n} \sim \frac{1}{\sqrt{\pi n^3}}
 \end{aligned}$$

$$d = 3$$

$$\begin{aligned}
 u_{2n} &= \frac{1}{6^{2n}} \sum_{\substack{j,k=0 \\ j+k \leq n}}^n \frac{(2n)!}{j!j!k!k!(n-j-k)!(n-j-k)!} \\
 &= \frac{1}{2^n} \binom{2n}{n} \sum_{\substack{j,k=0 \\ j+k \leq n}}^n \left( \frac{1}{3^n} \frac{n!}{j!k!(n-j-k)!} \right)^2 \\
 &\leq \frac{1}{3^n} \frac{n!}{\frac{n}{3}!\frac{n}{3}!(n-\frac{n}{3}-\frac{n}{3})!} \frac{1}{2^{2n}} \binom{2n}{n} \sim \frac{1}{\sqrt{\pi n^3}}
 \end{aligned}$$

↓

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n < \infty \longrightarrow P(\mathcal{O}) < 1.$$



$$d > 3$$

Representemos por  $\mathcal{O}^d$  o acontecimento  $\mathcal{O}$  no caso  $d$ -dimensional.

$$d > 3$$

Representemos por  $\mathcal{O}^d$  o acontecimento  $\mathcal{O}$  no caso  $d$ -dimensional.

Se considerarmos a projecção da posição  $X_n$  no subespaço gerado pelas primeiras 3 dimensões temos (depois de suprimidas as possíveis paragens)

$$\mathcal{O}^d \subset \mathcal{O}^3$$

$$d > 3$$

Representemos por  $\mathcal{O}^d$  o acontecimento  $\mathcal{O}$  no caso  $d$ -dimensional.

Se considerarmos a projecção da posição  $X_n$  no subespaço gerado pelas primeiras 3 dimensões temos (depois de suprimidas as possíveis paragens)

$$\mathcal{O}^d \subset \mathcal{O}^3$$



$$P(\mathcal{O}^d) \leq P(\mathcal{O}^3) < 1$$

# Resposta ao Problema 1

$$P(\mathcal{O}) = \begin{cases} = 1 & \text{se } d = 1, 2 \\ < 1 & \text{se } d \geq 3. \end{cases}$$

“Um homem embriagado encontrará o caminho para casa  
mas um pássaro bêbado pode perder-se para sempre”  
Shizuo Kakutani

# Problema 2

Estamos interessados no acontecimento

$\mathcal{O}_\infty$  = “Regressar à origem uma infinidade de vezes”

# Problema 2

Estamos interessados no acontecimento

$\mathcal{O}_\infty$  = “Regressar à origem uma infinidade de vezes”

$$= \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=k}^{\infty} \{X_n = 0\}$$

# Problema 2

Estamos interessados no acontecimento

$\mathcal{O}_\infty$  = “Regressar à origem uma infinidade de vezes”

$$= \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=k}^{\infty} \{X_n = 0\}$$

$=: \{X_n = 0\} \text{ i.o. (de “infinitely often”)}$

# Problema 2

Estamos interessados no acontecimento

$\mathcal{O}_\infty$  = “Regressar à origem uma infinidade de vezes”

$$= \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=k}^{\infty} \{X_n = 0\}$$

$=: \{X_n = 0\} \text{ i.o. (de “infinitely often”)}$

*Teremos  $P(\mathcal{O}_\infty) = 1$  para algum  $d \geq 1$ ? Se sim, para quais?*



# O Teorema

## Teorema (Pólya, 1921)

$$P(\mathcal{O}_\infty) = \begin{cases} 1 & \text{se } \sum_{k=0}^{\infty} u_k = \infty \\ 0 & \text{se } \sum_{k=0}^{\infty} u_k < \infty. \end{cases}$$

# O Teorema

## Teorema (Pólya, 1921)

$$P(\mathcal{O}_\infty) = \begin{cases} 1 & \text{se } \sum_{k=0}^{\infty} u_k = \infty \\ 0 & \text{se } \sum_{k=0}^{\infty} u_k < \infty. \end{cases}$$

- Este resultado é do tipo da *lei zero-um de Borel*, mas esta é aplicável a acontecimentos independentes.
- A segunda parte do resultado é válida mesmo no caso da dependência (*lema de Borel-Cantelli*).

$$\sum_{k=0}^{\infty} u_k < \infty \Rightarrow P(\mathcal{O}_{\infty}) = 0$$

$$P(\mathcal{O}_{\infty}) = P\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=k}^{\infty} \{X_n = 0\}\right)$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} u_k < \infty \Rightarrow P(\mathcal{O}_{\infty}) = 0$$

$$\begin{aligned} P(\mathcal{O}_{\infty}) &= P\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=k}^{\infty} \{X_n = 0\}\right) \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} P\left(\bigcup_{n=k}^{\infty} \{X_n = 0\}\right) \end{aligned}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} u_k < \infty \Rightarrow P(\mathcal{O}_{\infty}) = 0$$

$$\begin{aligned} P(\mathcal{O}_{\infty}) &= P\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=k}^{\infty} \{X_n = 0\}\right) \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} P\left(\bigcup_{n=k}^{\infty} \{X_n = 0\}\right) \\ &\leq \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=k}^{\infty} P(X_n = 0) \end{aligned}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} u_k < \infty \Rightarrow P(\mathcal{O}_{\infty}) = 0$$

$$\begin{aligned} P(\mathcal{O}_{\infty}) &= P\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=k}^{\infty} \{X_n = 0\}\right) \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} P\left(\bigcup_{n=k}^{\infty} \{X_n = 0\}\right) \\ &\leq \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=k}^{\infty} P(X_n = 0) \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=k}^{\infty} u_n \end{aligned}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} u_k < \infty \Rightarrow P(\mathcal{O}_{\infty}) = 0$$

$$\begin{aligned}
 P(\mathcal{O}_{\infty}) &= P\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=k}^{\infty} \{X_n = 0\}\right) \\
 &= \lim_{k \rightarrow \infty} P\left(\bigcup_{n=k}^{\infty} \{X_n = 0\}\right) \\
 &\leq \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=k}^{\infty} P(X_n = 0) \\
 &= \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=k}^{\infty} u_n \\
 &= 0.
 \end{aligned}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} u_k = \infty \Rightarrow P(\mathcal{O}_{\infty}) = 1$$

É válida a representação alternativa

$$\mathcal{O}_{\infty} = \bigcap_{m=1}^{\infty} \mathcal{O}_m^{\infty}$$

onde

$\mathcal{O}_m^n$  = “Regresso à origem pelo menos  $m$  vezes até ao instante  $n$ ”



$$\sum_{k=0}^{\infty} u_k = \infty \Rightarrow P(\mathcal{O}_{\infty}) = 1$$

É válida a representação alternativa

$$\mathcal{O}_{\infty} = \bigcap_{m=1}^{\infty} \mathcal{O}_m^{\infty}$$

onde

$\mathcal{O}_m^n$  = “Regresso à origem pelo menos  $m$  vezes até ao instante  $n$ ”

### Objectivo

*Mostrar que*

$$P(\mathcal{O}_m^{\infty}) = 1,$$

*para todo o  $m \in \mathbb{N}$ .*

$$\sum_{k=0}^{\infty} u_k = \infty \Rightarrow P(\mathcal{O}_m^{\infty}) = 1, \forall_m$$

Para  $n \in \mathbb{N}$  temos

$$\mathcal{O}_m^{mn} \subset \mathcal{O}_m^{\infty}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} u_k = \infty \Rightarrow P(\mathcal{O}_m^{\infty}) = 1, \forall_m$$

Para  $n \in \mathbb{N}$  temos

$$\mathcal{O}_m^{mn} \subset \mathcal{O}_m^{\infty}$$

sendo possível provar que

$$P(\mathcal{O}_m^{\infty}) \geq P(\mathcal{O}_m^{mn}) \geq P(\mathcal{O}_1^n)^m.$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} u_k = \infty \Rightarrow P(\mathcal{O}_m^{\infty}) = 1, \forall_m$$

Para  $n \in \mathbb{N}$  temos

$$\mathcal{O}_m^{mn} \subset \mathcal{O}_m^{\infty}$$

sendo possível provar que

$$P(\mathcal{O}_m^{\infty}) \geq P(\mathcal{O}_m^{mn}) \geq P(\mathcal{O}_1^n)^m.$$

Finalmente, como

$$\mathcal{O}_1^n = \bigcup_{k=1}^n \mathcal{O}_k \uparrow \bigcup_{k=1}^{\infty} \mathcal{O}_k = \mathcal{O},$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} u_k = \infty \Rightarrow P(\mathcal{O}_m^{\infty}) = 1, \forall_m$$

Para  $n \in \mathbb{N}$  temos

$$\mathcal{O}_m^{mn} \subset \mathcal{O}_m^{\infty}$$

sendo possível provar que

$$P(\mathcal{O}_m^{\infty}) \geq P(\mathcal{O}_m^{mn}) \geq P(\mathcal{O}_1^n)^m.$$

Finalmente, como

$$\mathcal{O}_1^n = \bigcup_{k=1}^n \mathcal{O}_k \uparrow \bigcup_{k=1}^{\infty} \mathcal{O}_k = \mathcal{O},$$

concluimos que

$$P(\mathcal{O}_m^{\infty}) \geq (P(\mathcal{O}))^m = 1.$$

# Resposta ao Problema 2

$$P(\mathcal{O}_\infty) = \begin{cases} 1 & \text{se } d = 1, 2 \\ 0 & \text{se } d \geq 3. \end{cases}$$

# Problema 3

Fixando um ponto  $x$  de  $\mathbb{Z}^d$ , estamos interessados nos acontecimentos:

# Problema 3

Fixando um ponto  $x$  de  $\mathbb{Z}^d$ , estamos interessados nos acontecimentos:

$\mathcal{X}$  = “Passar em  $x$  em algum instante  $n \geq 1$ ”



# Problema 3

Fixando um ponto  $x$  de  $\mathbb{Z}^d$ , estamos interessados nos acontecimentos:

$$\begin{aligned}\mathcal{X} &= \text{“Passar em } x \text{ em algum instante } n \geq 1\text{”} \\ &= \bigcup_{n=1}^{\infty} \{X_n = x\},\end{aligned}$$

# Problema 3

Fixando um ponto  $x$  de  $\mathbb{Z}^d$ , estamos interessados nos acontecimentos:

$\mathcal{X}$  = “Passar em  $x$  em algum instante  $n \geq 1$ ”

$$= \bigcup_{n=1}^{\infty} \{X_n = x\},$$

$\mathcal{X}_{\infty}$  = “Passar em  $x$  uma infinidade de vezes”

# Problema 3

Fixando um ponto  $x$  de  $\mathbb{Z}^d$ , estamos interessados nos acontecimentos:

$\mathcal{X}$  = “Passar em  $x$  em algum instante  $n \geq 1$ ”

$$= \bigcup_{n=1}^{\infty} \{X_n = x\},$$

$\mathcal{X}_{\infty}$  = “Passar em  $x$  uma infinidade de vezes”

$$\begin{aligned} &= \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=k}^{\infty} \{X_n = x\} \\ &= \{X_n = x\} \text{ i.o.} \end{aligned}$$

# Problema 3

Fixando um ponto  $x$  de  $\mathbb{Z}^d$ , estamos interessados nos acontecimentos:

$\mathcal{X}$  = “Passar em  $x$  em algum instante  $n \geq 1$ ”

$$= \bigcup_{n=1}^{\infty} \{X_n = x\},$$

$\mathcal{X}_{\infty}$  = “Passar em  $x$  uma infinidade de vezes”

$$= \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=k}^{\infty} \{X_n = x\}$$

$$= \{X_n = x\} \text{ i.o.}$$

*Teremos  $P(\mathcal{X}_{\bullet}) = 1$  para algum  $d \geq 1$ ? Se sim, para quais?*

# Resposta ao Problema 3

- $$P(\mathcal{X}) = \begin{cases} = 1 & \text{se } d = 1, 2 \\ < 1 & \text{se } d \geq 3. \end{cases}$$

- $$P(\mathcal{X}_\infty) = \begin{cases} 1 & \text{se } d = 1, 2 \\ 0 & \text{se } d \geq 3. \end{cases}$$

Caso  $d \geq 3$ 

- Usando a mesma ideia que usámos para o primeiro problema, vemos que

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(X_n = x) < \infty$$

e

$$P(\mathcal{X}) < 1$$

# Caso $d \geq 3$

- Usando a mesma ideia que usámos para o primeiro problema, vemos que

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(X_n = x) < \infty$$

e

$$P(\mathcal{X}) < 1$$

- Aplicando o lema de Borel-Cantelli:

$$P(\mathcal{X}_{\infty}) = 0$$

$$d = 1, 2$$

- Como vimos no Problema 2, a partícula passa infinitas vezes na origem, e quando passa começa um novo passeio aleatório idêntico ao primeiro e independente deste.
- A probabilidade de em cada um destes passeios o ponto  $x$  ser atingido é positiva, sendo por isso certo (pois “tem infinitas tentativas”) que será atingido um número infinito de vezes com probabilidade 1.



$$d = 1, 2$$





- Como vimos no Problema 2, a partícula passa infinitas vezes na origem, e quando passa começa um novo passeio aleatório idêntico ao primeiro e independente deste.
- A probabilidade de em cada um destes passeios o ponto  $x$  ser atingido é positiva, sendo por isso certo (pois “tem infinitas tentativas”) que será atingido um número infinito de vezes com probabilidade 1.

$$P(\mathcal{X}_\infty) = 1$$



$$P(\mathcal{X}) = 1$$

# Bibliografia

-  Chung, K.L. (2000). Pólya work in Probability. In *The Random Walks of George Pólya*. AMS.
-  Feller, W. (1950). *An Introduction to Probability Theory and its Applications*. Wiley.
-  Grinstead, C.M., Snell, J.L. (1997). *Introduction to Probability*. AMS.
-  Lesigne, E. (2005). *Heads or Tails: An Introduction to Limit Theorems in Probability*. AMS.