

Preciosidades do Cálculo

Miguel Abreu

Centro de Análise Matemática, Geometria e Sistemas Dinâmicos
Instituto Superior Técnico

Encontro Nacional do Programa Gulbenkian
Novos Talentos em Matemática,
Fundação Calouste Gulbenkian,
7-8.Setembro.2007

Motivação

Preciosidades
do Cálculo

Miguel Abreu

Introdução

Irracionais

e é Irracional

π é Irracional

Fórmula de
Leibniz

Fórmula de
Euler

Bibliografia

- Publicitar e divulgar o livro *Calculus Gems - Brief Lives and Memorable Mathematics* de George F. Simmons, que muito gostei de ler quando, há 20 anos, resolvi mudar de engenharia para matemática.
- Apresentar pequenas **obras de arte matemáticas** que podem ser apreciadas, compreendidas e até demonstradas, logo a seguir a uma primeira cadeira universitária de **cálculo diferencial e integral**.
- Há 5 anos que dou essa cadeira a alunos de engenharia no IST (campus do Tagus Park) e vou voltar a fazê-lo neste próximo ano lectivo.

Plano

Preciosidades
do Cálculo

Miguel Abreu

Introdução

Irracionais

e é Irracional

π é Irracional

Fórmula de
Leibniz

Fórmula de
Euler

Bibliografia

1 Irracionais

2 e é Irracional

3 π é Irracional

4 Fórmula de Leibniz (1673):
$$\pi/4 = 1 - 1/3 + 1/5 - 1/7 + \dots$$

5 Fórmula de Euler (1736):
$$\pi^2/6 = 1 + 1/4 + 1/9 + 1/16 + \dots$$

Irracionais

Preciosidades
do Cálculo

Miguel Abreu

Introdução

Irracionais

e é Irracional

π é Irracional

Fórmula de
Leibniz

Fórmula de
Euler

Bibliografia

Definição

Um número real $r \in \mathbb{R}$ diz-se um número **racional** se $r = p/q$ com $p, q \in \mathbb{Z}$ e $q \neq 0$. O conjunto dos números racionais é designado por $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$. Os elementos de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ dizem-se números **irracionais**.

O primeiro exemplo de número irracional é dado pelo seguinte teorema, tradicionalmente atribuído a Pitágoras (ca. 580-500 A.C.).

Teorema

$\sqrt{2}$ é irracional.

$\sqrt{2}$ é irracional

Precisidades
do Cálculo

Miguel Abreu

Introdução

Irracionais

e é Irracional

π é Irracional

Fórmula de
Leibniz

Fórmula de
Euler

Bibliografia

Dem.

Suponhamos por **absurdo** que

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q} \quad \text{com } p, q \in \mathbb{N} \text{ e } \text{mdc}(p, q) = 1.$$

Então

$$\frac{p^2}{q^2} = 2 \Rightarrow p^2 = 2q^2 \Rightarrow p^2 \text{ é par} \Rightarrow \text{p é par}, \quad p = 2k, k \in \mathbb{N}$$

$$\frac{4k^2}{q^2} = 2 \Rightarrow q^2 = 2k^2 \Rightarrow q^2 \text{ é par} \Rightarrow \text{q é par}$$

Logo, $\text{mdc}(p, q) \geq 2$ o que é **absurdo**. □



$$\sqrt{2} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \Rightarrow |p^2 - 2q^2| \geq 1, \forall p, q \in \mathbb{Z}$$

- Pitágoras fundou a chamada **Escola Pitagórica**, cujo lema era **Tudo é Número**, em que número significava, naturalmente, número **racional**. O facto dos **Teoremas de Pitágoras** garantirem que o comprimento da **diagonal de um quadrado** de lado 1 ser o **irracional** $\sqrt{2}$, foi obviamente muito problemático. Diz a lenda que os Pitagóricos o tentaram manter em **segredo**, tendo ido ao extremo de afogar o renegado que o revelou para o exterior.

Preponderância dos Irracionais

Preciosidades
do Cálculo

Miguel Abreu

Introdução

Irracionais

e é Irracional

π é Irracional

Fórmula de
Leibniz

Fórmula de
Euler

Bibliografia

Definição

Diremos que um subconjunto $S \subset \mathbb{R}$ tem **medida nula** se pode ser coberto por uma união de intervalos abertos com comprimento total **arbitrariamente pequeno**.

Teorema

$\mathbb{Q} \cap (0, 1]$ *tem medida nula*.

Tendo em conta que $p/q \in (0, 1] \Leftrightarrow q/p \in [1, +\infty)$ e $p/q \in (0, +\infty) \Leftrightarrow -p/q \in (-\infty, 0)$, tem-se imediatamente o seguinte

Corolário

$\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ *tem medida nula*.

Dem. (Teor.)

Precisões do Cálculo

Miguel Abreu

Introdução

Irracionais

e é Irracional

π é Irracional

Fórmula de Leibniz

Fórmula de Euler

Bibliografia

Dado $\varepsilon > 0$ arbitrário, temos que

$$\mathbb{Q} \cap (0, 1] \subset \bigcup_{q=1}^{\infty} \bigcup_{p=1}^q \left(\frac{p}{q} - \frac{\varepsilon}{q^3}, \frac{p}{q} + \frac{\varepsilon}{q^3} \right),$$

e o comprimento total L_{ε} desta união de intervalos abertos satisfaz

$$\begin{aligned} L_{\varepsilon} &\leq \sum_{q=1}^{\infty} \sum_{p=1}^q \frac{2\varepsilon}{q^3} = \sum_{q=1}^{\infty} \frac{2\varepsilon}{q^2} < 2\varepsilon + \sum_{q=2}^{\infty} \frac{2\varepsilon}{q(q-1)} \\ &= 2\varepsilon + 2\varepsilon \sum_{q=2}^{\infty} \left(\frac{1}{q-1} - \frac{1}{q} \right) = 2\varepsilon + 2\varepsilon = 4\varepsilon. \end{aligned}$$



- Usando o facto de $|q^2 - 2p^2| \geq 1$, $\forall p, q \in \mathbb{Z}$, temos

$$\left| \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{p}{q} \right| = \left| \frac{q^2 - 2p^2}{2q^2(\sqrt{2}/2 + p/q)} \right| \geq \frac{1}{2q^2(\sqrt{2}/2 + 1)} \\ > \frac{1}{4q^2} \geq \frac{1}{4q^3}, \quad \forall p, q \in \mathbb{N}, \quad p \leq q.$$

Logo, se $\varepsilon \leq 1/4$ o número $\sqrt{2}/2$ é um exemplo de irracional não coberto pela união disjunta de intervalos abertos anteriores.

- Recordámos também na demonstração anterior o facto da série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ ser **convergente**.

e é Irracional

Precisões
do Cálculo

Miguel Abreu

Introdução

Irracionais

e é Irracional

π é Irracional

Fórmula de
Leibniz

Fórmula de
Euler

Bibliografia

Definição

O número $e \in \mathbb{R}$ é definido como a soma da seguinte série:

$$\begin{aligned} e &\equiv 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \cdots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \end{aligned}$$

Teorema

e é irracional.

Demonstração

Preciosidades
do Cálculo

Miguel Abreu

Introdução

Irracionais

e é Irracional

π é Irracional

Fórmula de
Leibniz

Fórmula de
Euler

Bibliografia

Suponhamos por **absurdo** que $e = p/q$ com $p, q \in \mathbb{N}$.
Seja $q < N \in \mathbb{N}$. Temos então que

$$a \equiv N! \left(e - 1 - 1 - \frac{1}{2!} - \dots - \frac{1}{N!} \right) \in \mathbb{N}.$$

Por outro lado

$$\begin{aligned} a &= N! \left[\frac{1}{(N+1)!} + \frac{1}{(N+2)!} + \dots \right] \\ &< \frac{1}{N+1} + \frac{1}{(N+1)^2} + \dots = \frac{1}{N+1} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{N+1} \right)^k \right) \\ &= \frac{1}{N+1} \left(\frac{1}{1 - 1/(N+1)} \right) = \frac{1}{N} < 1. \end{aligned}$$

Absurdo. \square

π é Irracional

Preciosidades
do Cálculo

Miguel Abreu

Introdução

Irracionais

e é Irracional

π é Irracional

Fórmula de
Leibniz

Fórmula de
Euler

Bibliografia

- Provado pela primeira vez por J.H. Lambert (1761).
- Usaremos um método de C. Hermite (1873), aperfeiçoado por I. Niven (1947).
- Provaremos de facto que π^2 é irracional, o que implica que π é irracional.

Definição

O número $\pi \in \mathbb{R}$ é definido como sendo o primeiro zero positivo da função seno, i.e.

$$0 < \sin(\pi x) \leq 1 \text{ se } 0 < x < 1 \quad \text{e} \quad \sin(0) = \sin(\pi) = 0.$$

Função e Facto Auxiliares

Preciosidades
do Cálculo

Miguel Abreu

Introdução

Irracionais

e é Irracional

π é Irracional

Fórmula de
Leibniz

Fórmula de
Euler

Bibliografia

- Dado $n \in \mathbb{N}$, consideramos a função $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f_n(x) = \frac{x^n(1-x)^n}{n!} = \frac{1}{n!} \sum_{k=n}^{2n} c_k x^k \quad (\text{com } c_k \in \mathbb{Z}).$$

Propriedades relevantes:

- (i) $0 < f_n(x) < 1/n!$, se $0 < x < 1$;
 - (ii) $f_n^{(k)}(0), f_n^{(k)}(1) \in \mathbb{Z}$, para qualquer ordem $k \in \mathbb{N}_0$.
- Usaremos também o seguinte facto:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{n!} = 0, \quad \forall a \in \mathbb{R}.$$

π^2 é irracional - demonstração

Preciosidades
do Cálculo

Miguel Abreu

Introdução

Irracionais

e é Irracional

π é Irracional

Fórmula de
Leibniz

Fórmula de
Euler

Bibliografia

Suponhamos por **absurdo** que $\pi^2 = a/b$ com $a, b \in \mathbb{N}$.
Veremos que então

$$\int_0^1 \pi a^n f_n(x) \operatorname{sen}(\pi x) dx \in \mathbb{Z}, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Como

$$0 < \pi a^n f_n(x) \operatorname{sen}(\pi x) < \frac{\pi a^n}{n!} \quad \text{se } 0 < x < 1,$$

temos que

$$0 < \int_0^1 \pi a^n f_n(x) \operatorname{sen}(\pi x) dx < \frac{\pi a^n}{n!} < 1 \quad \text{se } n \gg 1.$$

Absurdo. \square

$\int_0^1 \pi a^n f_n(x) \sin(\pi x) dx \in \mathbb{Z}$ - demonstração

Preciosidades
do Cálculo

Miguel Abreu

Introdução

Irracionais

e é Irracional

π é Irracional

Fórmula de
Leibniz

Fórmula de
Euler

Bibliografia

Consideramos a função $F_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$F_n(x) = b^n \left[\pi^{2n} f_n(x) - \pi^{2n-2} f_n^{(2)}(x) + \cdots + (-1)^n f_n^{(2n)}(x) \right].$$

Temos então que $F_n(0), F_n(1) \in \mathbb{Z}$ e

$$\begin{aligned} [F_n'(x) \sin(\pi x) - \pi F_n(x) \cos(\pi x)]' &= b^n \pi^{2n+2} f_n(x) \sin(\pi x) \\ &= \pi^2 a^n f_n(x) \sin(\pi x). \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} \int_0^1 \pi a^n f_n(x) \sin(\pi x) dx &= \left[\frac{F_n'(x) \sin(\pi x)}{\pi} - F_n(x) \cos(\pi x) \right]_0^1 \\ &= F_n(1) + F_n(0). \end{aligned}$$



$$\pi/4 = 1 - 1/3 + 1/5 - 1/7 + \dots$$

Série de Taylor para a função **arcotangente**:

$$\arctan(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots \quad \text{se } |x| < 1 \text{ (versão CDI).}$$

Quando $x = 1$ temos $\arctan(1) = \pi/4$ e

$$1 - 1/3 + 1/5 - 1/7 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1},$$

uma **série alternada** decrescente, logo **convergente** pelo **CrITÉrio de Leibniz**.

Como justificar com **rigor** que, de facto,

$$\pi/4 = 1 - 1/3 + 1/5 - 1/7 + \dots?$$

$$\pi/4 = 1 - 1/3 + 1/5 - 1/7 + \dots - \text{dem.}$$

Começamos por considerar a fórmula **finita**

$$\frac{1}{1+t^2} = 1 - t^2 + t^4 - \dots + t^{4n} - \frac{t^{4n+2}}{1+t^2}, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Temos então que, para qualquer $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \arctan(x) &= \int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt \\ &= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots + \frac{x^{4n+1}}{4n+1} - R_n(x), \end{aligned}$$

com

$$R_n(x) = \int_0^x \frac{t^{4n+2}}{1+t^2} dt.$$

$$\pi/4 = 1 - 1/3 + 1/5 - 1/7 + \dots - \text{dem.}$$

Preciosidades
do Cálculo

Miguel Abreu

Introdução

Irracionais

e é Irracional

π é Irracional

Fórmula de
Leibniz

Fórmula de
Euler

Bibliografia

Se $0 \leq x$ temos que

$$0 \leq R_n(x) = \int_0^x \frac{t^{4n+2}}{1+t^2} dt \leq \int_0^x t^{4n+2} dt = \frac{x^{4n+3}}{4n+3}.$$

Se $0 \leq x \leq 1$ temos então que

$$0 \leq R_n(x) \leq \frac{x^{4n+3}}{4n+3} \leq \frac{1}{4n+3} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Assim,

$$\arctan(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots \quad \text{se } |x| \leq 1$$

e, de facto,

$$\pi/4 = 1 - 1/3 + 1/5 - 1/7 + \dots.$$



Fórmula de Leibniz

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \dots$$

- Leibniz descobriu esta fórmula em 1673, usando um processo engenhoso para calcular a área de um quarto de um círculo de raio 1 (cf. Simmons).
- "É como se, através desta expansão, o véu que cobria aquele número estranho $[\pi]$ fosse levantado."
K. Knopp (séc. XX)

$$\pi^2/6 = 1 + 1/4 + 1/9 + 1/16 + \dots$$

- **Série de Taylor** para a função **seno**, válida para todo o $x \in \mathbb{R}$:

$$\text{sen}(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$$

- **Produto Infinito de Euler** para a função **seno**, válido para todo o $x \in \mathbb{R}$:

$$\text{sen}(x) = x \cdot \left(1 - \frac{x^2}{\pi^2}\right) \cdot \left(1 - \frac{x^2}{4\pi^2}\right) \cdot \left(1 - \frac{x^2}{9\pi^2}\right) \cdot \dots$$

- **Intuitivamente**, o Produto Infinito de Euler para a função seno não é mais do que a **factorização polinomial adequada** da sua Série de Taylor.

$$\pi^2/6 = 1 + 1/4 + 1/9 + 1/16 + \dots$$

Preciosidades
do Cálculo

Miguel Abreu

Introdução

Irracionais

e é Irracional

π é Irracional

Fórmula de
Leibniz

Fórmula de
Euler

Bibliografia

Igualando o **coeficiente de x^3** nas duas expressões anteriores, obtemos

$$\frac{1}{3!} = \frac{1}{\pi^2} + \frac{1}{4\pi^2} + \frac{1}{9\pi^2} + \dots,$$

o que é equivalente à

Fórmula de Euler

$$\frac{\pi^2}{6} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \dots$$

$$\pi^2/6 = 1 + 1/4 + 1/9 + 1/16 + \dots$$

Preciosidades
do Cálculo

Miguel Abreu

Introdução

Irracionais

e é Irracional

π é Irracional

Fórmula de
Leibniz

Fórmula de
Euler

Bibliografia

Considerações semelhantes, cf. Simmons, levaram Euler à descoberta, em 1736, da seguinte fórmula mais geral:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2k}} = (-1)^{k-1} \frac{2^{2k} B_{2k}}{2(2k)!} \pi^{2k},$$

onde $k \in \mathbb{N}$ e os B_{2k} são **números de Bernoulli**, e.g.

$$B_2 = 1/6, \quad B_4 = -1/30, \quad B_6 = 1/42, \dots$$

Em particular,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^6} = \frac{\pi^6}{945}, \dots$$

Nota

Preciosidades
do Cálculo

Miguel Abreu

Introdução

Irracionais

e é Irracional

π é Irracional

Fórmula de
Leibniz

Fórmula de
Euler

Bibliografia

"É notável que, em mais de 250 anos, não tenham havido progressos em encontrar a soma exacta de qualquer das séries

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^5}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^7}, \quad \dots$$

Talvez seja preciso um segundo Euler, mas não há nenhum à vista."

George F. Simmons (1992)

Fórmula de Euler via Integral Duplo

Precisidades
do Cálculo

Miguel Abreu

Introdução

Irracionais

e é Irracional

π é Irracional

Fórmula de
Leibniz

Fórmula de
Euler

Bibliografia

$$\begin{aligned}\int_0^1 \int_0^1 \frac{dx \, dy}{1 - xy} &= \int_0^1 \int_0^1 \left(1 + xy + x^2 y^2 + \dots\right) dx \, dy \\&= \int_0^1 \left[x + \frac{1}{2} x^2 y + \frac{1}{3} x^3 y^2 + \dots \right]_{x=0}^{x=1} dy \\&= \int_0^1 \left(1 + \frac{y}{2} + \frac{y^2}{3} + \dots\right) dy \\&= \left[y + \frac{y^2}{2^2} + \frac{y^3}{3^2} + \dots \right]_{y=0}^{y=1} \\&= 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots\end{aligned}$$

Nota Final

Preciosidades
do Cálculo

Miguel Abreu

Introdução

Irracionais

e é Irracional

π é Irracional

Fórmula de
Leibniz

Fórmula de
Euler

Bibliografia

Logo

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \int_0^1 \int_0^1 \frac{dx \, dy}{1 - xy}.$$

É **possível calcular explicitamente** este integral duplo (cf. Simmons).

Notem que, de forma análoga,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} = \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \frac{dx \, dy \, dz}{1 - xyz}.$$

Assim, quem **conseguir calcular explicitamente** este integral triplo poderá ser considerado, pelo menos aos olhos de George F. Simmons, um **segundo Euler** ...

Bibliografia

Preciosidades
do Cálculo

Miguel Abreu

Introdução

Irracionais

e é Irracional

π é Irracional

Fórmula de
Leibniz

Fórmula de
Euler

Bibliografia



I. Niven.
Irrational Numbers.
MAA, 1956.



G.F. Simmons.
Calculus Gems - Brief Lives and Memorable
Mathematics.
McGraw-Hill, 1992.



M. Spivak.
Calculus, corrected 3rd edition.
Cambridge, 2006.