

Não há 3 sem 2: O Teorema de Sharkovskii

Nuno Mestre

Programa Gulbenkian Novos Talentos em Matemática

Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra

ESTRUTURA

1. **Introdução**
2. **Casos $p = 2$ e $p = 3$**
3. **Caso geral**

1 Introdução

Um sistema dinâmico discreto é uma colecção de estados avaliados em tempos discretos, em que um estado é dado em função de um ou mais estados anteriores. Vamos estudar o caso

$$x_{n+1} = f(x_n),$$

onde o estado x_{n+1} é obtido a partir de x_n aplicando uma função f , de variável real.

Um exemplo particularmente interessante é o sistema logístico, que obtemos tomando a função

$$f(x) = rx(1 - x).$$

O sistema é então definido por:

$$x_{n+1} = rx_n(1 - x_n),$$

onde r é um parâmetro fixo.

Dado um valor x no domínio do sistema, chamamos trajectória de x à sucessão $x, f(x), f^2(x), f^3(x) \dots$

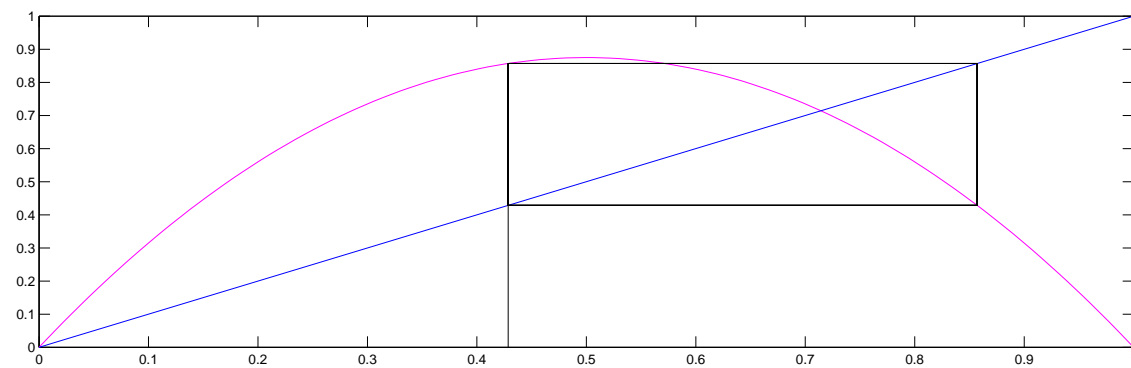
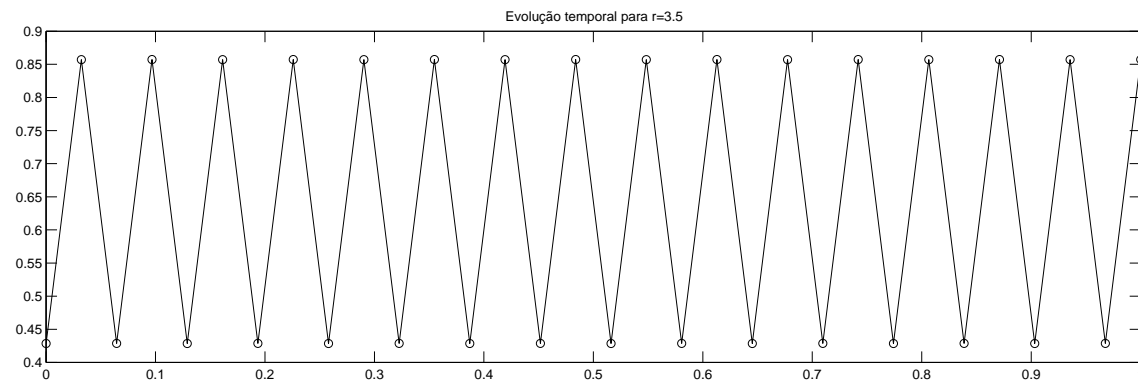
Chamamos órbita de x ao conjunto $\{x, f(x), f^2(x), f^3(x) \dots\}$.

Por exemplo, para $r = 3, 5$ e $x = 3/7$, temos como trajectória a sucessão

$$\frac{3}{7}, 3 \times \frac{3}{7} \left(1 - \frac{3}{7}\right) = \frac{6}{7}, \frac{3}{7}, \frac{6}{7}, \frac{3}{7}, \dots$$

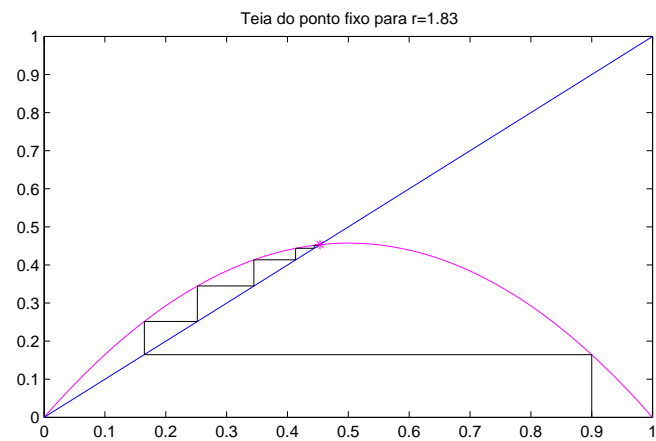
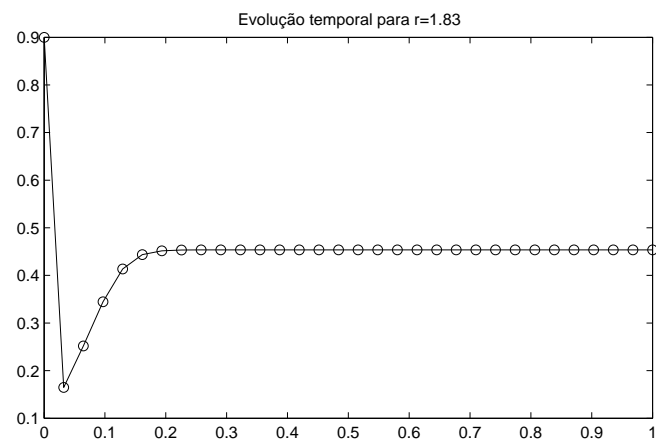
e como órbita o conjunto

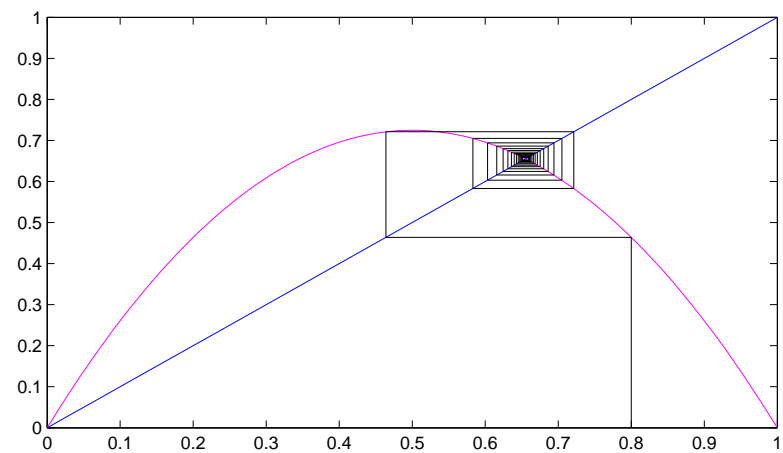
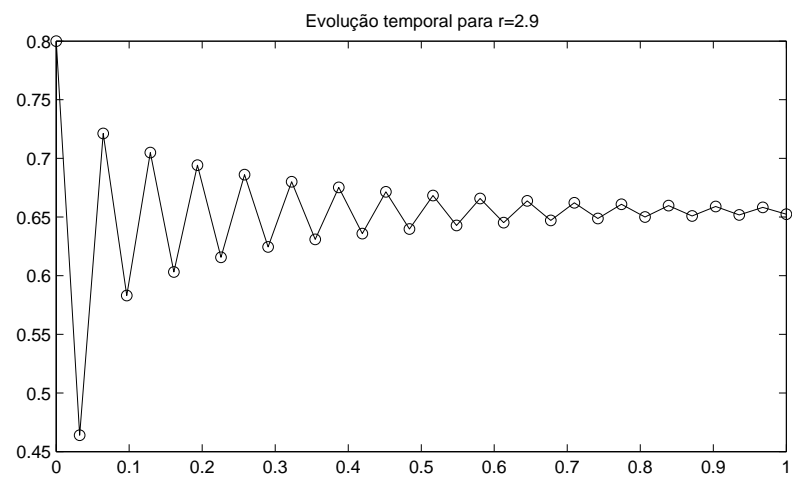
$$\left\{ \frac{3}{7}, \frac{6}{7} \right\}.$$

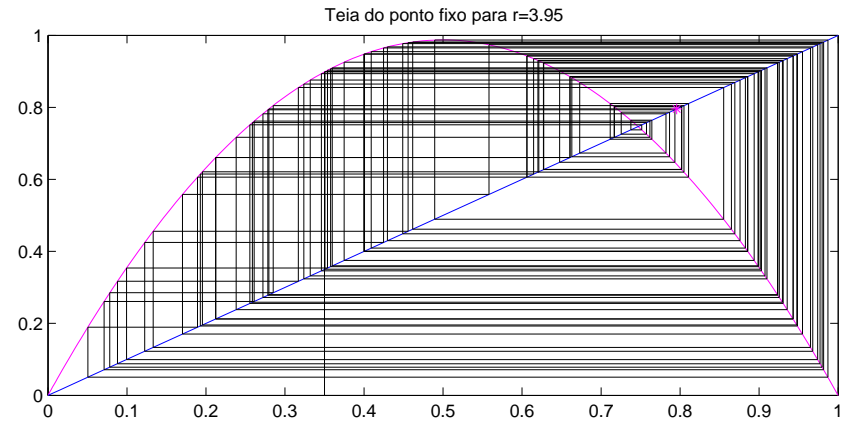
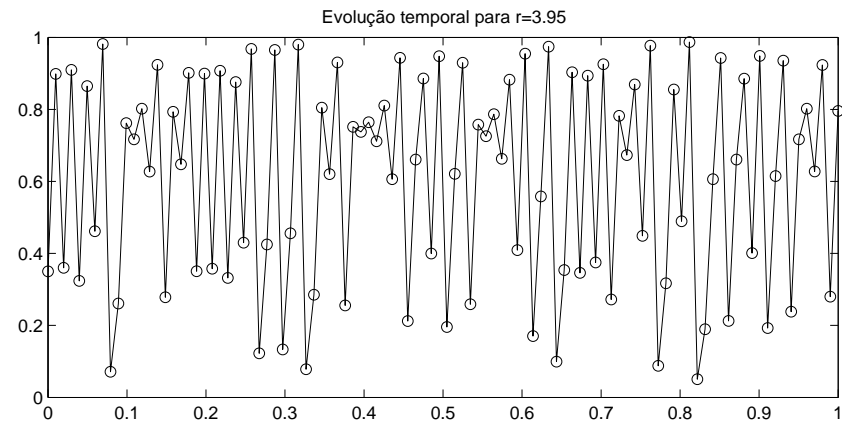


Se na trajectória de um ponto x_0 , ao fim de algumas iterações os pontos se repetem, ou seja se $\exists j : f^j(x_0) = x_0$, então

- dizemos que x_0 é um ponto periódico de período n , onde n é o menor natural tal que $f^n(x_0) = x_0$;
- chamamos à órbita de x_0 órbita n -periódica.







Ordenamento de Sharkovskii:

$$3 \prec 5 \prec 7 \prec 9 \prec \dots \prec 2 \cdot 3 \prec 2 \cdot 5 \prec \dots \prec 2^2 \cdot 3 \prec 2^2 \cdot 5 \prec \dots \prec 2^3 \prec 2^2 \prec 2 \prec 1$$

Teorema 1.1 (Sharkovskii) *Seja f uma função contínua num intervalo, definindo um sistema com uma órbita p -periódica. Se $p \prec q$ então o sistema tem também uma órbita q -periódica.*

2 Casos $p = 2$ e $p = 3$

Começaremos por provar os seguintes casos particulares:

- se f tem órbita 2-periódica, tem um ponto fixo
- se f tem órbita 3-periódica, tem órbita de qualquer período

Teorema 2.1 (Ponto fixo) *Seja $f : J \rightarrow J$ contínua e $I = [a, b] \subseteq J$ um intervalo tal que $I \subseteq f(I)$. Então f tem um ponto fixo em I .*

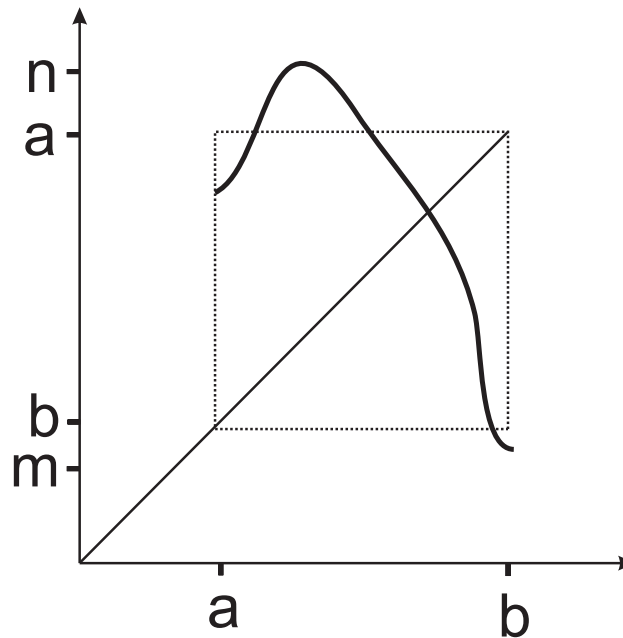


Figura 1: ponto fixo em $[a, b]$

Primeiro caso ($p = 2$):

Suponhamos que f tem órbita 2-periódica $\{x_1, x_2\}$, ou seja, $f(x_1) = x_2$ e $f(x_2) = f(x_1)$.

Então $\{x_1, x_2\} \subseteq f([x_1, x_2])$, e como a imagem de um intervalo é ainda um intervalo temos $[x_1, x_2] \subseteq f([x_1, x_2])$

A existência de um ponto fixo é então imediata. \square

Suponhamos que f tem uma órbita p -periódica, com $p \geq 3$

Sejam $x_1 < \dots < x_p$ os pontos da órbita.

Estes pontos dividem o intervalo $[x_1, x_p]$ em $p - 1$ subintervalos.

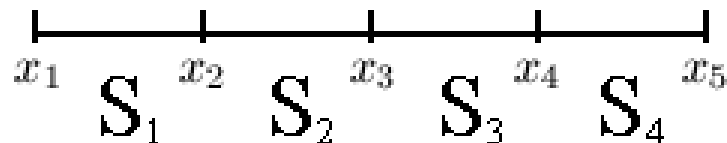


Figura 2: órbita 5-periódica

A cada órbita p -periódica de f vamos associar um grafo dirigido.

O grafo tem $p - 1$ vértices, que são os subintervalos S_i .

Tem-se um arco $S_i \rightarrow S_j$ se e só se $S_j \subseteq f(S_i)$.

Segundo Caso ($p = 3$):

Suponhamos que f tem órbita 3-periódica, $x_1 < x_2 < x_3$.

Seja $y = x_2$, e suponhamos $f(y) = x_1$, então temos o grafo:

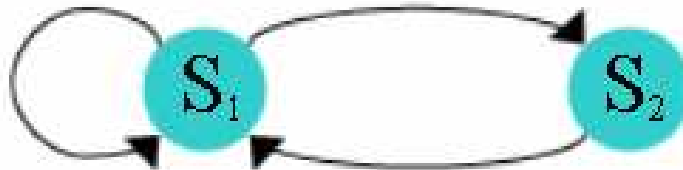


Figura 3: grafo de órbita 3-periódica

Resultado auxiliar:

Se I_1, I_2, \dots, I_n são intervalos fechados e tivermos

$$I_2 \subseteq f(I_1), I_3 \subseteq f(I_2), \dots, I_n \subseteq f(I_{n-1}),$$

e ainda

$$I_1 \subseteq f(I_n),$$

então temos $I_1 \subseteq f^n(I_1)$.

Portanto f^n tem um ponto fixo, e f uma órbita periódica, com período divisor de n .

Assim, encontrando no grafo de transição um ciclo de comprimento n , podemos garantir a existência de uma órbita m -periódica com m divide n .

Se $m < n$ então o ciclo será a repetição sucessiva de um ciclo indecomponível de ordem m .

No nosso exemplo encontramos:

O ciclo $S_1 \rightarrow S_1$.

O ciclo $S_1 \rightarrow S_2 \rightarrow S_1$.

O ciclo $S_1 \rightarrow S_2 \rightarrow S_1 \rightarrow S_1 \rightarrow \dots \rightarrow S_1$, de comprimento n .

Temos portanto órbitas n -periódicas para todo o n natural. \square

3 Caso geral

Ordenamento de Sharkovskii:

$$3 \prec 5 \prec 7 \prec 9 \prec \dots \prec 2 \cdot 3 \prec 2 \cdot 5 \prec \dots \prec 2^2 \cdot 3 \prec 2^2 \cdot 5 \prec \dots \prec 2^3 \prec 2^2 \prec 2 \prec 1$$

Teorema 3.1 (Sharkovskii) *Seja f uma função contínua num intervalo, com uma órbita p -periódica. Se $p \prec q$ então f tem uma órbita q -periódica.*

Sejam $x_1 < x_2 < \dots < x_p$ os elementos de uma órbita periódica. Na partição resultante, designamos por A_1 o intervalo mais à direita cujo extremo inferior é transformado num ponto maior que ele próprio.

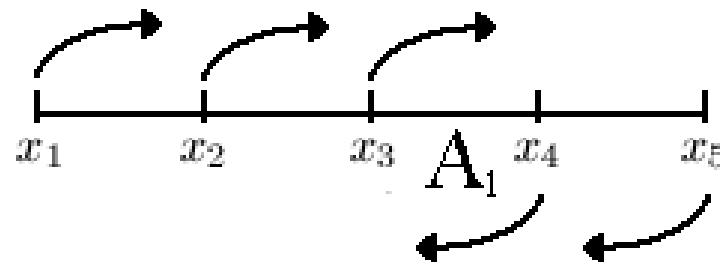


Figura 4: escolha de A_1

Pela escolha de A_1 , temos $A_1 \subseteq f(A_1)$.

Aplicando f nos dois termos sucessivamente, obtemos:

$$A_1 \subseteq f(A_1) \subseteq f^2(A_1) \subseteq \dots$$

Lema 3.2 *O número de pontos x_i da órbita que estão contidos em $f^j(A_1)$ cresce estritamente com j , até que todos os p pontos da órbita estão contidos em $f^K(A_1)$, para um certo K .*

K é o menor inteiro positivo para o qual $f^K(A_1)$ contém $[x_1, x_p]$.

$K \leq p - 2$, pois A_1 contém 2 pontos da órbita e, com cada incremento de j , $f^j(A_1)$ contém pelo menos mais um dos p pontos.

Assim, a imagem de A_1 contém não só A_1 mas pelo menos mais um subintervalo S_i .

Traduzindo em termos de grafos de transição isto significa que de A_1 , para além de uma arco para si próprio sai ainda um outro arco para algum S_i .

Lema 3.3 *Dado um S_n fixo temos uma de duas hipóteses:*

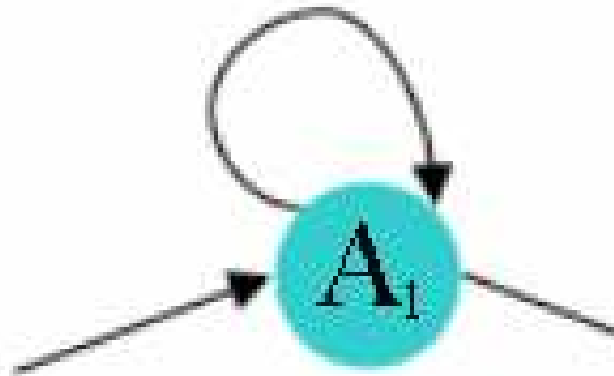
- 1. Existe um S_m distinto de S_n cuja imagem contém S_n*
- 2. p é par e f tem uma órbita 2-periódica*

Recordemos:

Pela nossa escolha de A_1 , temos $A_1 \rightarrow A_1$

Pelo lema 3.2 existe um S_n , distinto de A_1 tal que $A_1 \rightarrow S_n$.

Pelo lema 3.3 existe um S_m , distinto de A_1 tal que $S_m \rightarrow A_1$



Lema 3.4 *Temos uma das seguintes alternativas:*

1. *f tem uma órbita $(p - 2)$ -periódica;*
2. *p é par e f tem uma órbita 2-periódica;*
3. *$K = p - 2$.*

Prova do caso ímpar:

Seja p é o maior número ímpar para o qual f tem uma órbita p -periódica.

Observemos o que se passa se tivermos $p = 7$.

Pelo Lema 3.4, $K = p - 2 = 5$.

Isto significa que em cada passo de iteração de f sobre o subintervalo A_1 , apenas um ponto da órbita é acrescentado ao intervalo anterior.

Seja $A_1 = [x_m, x_{m+1}]$ então

1. ou $f(x_m) = x_{m+1}, f(x_{m+1}) = x_{m-1},$
2. ou $f(x_m) = x_{m+2}, f(x_{m+1}) = x_m.$

Então temos que $A_1 \rightarrow A_2 \rightarrow \dots \rightarrow A_6 \rightarrow A_1$ e que $A_6 \rightarrow A_j$, qualquer que seja j ímpar, $j < p$.

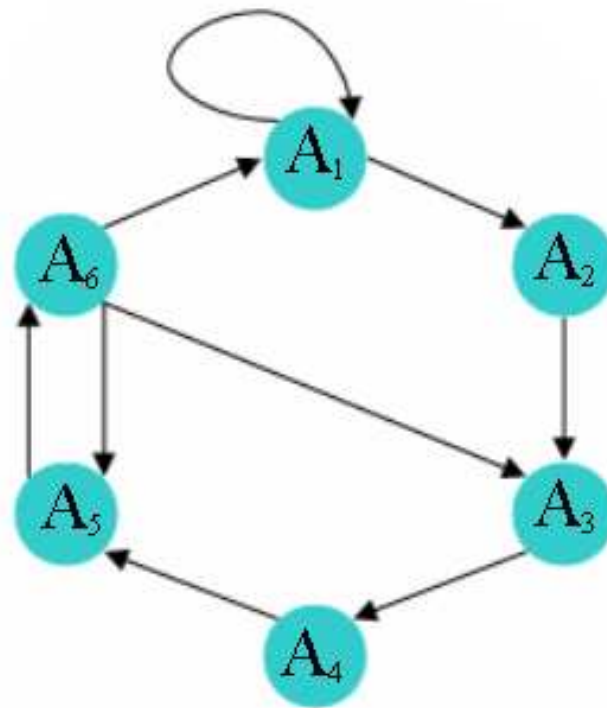


Figura 5: grafo da órbita 7-periódica

Temos então órbitas periódicas de período :

- 1: $A_1 \rightarrow A_1$
- todos os períodos pares menores do que 7:
 $2(A_6 \rightarrow A_5 \rightarrow A_6)$, $4(A_6 \rightarrow A_3 \rightarrow A_4 \rightarrow A_5 \rightarrow A_6)$,
 $6(A_1 \rightarrow \dots \rightarrow A_6 \rightarrow A_1)$
- qualquer número $q > 7$:
 $A_1 \rightarrow \dots \rightarrow A_6 \rightarrow A_1 \rightarrow A_1 \rightarrow \dots \rightarrow A_1$

Tendo em conta as observações feitas neste caso ($p = 7$), provamos de seguida o Teorema para qualquer p ímpar. Facilmente se constata que o grafo neste caso será análogo:

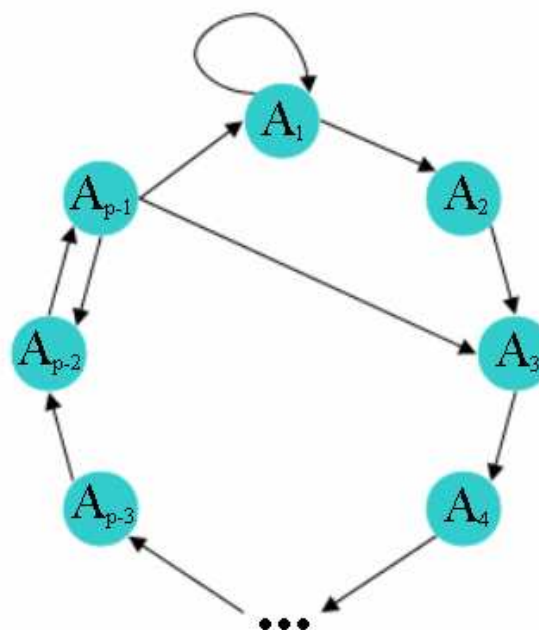


Figura 6: grafo de órbita de período ímpar

Observando o grafo podemos verificar a existência de órbitas periódicas de período :

- $1: A_1 \rightarrow A_1$

- $q < p$, com q par:

$$A_{p-1} \rightarrow A_{p-q} \rightarrow A_{p-q+1} \rightarrow A_{p-q+2} \rightarrow \dots \rightarrow A_{p-1}$$

- $q > p: A_1 \rightarrow A_2 \rightarrow \dots \rightarrow A_{p-1} \rightarrow A_1 \rightarrow A_1 \rightarrow \dots \rightarrow A_1$

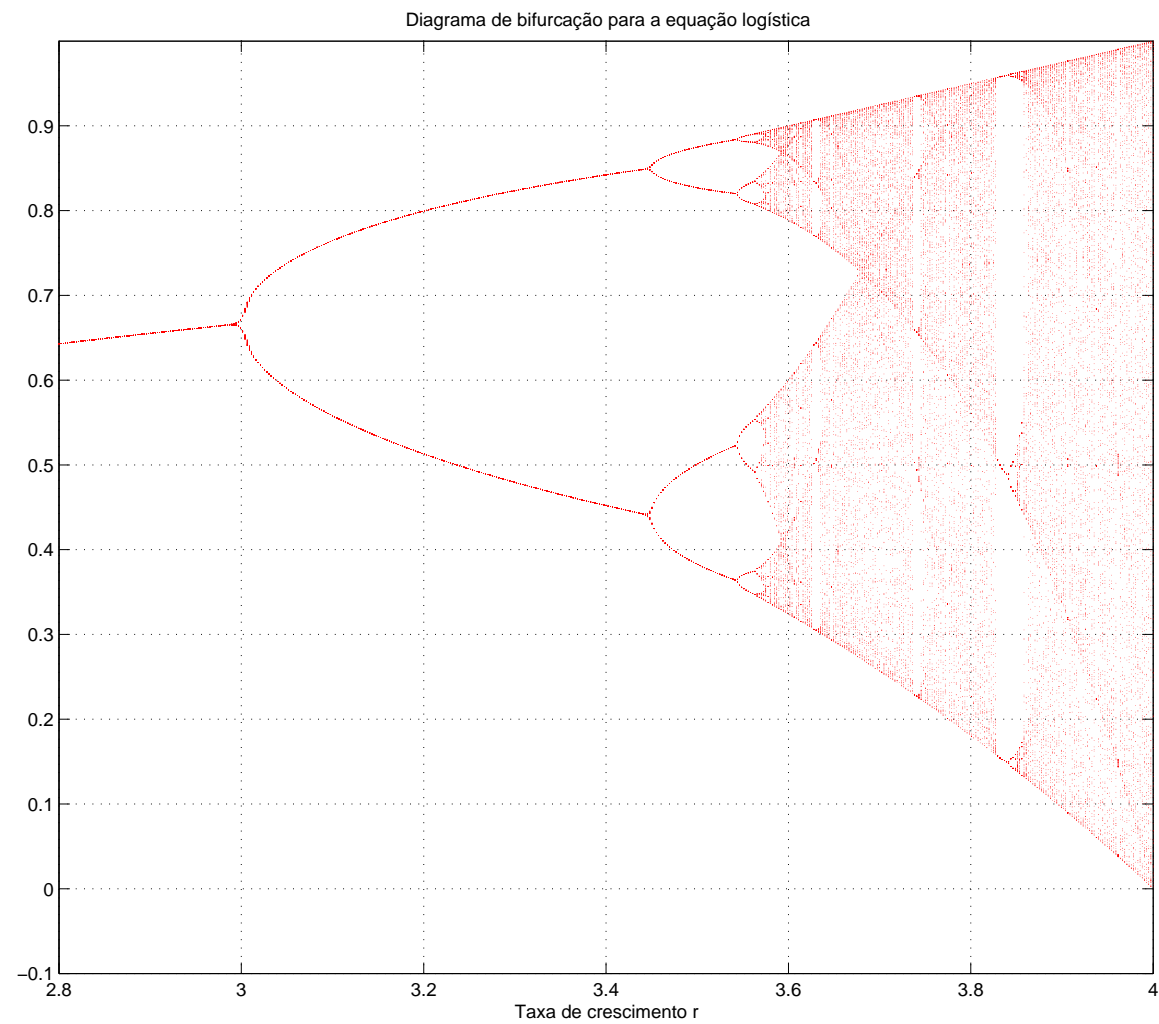


Proposição 3.5 *Se f tem uma órbita p -periódica, com p par, tem também uma órbita 2-periódica.*

Estaríamos então em condições de provar o Teorema para p potência de 2:

Proposição 3.6 *Se f tem órbita 2^k -periódica, tem órbitas de período $2^{k-1}, \dots, 4, 2, 1$*

Usando a validade do Teorema para potências de 2 e ímpares consegue-se provar (com algum trabalho) os restantes casos.



Referências:

K.T. Alligood, T.D. Sauer e J.A. Yorke, *Chaos. An introduction to Dynamical Systems*, Springer-Verlag, New York, 1996.

L.S. Block e W.A. Coppel; *Dynamics in One Dimension*, Springer-Verlag Lecture Notes in Mathematics **1513**, Berlin, Heidelberg, 1992.

Contacto:

nunomestre@msn.com