

Simetria e grupos

Simetria e grupóides

Simetria escondida

Home Page

Title Page



Page 1 of 29

Go Back

Full Screen

Close

Quit

Simétrico ou não?

Rui Loja Fernandes

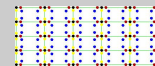
Departamento de Matemática
Instituto Superior Técnico

Setembro, 2004

Referência Principal:

A. Weinstein, Groupoids: Unifying Internal and External Symmetry, *Notices Amer. Math. Soc.* **43** (1996).

<http://www.math.ist.utl.pt/~rfern/>



Simetria e grupos

Simetria e grupóides

Simetria escondida

Home Page

Title Page



Page 2 of 29

Go Back

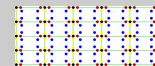
Full Screen

Close

Quit

1. Simetria e grupos

Como formalizar a noção de simetria?



Simetria e grupos

Simetria e grupóides

Simetria escondida

Home Page

Title Page



Page 2 of 29

Go Back

Full Screen

Close

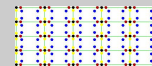
Quit

1. Simetria e grupos

Como formalizar a noção de simetria?

Simetrias \longleftrightarrow Grupos

Grupos



Simetria e grupos

Simetria e grupóides

Simetria escondida

Home Page

Title Page



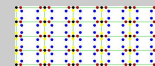
Page 3 of 29

Go Back

Full Screen

Close

Quit



Simetria e grupos

Simetria e grupóides

Simetria escondida

Home Page

Title Page



Page 3 of 29

Go Back

Full Screen

Close

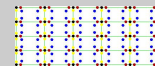
Quit

Grupos

Um **grupo** é um conjunto G com uma operação de **multiplicação**

$$\begin{aligned} G \times G &\rightarrow G \\ (g_1, g_2) &\mapsto g_1 g_2 \end{aligned}$$

que satisfaz:



Simetria e grupos

Simetria e grupóides

Simetria escondida

Home Page

Title Page



Page 3 of 29

Go Back

Full Screen

Close

Quit

Grupos

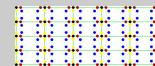
Um **grupo** é um conjunto G com uma operação de **multiplicação**

$$\begin{aligned} G \times G &\rightarrow G \\ (g_1, g_2) &\mapsto g_1 g_2 \end{aligned}$$

que satisfaz:

- **Associatividade.** Se $g_1, g_2, g_3 \in G$:

$$(g_1 g_2) g_3 = g_1 (g_2 g_3).$$



Grupos

Um **grupo** é um conjunto G com uma operação de **multiplicação**

$$\begin{aligned} G \times G &\rightarrow G \\ (g_1, g_2) &\mapsto g_1 g_2 \end{aligned}$$

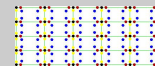
que satisfaz:

- **Associatividade.** Se $g_1, g_2, g_3 \in G$:

$$(g_1 g_2) g_3 = g_1 (g_2 g_3).$$

- **Identidade.** Existe um elemento $e \in G$:

$$ge = eg = e.$$



Grupos

Um **grupo** é um conjunto G com uma operação de **multiplicação**

$$\begin{aligned} G \times G &\rightarrow G \\ (g_1, g_2) &\mapsto g_1 g_2 \end{aligned}$$

que satisfaz:

- **Associatividade.** Se $g_1, g_2, g_3 \in G$:

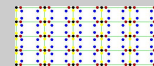
$$(g_1 g_2) g_3 = g_1 (g_2 g_3).$$

- **Identidade.** Existe um elemento $e \in G$:

$$ge = eg = e.$$

- **Inverso.** Para todo o $g \in G$ existe $g^{-1} \in G$:

$$gg^{-1} = g^{-1}g = e.$$



Simetria e grupos

Simetria e grupóides

Simetria escondida

Home Page

Title Page



Page 4 of 29

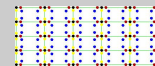
Go Back

Full Screen

Close

Quit

Exemplo: grupo das isometrias de \mathbb{R}^n



Simetria e grupos

Simetria e grupóides

Simetria escondida

Home Page

Title Page



Page 4 of 29

Go Back

Full Screen

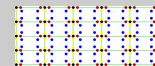
Close

Quit

Exemplo: grupo das isometrias de \mathbb{R}^n

Se $x = (x_1, \dots, x_n)$ e $y = (y_1, \dots, y_n)$:

$$d(x, y) \equiv \|x - y\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}.$$



Simetria e grupos

Simetria e grupóides

Simetria escondida

Home Page

Title Page



Page 4 of 29

Go Back

Full Screen

Close

Quit

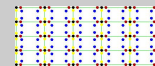
Exemplo: grupo das isometrias de \mathbb{R}^n

Se $x = (x_1, \dots, x_n)$ e $y = (y_1, \dots, y_n)$:

$$d(x, y) \equiv ||x - y|| = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}.$$

o **grupo Euclideano** é o conjunto:

$$E(n) = \{\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n : d(\phi(x), \phi(y)) = d(x, y), \forall x, y \in \mathbb{R}^n\}$$



Simetria e grupos

Simetria e grupóides

Simetria escondida

Home Page

Title Page



Page 4 of 29

Go Back

Full Screen

Close

Quit

Exemplo: grupo das isometrias de \mathbb{R}^n

Se $x = (x_1, \dots, x_n)$ e $y = (y_1, \dots, y_n)$:

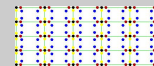
$$d(x, y) \equiv \|x - y\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}.$$

o **grupo Euclidean** é o conjunto:

$$E(n) = \{\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n : d(\phi(x), \phi(y)) = d(x, y), \forall x, y \in \mathbb{R}^n\}$$

com multiplicação a *composição* de isometrias:

$$\begin{aligned} E(n) \times E(n) &\rightarrow E(n) \\ (\phi_1, \phi_2) &\longmapsto \phi_1 \circ \phi_2. \end{aligned}$$



Simetria e grupos

Simetria e grupóides

Simetria escondida

Home Page

Title Page



Page 5 of 29

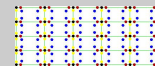
Go Back

Full Screen

Close

Quit

Grupo das isometrias de \mathbb{R}^n (cont.)



Simetria e grupos

Simetria e grupóides

Simetria escondida

Home Page

Title Page



Page 5 of 29

Go Back

Full Screen

Close

Quit

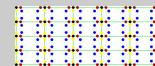
Grupo das isometrias de \mathbb{R}^n (cont.)

Toda a isometria $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ é da forma:

$$\phi(x) = Ax + b,$$

onde $b \in \mathbb{R}^n$ e A é uma **matriz ortogonal**:

$$AA^T = A^T A = I.$$



Simetria e grupos

Simetria e grupóides

Simetria escondida

Home Page

Title Page



Page 5 of 29

Go Back

Full Screen

Close

Quit

Grupo das isometrias de \mathbb{R}^n (cont.)

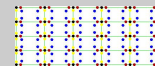
Toda a isometria $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ é da forma:

$$\phi(x) = Ax + b,$$

onde $b \in \mathbb{R}^n$ e A é uma **matriz ortogonal**:

$$AA^T = A^T A = I.$$

ISOMETRIA = TRANSFORMAÇÃO ORTOGONAL +
TRANSLAÇÃO



Simetria e grupos

Simetria e grupóides

Simetria escondida

Home Page

Title Page



Page 5 of 29

Go Back

Full Screen

Close

Quit

Grupo das isometrias de \mathbb{R}^n (cont.)

Toda a isometria $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ é da forma:

$$\phi(x) = Ax + b,$$

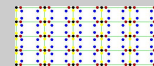
onde $b \in \mathbb{R}^n$ e A é uma **matriz ortogonal**:

$$AA^T = A^T A = I.$$

ISOMETRIA = TRANSFORMAÇÃO ORTOGONAL +
TRANSLAÇÃO

Observação:

Uma **isometria própria** é uma isometria que preserva a orientação $\Leftrightarrow \phi(x) = Ax + b$ com $\det A = 1$.



Simetria e grupos

Simetria e grupóides

Simetria escondida

Home Page

Title Page



Page 6 of 29

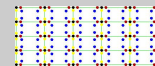
Go Back

Full Screen

Close

Quit

O grupo Euclidean possui **subgrupos** familiares:



Simetria e grupos

Simetria e grupóides

Simetria escondida

Home Page

Title Page



Page 6 of 29

Go Back

Full Screen

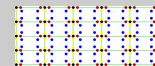
Close

Quit

O grupo Euclidiano possui **subgrupos** familiares:

- O grupo das translações:

$$\mathbb{R}^n = \{ \phi \in E(n) : \phi \text{ é uma translação} \}, \\ \simeq \{ b \in \mathbb{R}^n \}.$$



Simetria e grupos

Simetria e grupóides

Simetria escondida

Home Page

Title Page



Page 6 of 29

Go Back

Full Screen

Close

Quit

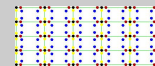
O grupo Euclidiano possui **subgrupos** familiares:

- O **grupo das translações**:

$$\mathbb{R}^n = \{ \phi \in E(n) : \phi \text{ é uma translação} \}, \\ \simeq \{ b \in \mathbb{R}^n \}.$$

- O **grupo ortogonal**:

$$O(n) = \{ \phi \in E(n) : \phi \text{ é uma transf. ortogonal} \}, \\ \simeq \{ A : AA^T = A^T A = I \}.$$



O grupo Euclidiano possui **subgrupos** familiares:

- O **grupo das translações**:

$$\begin{aligned}\mathbb{R}^n &= \{\phi \in E(n) : \phi \text{ é uma translação} \}, \\ &\simeq \{b \in \mathbb{R}^n\}.\end{aligned}$$

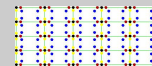
- O **grupo ortogonal**:

$$\begin{aligned}O(n) &= \{\phi \in E(n) : \phi \text{ é uma transf. ortogonal} \}, \\ &\simeq \{A : AA^T = A^T A = I\}.\end{aligned}$$

- O **grupo especial ortogonal** (“rotações”):

$$\begin{aligned}SO(n) &= \{\phi \in O(n) : \phi \text{ é própria} \} \\ &\simeq \{A : AA^T = A^T A = I, \det A = 1\}.\end{aligned}$$

Simetrias



Simetria e grupos

Simetria e grupóides

Simetria escondida

Home Page

Title Page



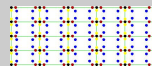
Page 7 of 29

Go Back

Full Screen

Close

Quit



Simetria e grupos

Simetria e grupóides

Simetria escondida

Home Page

Title Page



Page 7 of 29

Go Back

Full Screen

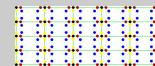
Close

Quit

Simetrias

Se $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, o **grupo das simetrias** de Ω é

$$G_{\Omega} \equiv \{ \phi \in E(n) : \phi(\Omega) = \Omega \} .$$



Simetria e grupos

Simetria e grupóides

Simetria escondida

Home Page

Title Page



Page 7 of 29

Go Back

Full Screen

Close

Quit

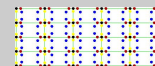
Simetrias

Se $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, o **grupo das simetrias de Ω** é

$$G_{\Omega} \equiv \{ \phi \in E(n) : \phi(\Omega) = \Omega \} .$$

Por vezes, descreve-se apenas o **grupo das simetrias próprias**

$$\tilde{G}_{\Omega} \equiv \{ \phi \in E(n) : \phi(\Omega) = \Omega, \phi \text{ é própria} \} .$$



Simetria e grupos

Simetria e grupóides

Simetria escondida

Home Page

Title Page



Page 7 of 29

Go Back

Full Screen

Close

Quit

Simetrias

Se $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, o **grupo das simetrias** de Ω é

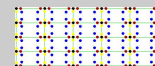
$$G_{\Omega} \equiv \{ \phi \in E(n) : \phi(\Omega) = \Omega \} .$$

Por vezes, descreve-se apenas o **grupo das simetrias próprias**

$$\tilde{G}_{\Omega} \equiv \{ \phi \in E(n) : \phi(\Omega) = \Omega, \phi \text{ é própria} \} .$$

Princípio Filosófico:

Um objecto é simétrico se possui *muitas* simetrias.



Simetria e grupos

Simetria e grupóides

Simetria escondida

Home Page

Title Page



Page 7 of 29

Go Back

Full Screen

Close

Quit

Simetrias

Se $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, o **grupo das simetrias** de Ω é

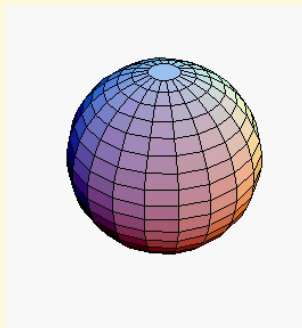
$$G_{\Omega} \equiv \{ \phi \in E(n) : \phi(\Omega) = \Omega \} .$$

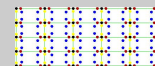
Por vezes, descreve-se apenas o **grupo das simetrias próprias**

$$\tilde{G}_{\Omega} \equiv \{ \phi \in E(n) : \phi(\Omega) = \Omega, \phi \text{ é própria} \} .$$

Princípio Filosófico:

Um objecto é simétrico se possui *muitas* simetrias.





Simetria e grupos

Simetria e grupóides

Simetria escondida

Home Page

Title Page



Page 7 of 29

Go Back

Full Screen

Close

Quit

Simetrias

Se $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, o **grupo das simetrias** de Ω é

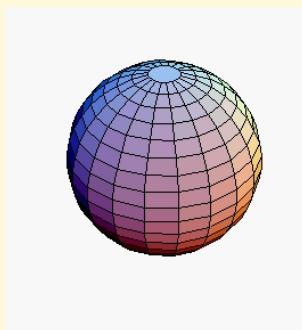
$$G_{\Omega} \equiv \{ \phi \in E(n) : \phi(\Omega) = \Omega \} .$$

Por vezes, descreve-se apenas o **grupo das simetrias próprias**

$$\tilde{G}_{\Omega} \equiv \{ \phi \in E(n) : \phi(\Omega) = \Omega, \phi \text{ é própria} \} .$$

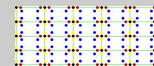
Princípio Filosófico:

Um objecto é simétrico se possui *muitas* simetrias.



$$G_{\Omega} = O(n)$$

$$\tilde{G}_{\Omega} = SO(n)$$



Simetria e grupos

Simetria e grupóides

Simetria escondida

Home Page

Title Page



Page 8 of 29

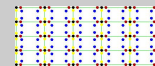
Go Back

Full Screen

Close

Quit

Exemplo: Pavimentação de \mathbb{R}^2



Simetria e grupos

Simetria e grupóides

Simetria escondida

Home Page

Title Page



Page 8 of 29

Go Back

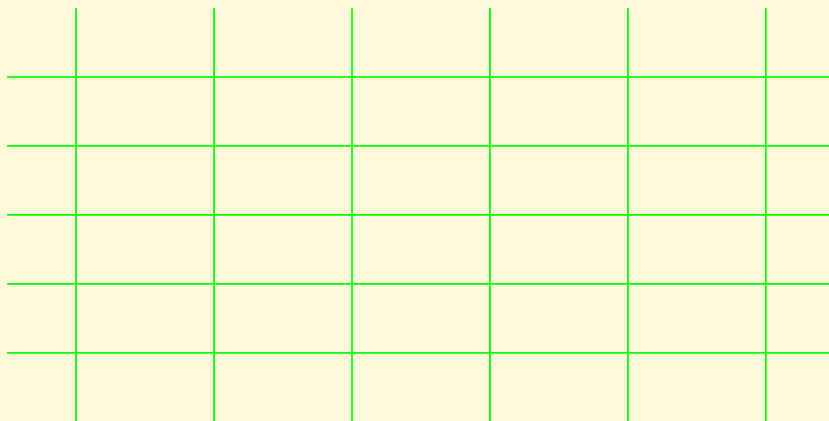
Full Screen

Close

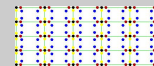
Quit

Exemplo: Pavimentação de \mathbb{R}^2

$\Omega \subset \mathbb{R}^2$ a pavimentação de \mathbb{R}^2 por rectângulos 2 : 1:



Qual é o grupo das simetrias G_Ω ?



Simetria e grupos

Simetria e grupóides

Simetria escondida

Home Page

Title Page



Page 9 of 29

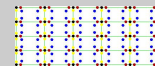
Go Back

Full Screen

Close

Quit

Exemplo: Pavimentação de \mathbb{R}^2 (cont.)



Simetria e grupos

Simetria e grupóides

Simetria escondida

Home Page

Title Page



Page 9 of 29

Go Back

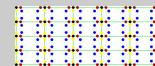
Full Screen

Close

Quit

Exemplo: Pavimentação de \mathbb{R}^2 (cont.)

O grupo G_Ω consiste em:



Simetria e grupos

Simetria e grupóides

Simetria escondida

Home Page

Title Page



Page 9 of 29

Go Back

Full Screen

Close

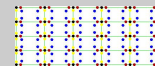
Quit

Exemplo: Pavimentação de \mathbb{R}^2 (cont.)

O grupo G_Ω consiste em:

- Translações por elementos da rede $\Lambda = 2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$:

$$(x, y) \mapsto (x, y) + (2n, m), \quad n, m \in \mathbb{Z}.$$



Simetria e grupos

Simetria e grupóides

Simetria escondida

Home Page

Title Page



Page 9 of 29

Go Back

Full Screen

Close

Quit

Exemplo: Pavimentação de \mathbb{R}^2 (cont.)

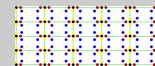
O grupo G_Ω consiste em:

- Translações por elementos da rede $\Lambda = 2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$:

$$(x, y) \mapsto (x, y) + (2n, m), \quad n, m \in \mathbb{Z}.$$

- Reflexões pelos pontos de $\frac{1}{2}\Lambda = \mathbb{Z} \times \frac{1}{2}\mathbb{Z}$:

$$(x, y) \mapsto (n - x, m/2 - y), \quad n, m \in \mathbb{Z}.$$



Simetria e grupos

Simetria e grupos

Simetria escondida

Home Page

Title Page



Page 9 of 29

Go Back

Full Screen

Close

Quit

Exemplo: Pavimentação de \mathbb{R}^2 (cont.)

O grupo G_Ω consiste em:

- Translações por elementos da rede $\Lambda = 2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$:

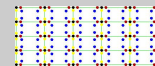
$$(x, y) \mapsto (x, y) + (2n, m), \quad n, m \in \mathbb{Z}.$$

- Reflexões pelos pontos de $\frac{1}{2}\Lambda = \mathbb{Z} \times \frac{1}{2}\mathbb{Z}$:

$$(x, y) \mapsto (n - x, m/2 - y), \quad n, m \in \mathbb{Z}.$$

- Reflexões pelas bissetrizes horizontais e verticais:

$$\begin{aligned} (x, y) &\mapsto (x, m/2 - y) \\ (x, y) &\mapsto (n - x, y) \end{aligned} \quad n, m \in \mathbb{Z}.$$



Simetria e grupos

Simetria e grupóides

Simetria escondida

Home Page

Title Page



Page 9 of 29

Go Back

Full Screen

Close

Quit

Exemplo: Pavimentação de \mathbb{R}^2 (cont.)

O grupo G_Ω consiste em:

- Translações por elementos da rede $\Lambda = 2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$:

$$(x, y) \mapsto (x, y) + (2n, m), \quad n, m \in \mathbb{Z}.$$

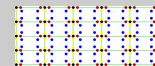
- Reflexões pelos pontos de $\frac{1}{2}\Lambda = \mathbb{Z} \times \frac{1}{2}\mathbb{Z}$:

$$(x, y) \mapsto (n - x, m/2 - y), \quad n, m \in \mathbb{Z}.$$

- Reflexões pelas bissetrizes horizontais e verticais:

$$\begin{aligned} (x, y) &\mapsto (x, m/2 - y) \\ (x, y) &\mapsto (n - x, y) \end{aligned} \quad n, m \in \mathbb{Z}.$$

A pavimentação é *muito simétrica*!



Simetria e grupos

Simetria e grupóides

Simetria escondida

Home Page

Title Page



Page 10 of 29

Go Back

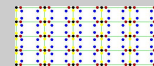
Full Screen

Close

Quit

Exercício: Calcular o grupo das simetrias de uma bola de futebol





Simetria e grupos

Simetria e grupóides

Simetria escondida

Home Page

Title Page



Page 11 of 29

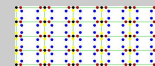
Go Back

Full Screen

Close

Quit

Simetrias mais gerais:



Simetria e grupos

Simetria e grupóides

Simetria escondida

Home Page

Title Page



Page 11 of 29

Go Back

Full Screen

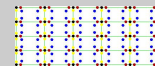
Close

Quit

Simetrias mais gerais:

Para objectos no espaço tridimensional:

Simetrias $\longleftrightarrow E(3)$ actua em \mathbb{R}^3



Simetria e grupos

Simetria e grupóides

Simetria escondida

Home Page

Title Page



Page 11 of 29

Go Back

Full Screen

Close

Quit

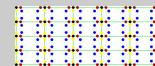
Simetrias mais gerais:

Para objectos no espaço tridimensional:

$$\text{Simetrias} \longleftrightarrow E(3) \text{ actua em } \mathbb{R}^3$$

Para outros objectos:

$$\text{Simetrias} \longleftrightarrow G \text{ actua em } X$$



Simetria e grupos

Simetria e grupóides

Simetria escondida

Home Page

Title Page



Page 11 of 29

Go Back

Full Screen

Close

Quit

Simetrias mais gerais:

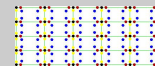
Para objectos no espaço tridimensional:

$$\text{Simetrias} \longleftrightarrow E(3) \text{ actua em } \mathbb{R}^3$$

Para outros objectos:

$$\text{Simetrias} \longleftrightarrow G \text{ actua em } X$$

- grupo de simetrias de uma equação algébrica;



Simetria e grupos

Simetria e grupóides

Simetria escondida

Home Page

Title Page



Page 11 of 29

Go Back

Full Screen

Close

Quit

Simetrias mais gerais:

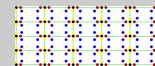
Para objectos no espaço tridimensional:

$$\text{Simetrias} \longleftrightarrow E(3) \text{ actua em } \mathbb{R}^3$$

Para outros objectos:

$$\text{Simetrias} \longleftrightarrow G \text{ actua em } X$$

- grupo de simetrias de uma equação algébrica;
- grupo de simetrias de um sistema dinâmico;



Simetria e grupos

Simetria e grupóides

Simetria escondida

Home Page

Title Page



Page 11 of 29

Go Back

Full Screen

Close

Quit

Simetrias mais gerais:

Para objectos no espaço tridimensional:

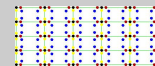
$$\text{Simetrias} \longleftrightarrow E(3) \text{ actua em } \mathbb{R}^3$$

Para outros objectos:

$$\text{Simetrias} \longleftrightarrow G \text{ actua em } X$$

- grupo de simetrias de uma equação algébrica;
- grupo de simetrias de um sistema dinâmico;
- grupo de simetrias de uma estrutura geométrica;

⋮



Simetria e grupos

Simetria e grupóides

Simetria escondida

Home Page

Title Page



Page 11 of 29

Go Back

Full Screen

Close

Quit

Simetrias mais gerais:

Para objectos no espaço tridimensional:

$$\text{Simetrias} \longleftrightarrow E(3) \text{ actua em } \mathbb{R}^3$$

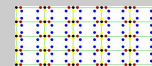
Para outros objectos:

$$\text{Simetrias} \longleftrightarrow G \text{ actua em } X$$

- grupo de simetrias de uma equação algébrica;
- grupo de simetrias de um sistema dinâmico;
- grupo de simetrias de uma estrutura geométrica;

⋮

Inúmeras teorias com um **sucesso tremendo!**



Simetria e grupos

Simetria e grupóides

Simetria escondida

Home Page

Title Page



Page 12 of 29

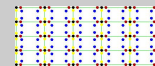
Go Back

Full Screen

Close

Quit

Mas ...



Simetria e grupos

Simetria e grupóides

Simetria escondida

Home Page

Title Page



Page **12** of **29**

Go Back

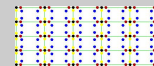
Full Screen

Close

Quit

Mas ...

Muitos objectos que reconhecemos como *simétricos*
admitem poucas ou nenhuma simetrias!



Simetria e grupos

Simetria e grupóides

Simetria escondida

Home Page

Title Page



Page 13 of 29

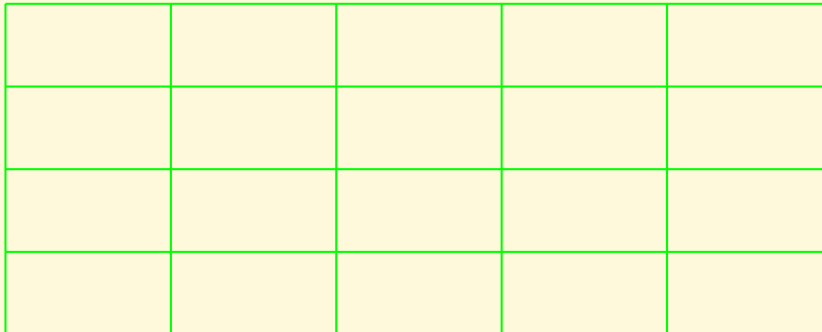
Go Back

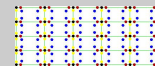
Full Screen

Close

Quit

Em vez da pavimentação de \mathbb{R}^2 , tomemos um chão
duma casa-de-banho **real**:





Simetria e grupos

Simetria e grupóides

Simetria escondida

Home Page

Title Page



Page 13 of 29

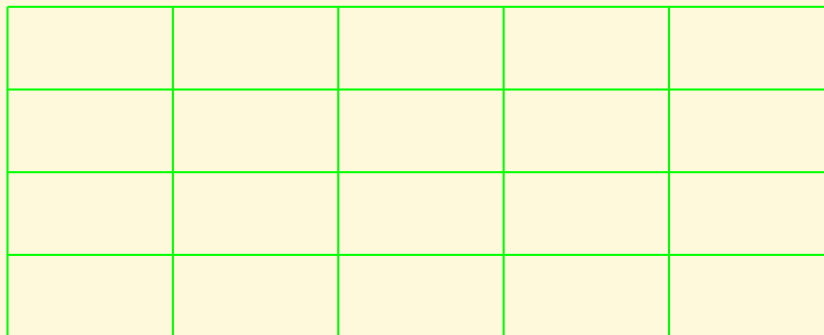
Go Back

Full Screen

Close

Quit

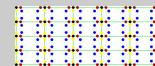
Em vez da pavimentação de \mathbb{R}^2 , tomemos um chão
duma casa-de-banho **real**:



O grupo das simetrias diminui drasticamente:

$$G_B = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2.$$

Agora temos apenas 4 elementos!



Simetria e grupos

Simetria e grupóides

Simetria escondida

Home Page

Title Page



Page 13 of 29

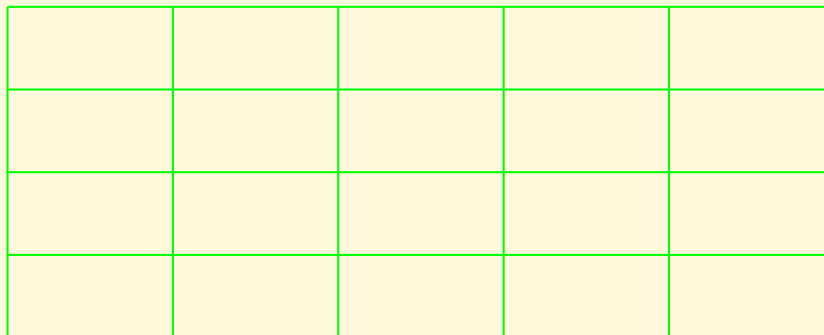
Go Back

Full Screen

Close

Quit

Em vez da pavimentação de \mathbb{R}^2 , tomemos um chão
duma casa-de-banho **real**:



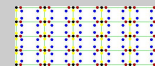
O grupo das simetrias diminui drasticamente:

$$G_B = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2.$$

Agora temos apenas 4 elementos!

No entanto, ainda reconhecemos alguma repetição...
...é simétrico ou não?

Na realidade, existem *poucos* grupos de simetrias:



Simetria e grupos

Simetria e grupóides

Simetria escondida

Home Page

Title Page



Page 14 of 29

Go Back

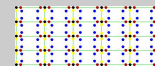
Full Screen

Close

Quit

Na realidade, existem *poucos* grupos de simetrias:

Teorema 1. *Os possíveis grupos de simetrias próprias de uma região limitada $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ são:*



Simetria e grupos

Simetria e grupóides

Simetria escondida

Home Page

Title Page



Page 14 of 29

Go Back

Full Screen

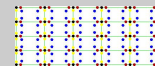
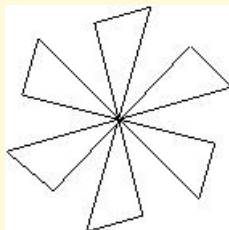
Close

Quit

Na realidade, existem *poucos* grupos de simetrias:

Teorema 1. *Os possíveis grupos de simetrias próprias de uma região limitada $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ são:*

- *O grupo C_n das rotações por $\frac{2\pi}{n}$ em torno de um eixo:*



Simetria e grupos

Simetria e grupóides

Simetria escondida

Home Page

Title Page



Page 14 of 29

Go Back

Full Screen

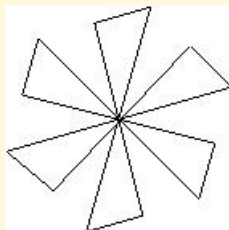
Close

Quit

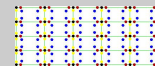
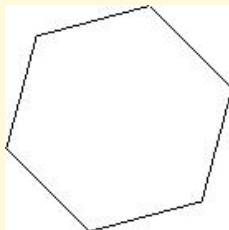
Na realidade, existem *poucos* grupos de simetrias:

Teorema 1. *Os possíveis grupos de simetrias próprias de uma região limitada $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ são:*

- *O grupo C_n das rotações por $\frac{2\pi}{n}$ em torno de um eixo:*



- *O grupo D_n das simetrias de um poliedro regular com n -lados:*



Simetria e grupos

Simetria e grupóides

Simetria escondida

Home Page

Title Page



Page 14 of 29

Go Back

Full Screen

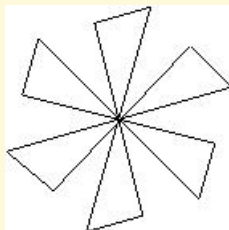
Close

Quit

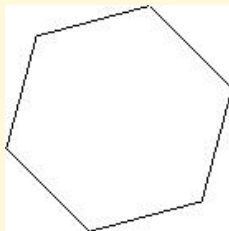
Na realidade, existem *poucos* grupos de simetrias:

Teorema 1. *Os possíveis grupos de simetrias próprias de uma região limitada $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ são:*

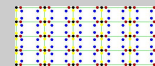
- *O grupo C_n das rotações por $\frac{2\pi}{n}$ em torno de um eixo:*



- *O grupo D_n das simetrias de um poliedro regular com n-lados:*



- *Os 3 grupos de simetrias dos sólidos platônicos.*



Simetria e grupos

Simetria e grupóides

Simetria escondida

Home Page

Title Page



Page 14 of 29

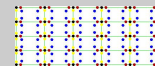
Go Back

Full Screen

Close

Quit

Por exemplo, o grupo de simetrias da bola de futebol:



Simetria e grupos

Simetria e grupóides

Simetria escondida

Home Page

Title Page



Page 15 of 29

Go Back

Full Screen

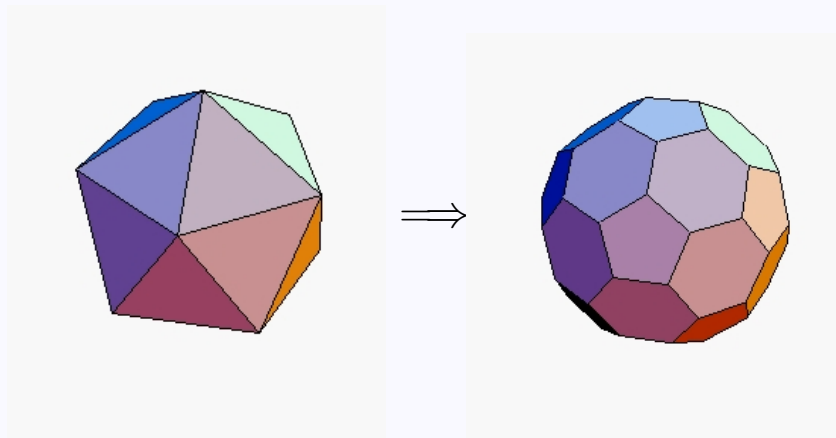
Close

Quit

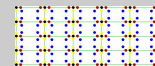
Por exemplo, o grupo de simetrias da bola de futebol:



é um *subgrupo* do grupo de simetrias do icosaedro:



(basta truncar os vértices do icosaedro).



Simetria e grupos

Simetria e grupóides

Simetria escondida

Home Page

Title Page



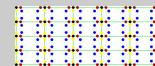
Page 15 of 29

Go Back

Full Screen

Close

Quit



Simetria e grupos

Simetria e grupóides

Simetria escondida

Home Page

Title Page



Page 16 of 29

Go Back

Full Screen

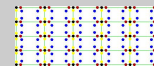
Close

Quit

2. Simetria e grupóides

Para distinguir a bola de futebol de um icosaedro, para descrever as simetrias de um chão real, e em muitos outros problemas, precisamos de *grupóides*.

Simetrias da pavimentação $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ (cont.):



Simetria e grupos

Simetria e grupóides

Simetria escondida

Home Page

Title Page



Page 17 of 29

Go Back

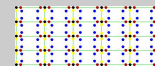
Full Screen

Close

Quit

Simetrias da pavimentação $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ (cont.):

$$\mathcal{G}_\Omega = \{(y, \phi, x) : x, y \in \mathbb{R}^2, \phi \in G_\Omega \text{ and } y = \phi(x)\}$$



Simetria e grupos

Simetria e grupóides

Simetria escondida

Home Page

Title Page



Page 17 of 29

Go Back

Full Screen

Close

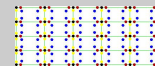
Quit

Simetrias da pavimentação $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ (cont.):

$$\mathcal{G}_\Omega = \{(y, \phi, x) : x, y \in \mathbb{R}^2, \phi \in G_\Omega \text{ and } y = \phi(x)\}$$

com *multiplicação parcialmente definida*:

$$(z, \phi, y)(y, \psi, x) = (z, \phi \circ \psi, x).$$



Simetria e grupos

Simetria e grupóides

Simetria escondida

Home Page

Title Page



Page 17 of 29

Go Back

Full Screen

Close

Quit

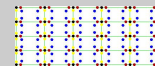
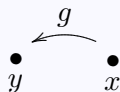
Simetrias da pavimentação $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ (cont.):

$$\mathcal{G}_\Omega = \{(y, \phi, x) : x, y \in \mathbb{R}^2, \phi \in G_\Omega \text{ and } y = \phi(x)\}$$

com *multiplicação parcialmente definida*:

$$(z, \phi, y)(y, \psi, x) = (z, \phi \circ \psi, x).$$

Podemos ver cada $g = (y, \phi, x) \in \mathcal{G}$ como uma *seta*:



Simetria e grupos

Simetria e grupóides

Simetria escondida

Home Page

Title Page



Page 17 of 29

Go Back

Full Screen

Close

Quit

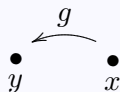
Simetrias da pavimentação $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ (cont.):

$$\mathcal{G}_\Omega = \{(y, \phi, x) : x, y \in \mathbb{R}^2, \phi \in G_\Omega \text{ and } y = \phi(x)\}$$

com *multiplicação parcialmente definida*:

$$(z, \phi, y)(y, \psi, x) = (z, \phi \circ \psi, x).$$

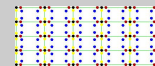
Podemos ver cada $g = (y, \phi, x) \in \mathcal{G}$ como uma *seta*:



Agora, temos:

- *origem e destino* das setas: $\mathbf{s}, \mathbf{t} : \mathcal{G} \rightarrow \mathbb{R}^2$:

$$\mathbf{s}(y, \phi, x) = x, \quad \mathbf{t}(y, \phi, x) = y.$$



Simetria e grupos

Simetria e grupóides

Simetria escondida

Home Page

Title Page



Page 17 of 29

Go Back

Full Screen

Close

Quit

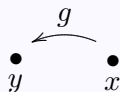
Simetrias da pavimentação $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ (cont.):

$$\mathcal{G}_\Omega = \{(y, \phi, x) : x, y \in \mathbb{R}^2, \phi \in G_\Omega \text{ and } y = \phi(x)\}$$

com *multiplicação parcialmente definida*:

$$(z, \phi, y)(y, \psi, x) = (z, \phi \circ \psi, x).$$

Podemos ver cada $g = (y, \phi, x) \in \mathcal{G}$ como uma *seta*:

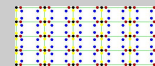


Agora, temos:

- *origem e destino* das setas: $\mathbf{s}, \mathbf{t} : \mathcal{G} \rightarrow \mathbb{R}^2$:

$$\mathbf{s}(y, \phi, x) = x, \quad \mathbf{t}(y, \phi, x) = y.$$

- *setas identidades* $1_x = (x, I, x)$:



Simetria e grupos

Simetria e grupóides

Simetria escondida

Home Page

Title Page



Page 17 of 29

Go Back

Full Screen

Close

Quit

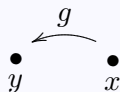
Simetrias da pavimentação $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ (cont.):

$$\mathcal{G}_\Omega = \{(y, \phi, x) : x, y \in \mathbb{R}^2, \phi \in G_\Omega \text{ and } y = \phi(x)\}$$

com *multiplicação parcialmente definida*:

$$(z, \phi, y)(y, \psi, x) = (z, \phi \circ \psi, x).$$

Podemos ver cada $g = (y, \phi, x) \in \mathcal{G}$ como uma *seta*:



Agora, temos:

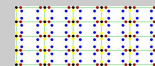
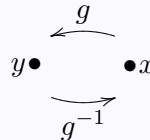
- *origem e destino* das setas: $\mathbf{s}, \mathbf{t} : \mathcal{G} \rightarrow \mathbb{R}^2$:

$$\mathbf{s}(y, \phi, x) = x, \quad \mathbf{t}(y, \phi, x) = y.$$

- *setas identidades* $1_x = (x, I, x)$:



- *setas inversas* $g^{-1} = (x, \phi^{-1}, y)$:



Simetria e grupos

Simetria e grupóides

Simetria escondida

Home Page

Title Page



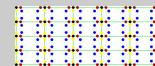
Page 17 of 29

Go Back

Full Screen

Close

Quit



Simetria e grupos

Simetria e grupóides

Simetria escondida

Home Page

Title Page



Page 18 of 29

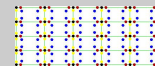
Go Back

Full Screen

Close

Quit

Satisfazem propriedades análogas às de um grupo:



Simetria e grupos

Simetria e grupóides

Simetria escondida

Home Page

Title Page



Page 18 of 29

Go Back

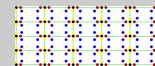
Full Screen

Close

Quit

Satisfazem propriedades análogas às de um grupo:

1. **Multiplicação:** $(g, h) \mapsto gh$ definida se $\mathbf{s}(g) = \mathbf{t}(h)$;



Simetria e grupos

Simetria e grupóides

Simetria escondida

Home Page

Title Page



Page 18 of 29

Go Back

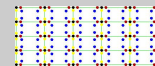
Full Screen

Close

Quit

Satisfazem propriedades análogas às de um grupo:

1. **Multiplicação:** $(g, h) \mapsto gh$ definida se $\mathbf{s}(g) = \mathbf{t}(h)$;
2. **Associatividade:** $(gh)k = g(hk)$;



Simetria e grupos

Simetria e grupóides

Simetria escondida

Home Page

Title Page



Page 18 of 29

Go Back

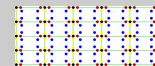
Full Screen

Close

Quit

Satisfazem propriedades análogas às de um grupo:

1. **Multiplicação:** $(g, h) \mapsto gh$ definida se $\mathbf{s}(g) = \mathbf{t}(h)$;
2. **Associatividade:** $(gh)k = g(hk)$;
3. **Identidades:** $1_y g = g = g 1_x$, se $\mathbf{t}(g) = y$ e $\mathbf{s}(g) = x$;



Simetria e grupos

Simetria e grupóides

Simetria escondida

Home Page

Title Page



Page 18 of 29

Go Back

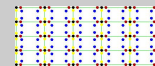
Full Screen

Close

Quit

Satisfazem propriedades análogas às de um grupo:

1. **Multiplicação:** $(g, h) \mapsto gh$ definida se $\mathbf{s}(g) = \mathbf{t}(h)$;
2. **Associatividade:** $(gh)k = g(hk)$;
3. **Identidades:** $1_y g = g = g 1_x$, se $\mathbf{t}(g) = y$ e $\mathbf{s}(g) = x$;
4. **Inversos:** $g^{-1}g = 1_x$ e $g g^{-1} = 1_y$.



Simetria e grupos

Simetria e grupóides

Simetria escondida

Home Page

Title Page



Page 18 of 29

Go Back

Full Screen

Close

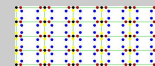
Quit

Satisfazem propriedades análogas às de um grupo:

1. **Multiplicação:** $(g, h) \mapsto gh$ definida se $\mathbf{s}(g) = \mathbf{t}(h)$;
2. **Associatividade:** $(gh)k = g(hk)$;
3. **Identidades:** $1_y g = g = g 1_x$, se $\mathbf{t}(g) = y$ e $\mathbf{s}(g) = x$;
4. **Inversos:** $g^{-1}g = 1_x$ e $g g^{-1} = 1_y$.

Definição 2. Um **grupóide** com base B é um conjunto \mathcal{G} com aplicações $\mathbf{s}, \mathbf{t} : \mathcal{G} \rightarrow B$ e uma multiplicação satisfazendo 1–4.

grupóide \longleftrightarrow conjunto de setas



Simetria e grupos

Simetria e grupóides

Simetria escondida

Home Page

Title Page



Page 19 of 29

Go Back

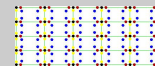
Full Screen

Close

Quit

Podemos *restringir* o grupóide \mathcal{G}_Ω a B obtendo o **grupóide de simetrias** do chão $B \subset \mathbb{R}^2$:

$$\mathcal{G}_B = \{(x, \phi, y) : x, y \in B, \phi \in G_\Omega \text{ and } x = \phi(y)\}.$$



Simetria e grupos

Simetria e grupóides

Simetria escondida

Home Page

Title Page



Page 19 of 29

Go Back

Full Screen

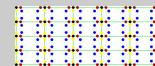
Close

Quit

Podemos *restringir* o grupóide \mathcal{G}_Ω a B obtendo o **grupóide de simetrias** do chão $B \subset \mathbb{R}^2$:

$$\mathcal{G}_B = \{(x, \phi, y) : x, y \in B, \phi \in G_\Omega \text{ and } x = \phi(y)\}.$$

Vejamos que o grupóide \mathcal{G}_B captura a simetria exibida pelo chão de uma casa-de-banho!



Simetria e grupos

Simetria e grupóides

Simetria escondida

Home Page

Title Page



Page 19 of 29

Go Back

Full Screen

Close

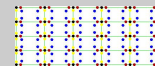
Quit

Podemos *restringir* o grupóide \mathcal{G}_Ω a B obtendo o **grupóide de simetrias** do chão $B \subset \mathbb{R}^2$:

$$\mathcal{G}_B = \{(x, \phi, y) : x, y \in B, \phi \in G_\Omega \text{ and } x = \phi(y)\}.$$

Vejamos que o grupóide \mathcal{G}_B captura a simetria exibida pelo chão de uma casa-de-banho!

Necessitamos de dois conceitos elementares:



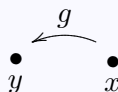
Podemos *restringir* o grupóide \mathcal{G}_Ω a B obtendo o **grupóide de simetrias** do chão $B \subset \mathbb{R}^2$:

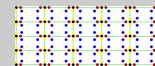
$$\mathcal{G}_B = \{(x, \phi, y) : x, y \in B, \phi \in G_\Omega \text{ and } x = \phi(y)\}.$$

Vejamos que o grupóide \mathcal{G}_B captura a simetria exibida pelo chão de uma casa-de-banho!

Necessitamos de dois conceitos elementares:

- Dois elementos $x, y \in B$ pertencem à mesma **órbita** de \mathcal{G} se existe uma seta entre eles:





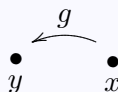
Podemos *restringir* o grupóide \mathcal{G}_Ω a B obtendo o **grupóide de simetrias** do chão $B \subset \mathbb{R}^2$:

$$\mathcal{G}_B = \{(x, \phi, y) : x, y \in B, \phi \in G_\Omega \text{ and } x = \phi(y)\}.$$

Vejamos que o grupóide \mathcal{G}_B captura a simetria exibida pelo chão de uma casa-de-banho!

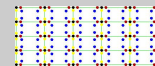
Necessitamos de dois conceitos elementares:

- Dois elementos $x, y \in B$ pertencem à mesma **órbita** de \mathcal{G} se existe uma seta entre eles:



- O **grupo de isotropia** de $x \in B$ é o conjunto das setas $g \in \mathcal{G}$ com destino e origem em x :





Simetria e grupos

Simetria e grupóides

Simetria escondida

Home Page

Title Page



Page 20 of 29

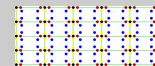
Go Back

Full Screen

Close

Quit

No grupóide de simetrias \mathcal{G}_B do chão de casa-de-banho:



Simetria e grupos

Simetria e grupóides

Simetria escondida

Home Page

Title Page



Page 20 of 29

Go Back

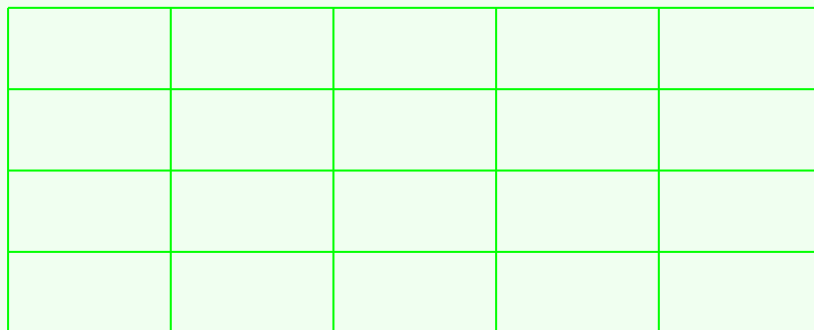
Full Screen

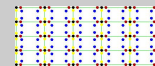
Close

Quit

No grupóide de simetrias \mathcal{G}_B do chão de casa-de-banho:

- As *órbitas* consistem nos pontos que ocupam posições similares nos azulhejos:





Simetria e grupos

Simetria e grupóides

Simetria escondida

Home Page

Title Page



Page 20 of 29

Go Back

Full Screen

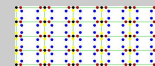
Close

Quit

No grupóide de simetrias \mathcal{G}_B do chão de casa-de-banho:

- As *órbitas* consistem nos pontos que ocupam posições similares nos azulhejos:





Simetria e grupos

Simetria e grupóides

Simetria escondida

Home Page

Title Page



Page 20 of 29

Go Back

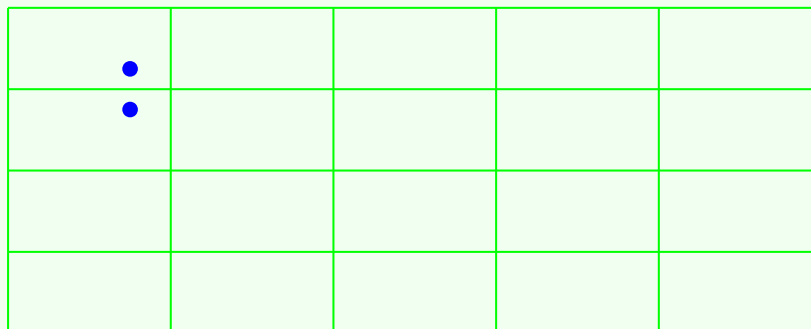
Full Screen

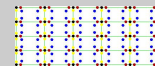
Close

Quit

No grupóide de simetrias \mathcal{G}_B do chão de casa-de-banho:

- As *órbitas* consistem nos pontos que ocupam posições similares nos azulhejos:





Simetria e grupos

Simetria e grupóides

Simetria escondida

Home Page

Title Page



Page 20 of 29

Go Back

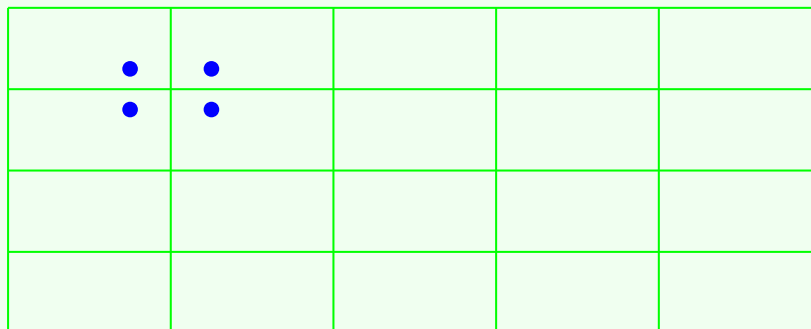
Full Screen

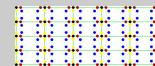
Close

Quit

No grupóide de simetrias \mathcal{G}_B do chão de casa-de-banho:

- As *órbitas* consistem nos pontos que ocupam posições similares nos azulhejos:





Simetria e grupos

Simetria e grupóides

Simetria escondida

Home Page

Title Page



Page 20 of 29

Go Back

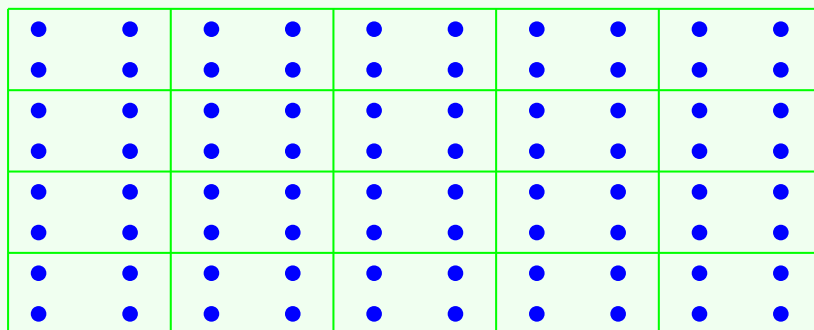
Full Screen

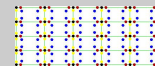
Close

Quit

No grupóide de simetrias \mathcal{G}_B do chão de casa-de-banho:

- As *órbitas* consistem nos pontos que ocupam posições similares nos azulhejos:





Simetria e grupos

Simetria e grupóides

Simetria escondida

Home Page

Title Page



Page 20 of 29

Go Back

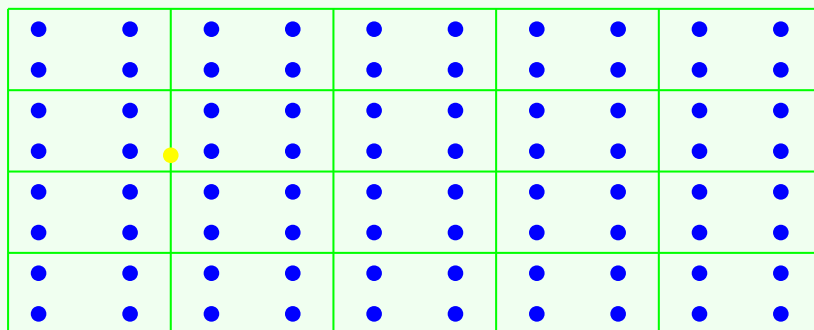
Full Screen

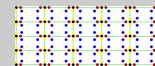
Close

Quit

No grupóide de simetrias \mathcal{G}_B do chão de casa-de-banho:

- As *órbitas* consistem nos pontos que ocupam posições similares nos azulhejos:





Simetria e grupos

Simetria e grupóides

Simetria escondida

Home Page

Title Page



Page 20 of 29

Go Back

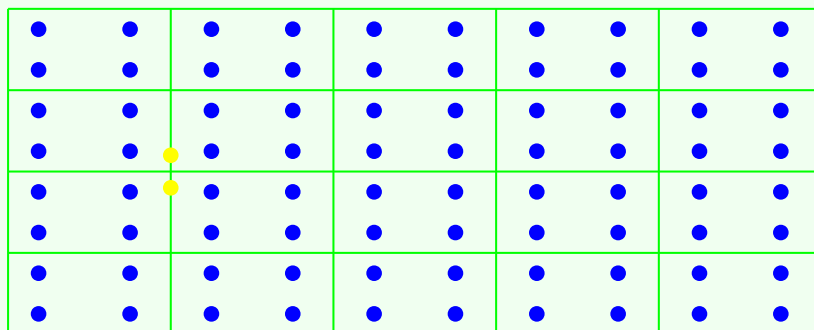
Full Screen

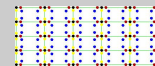
Close

Quit

No grupóide de simetrias \mathcal{G}_B do chão de casa-de-banho:

- As *órbitas* consistem nos pontos que ocupam posições similares nos azulhejos:





Simetria e grupos

Simetria e grupóides

Simetria escondida

[Home Page](#)

[Title Page](#)



Page 20 of 29

[Go Back](#)

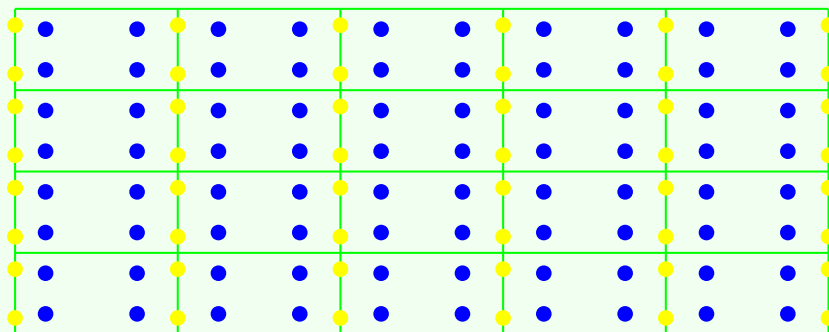
[Full Screen](#)

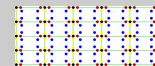
[Close](#)

[Quit](#)

No grupóide de simetrias \mathcal{G}_B do chão de casa-de-banho:

- As *órbitas* consistem nos pontos que ocupam posições similares nos azulhejos:





Simetria e grupos

Simetria e grupóides

Simetria escondida

[Home Page](#)

[Title Page](#)



Page 20 of 29

[Go Back](#)

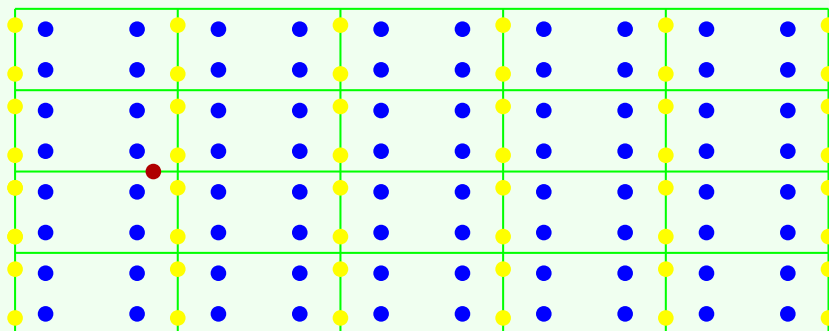
[Full Screen](#)

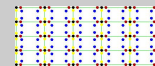
[Close](#)

[Quit](#)

No grupóide de simetrias \mathcal{G}_B do chão de casa-de-banho:

- As *órbitas* consistem nos pontos que ocupam posições similares nos azulhejos:





Simetria e grupos

Simetria e grupóides

Simetria escondida

[Home Page](#)

[Title Page](#)



Page 20 of 29

[Go Back](#)

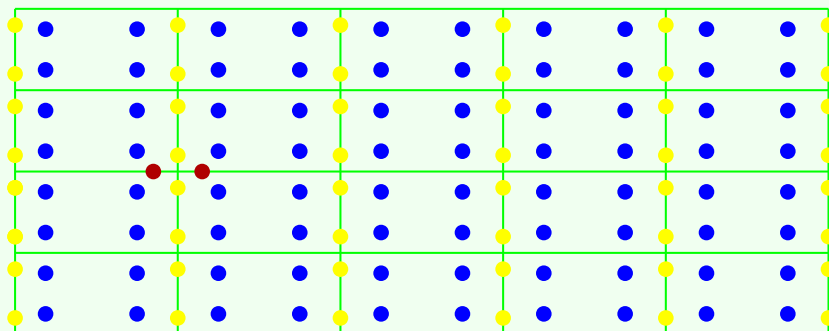
[Full Screen](#)

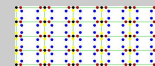
[Close](#)

[Quit](#)

No grupóide de simetrias \mathcal{G}_B do chão de casa-de-banho:

- As *órbitas* consistem nos pontos que ocupam posições similares nos azulhejos:





Simetria e grupos

Simetria e grupóides

Simetria escondida

Home Page

Title Page



Page 20 of 29

Go Back

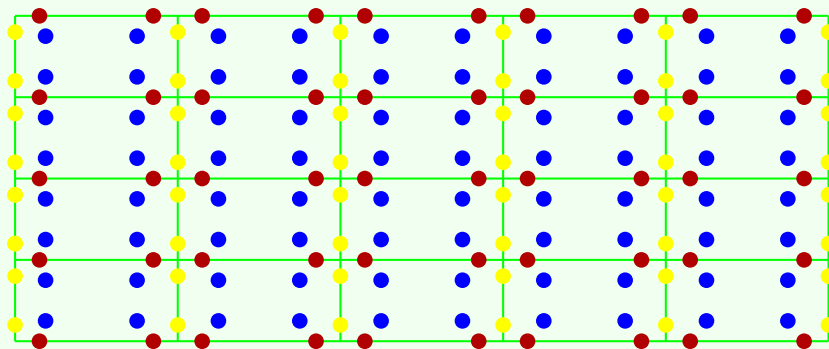
Full Screen

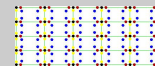
Close

Quit

No grupóide de simetrias \mathcal{G}_B do chão de casa-de-banho:

- As *órbitas* consistem nos pontos que ocupam posições similares nos azulhejos:





Simetria e grupos

Simetria e grupóides

Simetria escondida

Home Page

Title Page



Page 20 of 29

Go Back

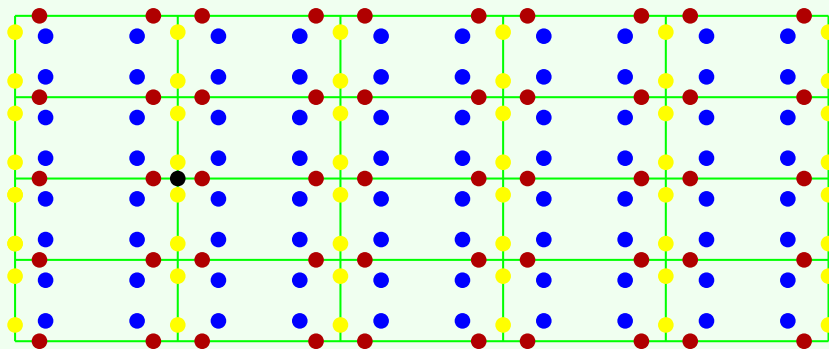
Full Screen

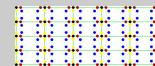
Close

Quit

No grupóide de simetrias \mathcal{G}_B do chão de casa-de-banho:

- As *órbitas* consistem nos pontos que ocupam posições similares nos azulhejos:





Simetria e grupos

Simetria e grupóides

Simetria escondida

Home Page

Title Page



Page 20 of 29

Go Back

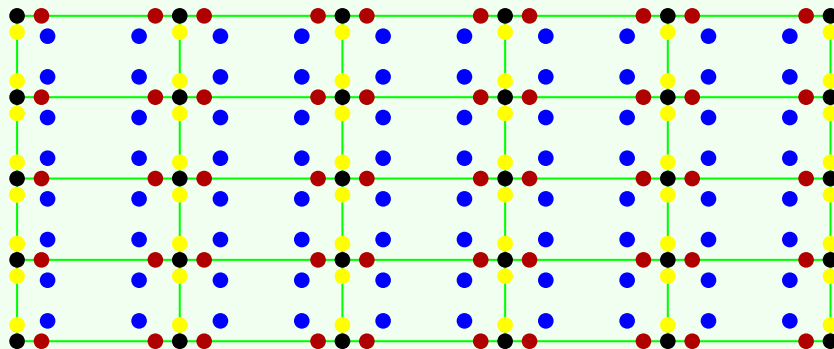
Full Screen

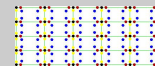
Close

Quit

No grupóide de simetrias \mathcal{G}_B do chão de casa-de-banho:

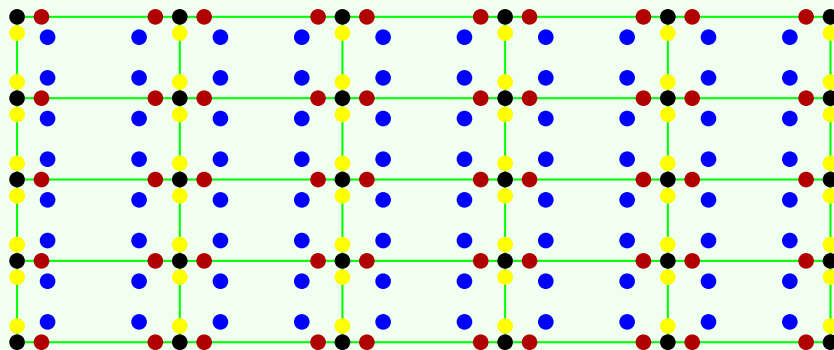
- As *órbitas* consistem nos pontos que ocupam posições similares nos azulhejos:





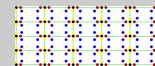
No grupóide de simetrias \mathcal{G}_B do chão de casa-de-banho:

- As *órbitas* consistem nos pontos que ocupam posições similares nos azulhejos:



- Os pontos com *isotropia* não-trivial pertencem a $(\mathbb{Z} \times \frac{1}{2}\mathbb{Z}) \cap B$. Para estes pontos, o grupo de isotropia é:

$$G = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2.$$



Simetria e grupos

Simetria e grupóides

Simetria escondida

Home Page

Title Page



Page 21 of 29

Go Back

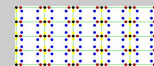
Full Screen

Close

Quit

3. Simetria escondida

Por vezes, as simetrias (grupos, grupóides) associadas a um objecto estão *escondidas*...



Simetria e grupos

Simetria e grupóides

Simetria escondida

Home Page

Title Page



Page 22 of 29

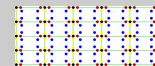
Go Back

Full Screen

Close

Quit

Simetrias de um espaço



Simetria e grupos

Simetria e grupóides

Simetria escondida

Home Page

Title Page



Page 22 of 29

Go Back

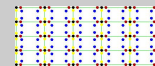
Full Screen

Close

Quit

Simetrias de um espaço

X um espaço *topológico*



Simetria e grupos

Simetria e grupóides

Simetria escondida

Home Page

Title Page



Page 22 of 29

Go Back

Full Screen

Close

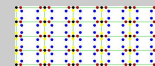
Quit

Simetrias de um espaço

X um espaço *topológico*

Grupo das simetrias de X :

$$G_X = \{\phi : X \rightarrow X \mid \phi \text{ é uma bijecção contínua}\}$$



Simetria e grupos

Simetria e grupóides

Simetria escondida

Home Page

Title Page



Page 22 of 29

Go Back

Full Screen

Close

Quit

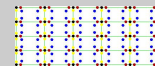
Simetrias de um espaço

X um espaço *topológico*

Grupo das simetrias de X :

$$G_X = \{\phi : X \rightarrow X \mid \phi \text{ é uma bijecção contínua}\}$$

Não é muito útil, pois:



Simetria e grupos

Simetria e grupóides

Simetria escondida

Home Page

Title Page



Page 22 of 29

Go Back

Full Screen

Close

Quit

Simetrias de um espaço

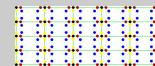
X um espaço *topológico*

Grupo das simetrias de X :

$$G_X = \{\phi : X \rightarrow X \mid \phi \text{ é uma bijecção contínua}\}$$

Não é muito útil, pois:

- É um grupo muito grande;



Simetria e grupos

Simetria e grupóides

Simetria escondida

Home Page

Title Page



Page 22 of 29

Go Back

Full Screen

Close

Quit

Simetrias de um espaço

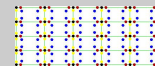
X um espaço *topológico*

Grupo das simetrias de X :

$$G_X = \{\phi : X \rightarrow X \mid \phi \text{ é uma bijecção contínua}\}$$

Não é muito útil, pois:

- É um grupo muito grande;
- É difícil (impossível!) de se calcular;



Simetria e grupos

Simetria e grupóides

Simetria escondida

Home Page

Title Page



Page 22 of 29

Go Back

Full Screen

Close

Quit

Simetrias de um espaço

X um espaço *topológico*

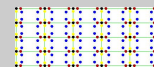
Grupo das simetrias de X :

$$G_X = \{\phi : X \rightarrow X \mid \phi \text{ é uma bijecção contínua}\}$$

Não é muito útil, pois:

- É um grupo muito grande;
- É difícil (impossível!) de se calcular;

Há que procurar outras simetrias...



Simetria e grupos

Simetria e grupóides

Simetria escondida

Home Page

Title Page



Page 23 of 29

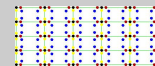
Go Back

Full Screen

Close

Quit

Grupóide fundamental de um espaço



Simetria e grupos

Simetria e grupóides

Simetria escondida

Home Page

Title Page



Page 23 of 29

Go Back

Full Screen

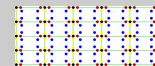
Close

Quit

Grupóide fundamental de um espaço

X um espaço *topológico*

Tomemos as curvas *contínuas* $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$



Simetria e grupos

Simetria e grupóides

Simetria escondida

Home Page

Title Page



Page 23 of 29

Go Back

Full Screen

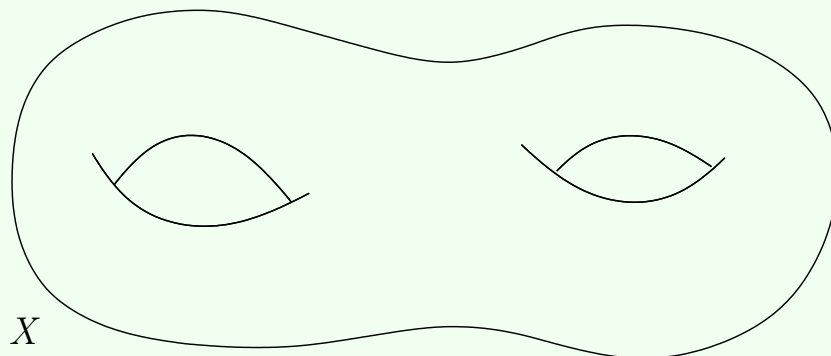
Close

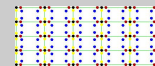
Quit

Grupóide fundamental de um espaço

X um espaço *topológico*

Tomemos as curvas *contínuas* $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$





Simetria e grupos

Simetria e grupóides

Simetria escondida

Home Page

Title Page



Page 23 of 29

Go Back

Full Screen

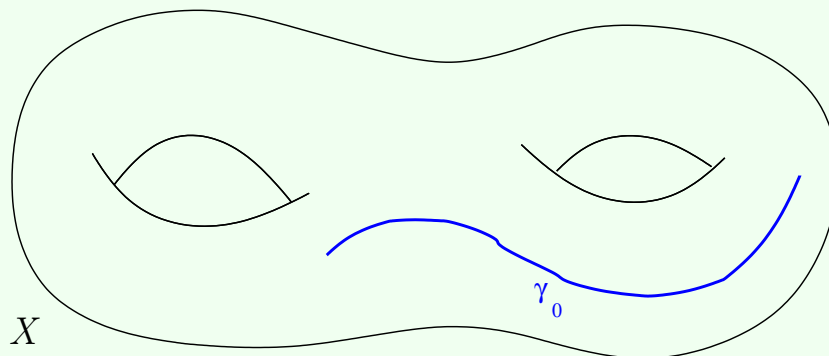
Close

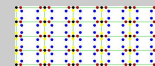
Quit

Grupóide fundamental de um espaço

X um espaço *topológico*

Tomemos as curvas *contínuas* $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$





Simetria e grupos

Simetria e grupóides

Simetria escondida

Home Page

Title Page



Page 23 of 29

Go Back

Full Screen

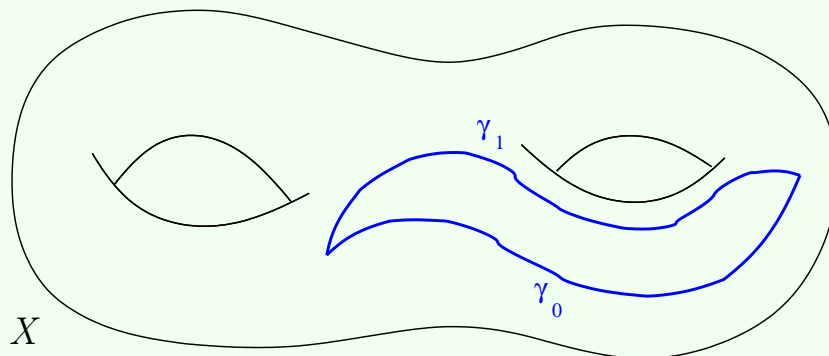
Close

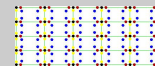
Quit

Grupóide fundamental de um espaço

X um espaço *topológico*

Tomemos as curvas *contínuas* $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$





Simetria e grupos

Simetria e grupóides

Simetria escondida

Home Page

Title Page



Page 23 of 29

Go Back

Full Screen

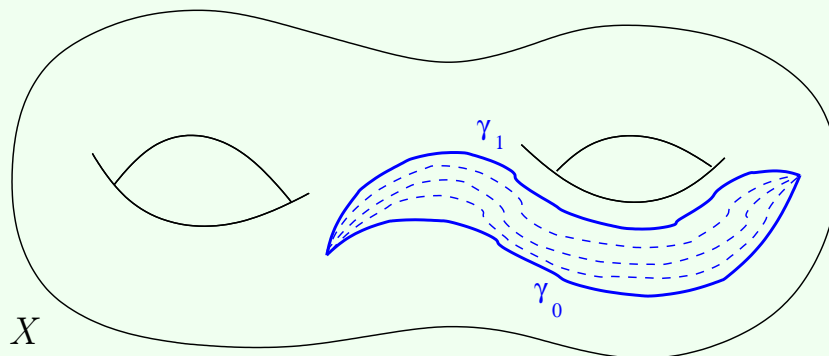
Close

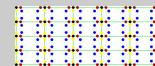
Quit

Grupóide fundamental de um espaço

X um espaço *topológico*

Tomemos as curvas *contínuas* $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$





Simetria e grupos

Simetria e grupóides

Simetria escondida

Home Page

Title Page



Page 23 of 29

Go Back

Full Screen

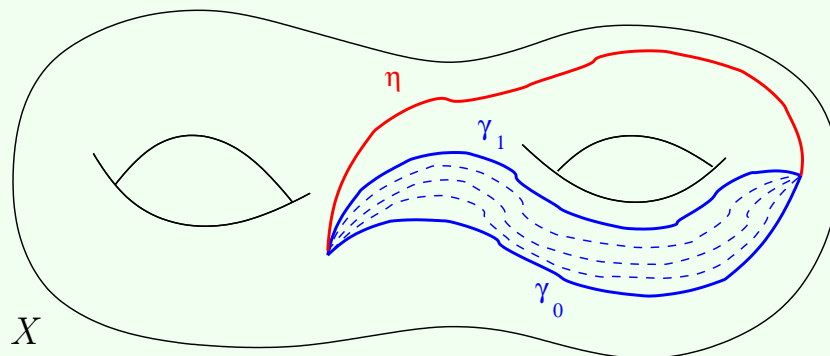
Close

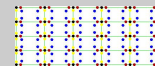
Quit

Grupóide fundamental de um espaço

X um espaço *topológico*

Tomemos as curvas *contínuas* $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$





Simetria e grupos

Simetria e grupóides

Simetria escondida

Home Page

Title Page



Page 23 of 29

Go Back

Full Screen

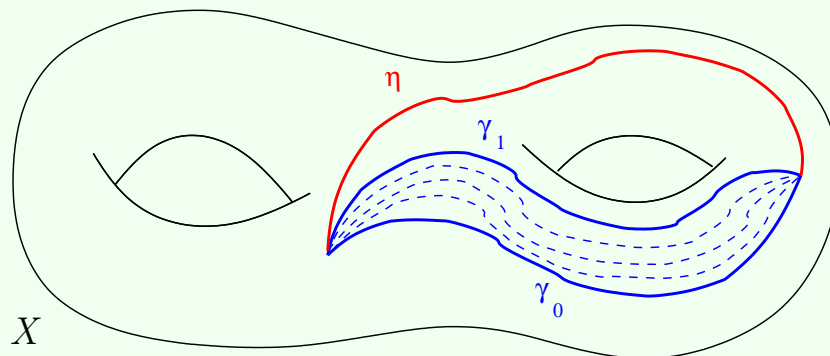
Close

Quit

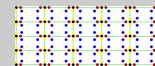
Grupóide fundamental de um espaço

X um espaço *topológico*

Tomemos as curvas *contínuas* $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$



$[\gamma] \equiv$ classe de homotopia de γ



Simetria e grupos

Simetria e grupóides

Simetria escondida

Home Page

Title Page



Page 23 of 29

Go Back

Full Screen

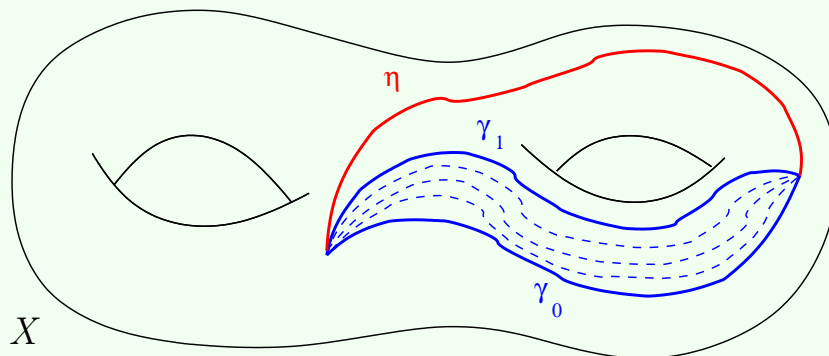
Close

Quit

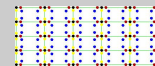
Grupóide fundamental de um espaço

X um espaço *topológico*

Tomemos as curvas *contínuas* $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$



$[\gamma] \equiv$ classe de homotopia de γ (e.g. $[\gamma_0] = [\gamma_1] \neq [\eta]$).



Simetria e grupos

Simetria e grupóides

Simetria escondida

Home Page

Title Page



Page 23 of 29

Go Back

Full Screen

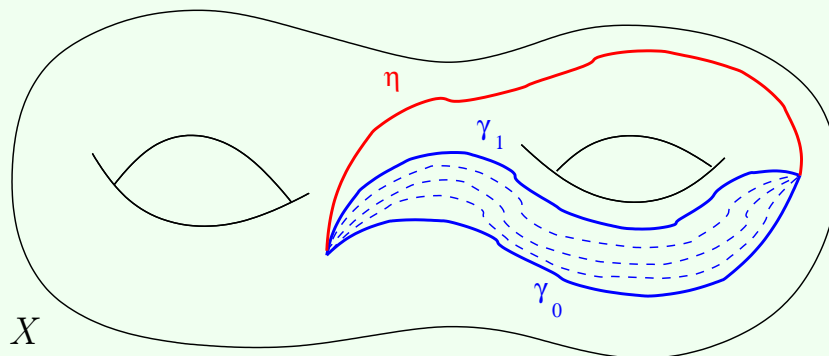
Close

Quit

Grupóide fundamental de um espaço

X um espaço *topológico*

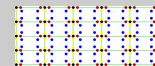
Tomemos as curvas *contínuas* $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$



$[\gamma] \equiv$ classe de homotopia de γ (e.g. $[\gamma_0] = [\gamma_1] \neq [\eta]$).

O *grupóide fundamental* de X é:

$$\Pi(X) = \{[\gamma] \mid \gamma : [0, 1] \rightarrow X\}.$$



Simetria e grupos

Simetria e grupóides

Simetria escondida

Home Page

Title Page



Page 24 of 29

Go Back

Full Screen

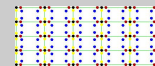
Close

Quit

O grupóide fundamental

$$\Pi(X) = \{[\gamma] \mid \gamma : [0, 1] \rightarrow X\}$$

tem a seguinte estrutura:



Simetria e grupos

Simetria e grupóides

Simetria escondida

Home Page

Title Page



Page 24 of 29

Go Back

Full Screen

Close

Quit

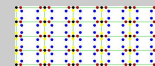
O grupóide fundamental

$$\Pi(X) = \{[\gamma] \mid \gamma : [0, 1] \rightarrow X\}$$

tem a seguinte estrutura:

- Aplicações *origem e destino*:

$$\mathbf{s}([\gamma]) = \gamma(0), \quad \mathbf{t}([\gamma]) = \gamma(1);$$



Simetria e grupos

Simetria e grupóides

Simetria escondida

Home Page

Title Page



Page 24 of 29

Go Back

Full Screen

Close

Quit

O grupóide fundamental

$$\Pi(X) = \{[\gamma] \mid \gamma : [0, 1] \rightarrow X\}$$

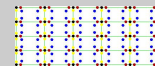
tem a seguinte estrutura:

- Aplicações *origem e destino*:

$$\mathbf{s}([\gamma]) = \gamma(0), \quad \mathbf{t}([\gamma]) = \gamma(1);$$

- *produto* é concatenação de curvas:

$$[\gamma] \cdot [\eta] = [\gamma \cdot \eta];$$



O grupóide fundamental

$$\Pi(X) = \{[\gamma] \mid \gamma : [0, 1] \rightarrow X\}$$

tem a seguinte estrutura:

- Aplicações *origem e destino*:

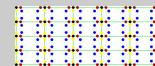
$$\mathbf{s}([\gamma]) = \gamma(0), \quad \mathbf{t}([\gamma]) = \gamma(1);$$

- *produto* é concatenação de curvas:

$$[\gamma] \cdot [\eta] = [\gamma \cdot \eta];$$

- *unidades* são dadas pelas curvas constantes:

$$1_x = [\gamma], \quad \text{onde } \gamma(t) = x;$$



Simetria e grupos

Simetria e grupóides

Simetria escondida

Home Page

Title Page



Page 24 of 29

Go Back

Full Screen

Close

Quit

O grupóide fundamental

$$\Pi(X) = \{[\gamma] \mid \gamma : [0, 1] \rightarrow X\}$$

tem a seguinte estrutura:

- Aplicações *origem e destino*:

$$\mathbf{s}([\gamma]) = \gamma(0), \quad \mathbf{t}([\gamma]) = \gamma(1);$$

- *produto* é concatenação de curvas:

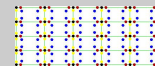
$$[\gamma] \cdot [\eta] = [\gamma \cdot \eta];$$

- *unidades* são dadas pelas curvas constantes:

$$1_x = [\gamma], \quad \text{onde } \gamma(t) = x;$$

- *inversos* obtém-se alterando o sentido às curvas:

$$[\gamma]^{-1} = [\bar{\gamma}], \quad \text{onde } \bar{\gamma}(t) = \gamma(1 - t).$$



Simetria e grupos

Simetria e grupóides

Simetria escondida

Home Page

Title Page



Page 25 of 29

Go Back

Full Screen

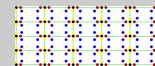
Close

Quit

Para o grupóide fundamental

$$\Pi(X) = \{[\gamma] \mid \gamma : [0, 1] \rightarrow X\}$$

temos:



Simetria e grupos

Simetria e grupóides

Simetria escondida

Home Page

Title Page



Page 25 of 29

Go Back

Full Screen

Close

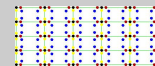
Quit

Para o grupóide fundamental

$$\Pi(X) = \{[\gamma] \mid \gamma : [0, 1] \rightarrow X\}$$

temos:

- 1 órbita por cada componente conexa de X ;



Simetria e grupos

Simetria e grupóides

Simetria escondida

Home Page

Title Page



Page 25 of 29

Go Back

Full Screen

Close

Quit

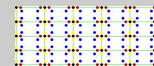
Para o grupóide fundamental

$$\Pi(X) = \{[\gamma] \mid \gamma : [0, 1] \rightarrow X\}$$

temos:

- 1 órbita por cada componente conexa de X ;
- grupo de isotropia de $x \in X$ é o *grupo fundamental*:

$$\pi(X, x) = \{[\gamma] \mid \gamma \text{ é um laço baseado em } x\}.$$



Simetria e grupos

Simetria e grupóides

Simetria escondida

Home Page

Title Page



Page 26 of 29

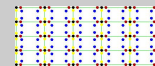
Go Back

Full Screen

Close

Quit

Exemplo: movimento de um pião



Simetria e grupos

Simetria e grupóides

Simetria escondida

Home Page

Title Page



Page 26 of 29

Go Back

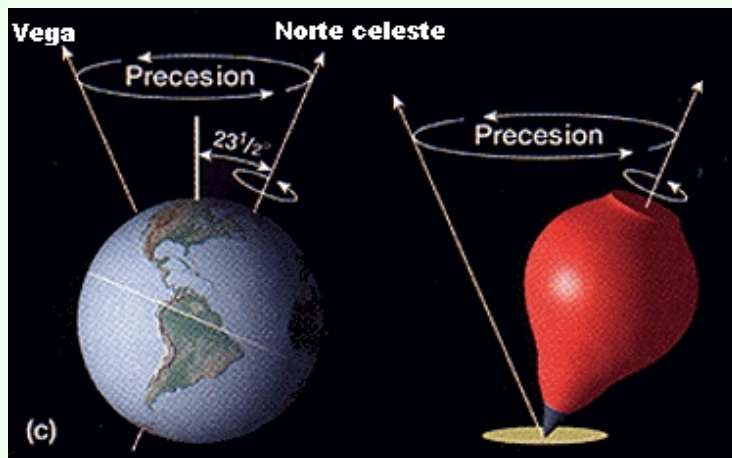
Full Screen

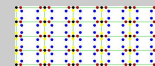
Close

Quit

Exemplo: movimento de um pião

Pião que roda sem deslizar:





Simetria e grupos

Simetria e grupóides

Simetria escondida

Home Page

Title Page



Page 26 of 29

Go Back

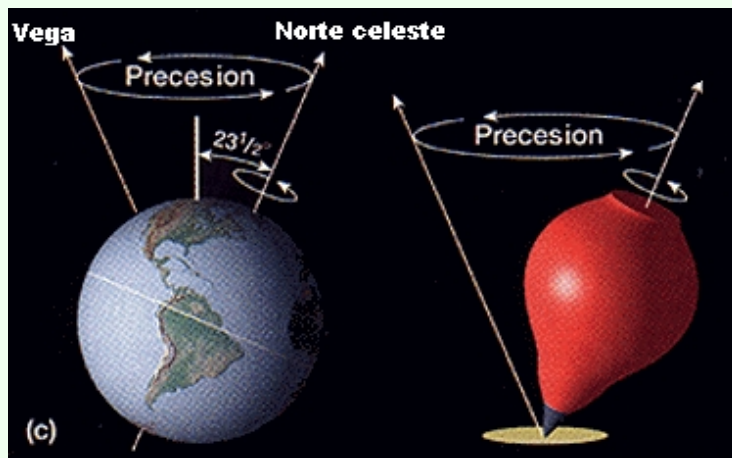
Full Screen

Close

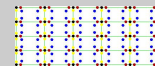
Quit

Exemplo: movimento de um pião

Pião que roda sem deslizar:



- O espaço de configurações é $SO(3)$.



Simetria e grupos

Simetria e grupóides

Simetria escondida

Home Page

Title Page



Page 26 of 29

Go Back

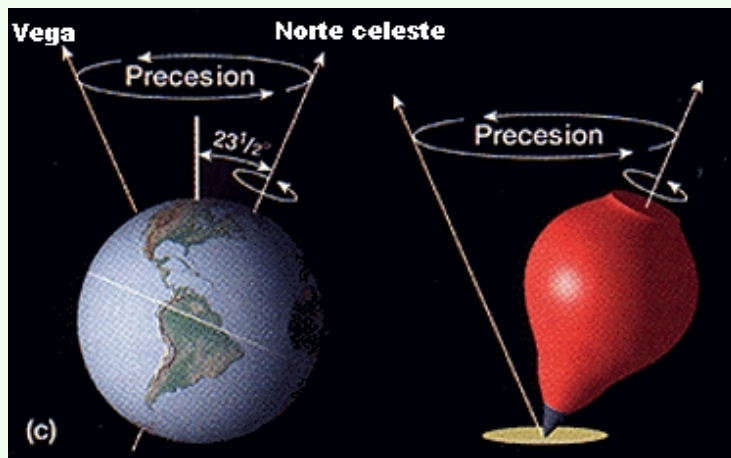
Full Screen

Close

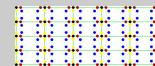
Quit

Exemplo: movimento de um pião

Pião que roda sem deslizar:



- O espaço de configurações é $SO(3)$.
- O grupoíde fundamental $\Pi(SO(3))$ representa as possíveis soluções, a *menos de deformação*.



Simetria e grupos

Simetria e grupóides

Simetria escondida

Home Page

Title Page



Page 26 of 29

Go Back

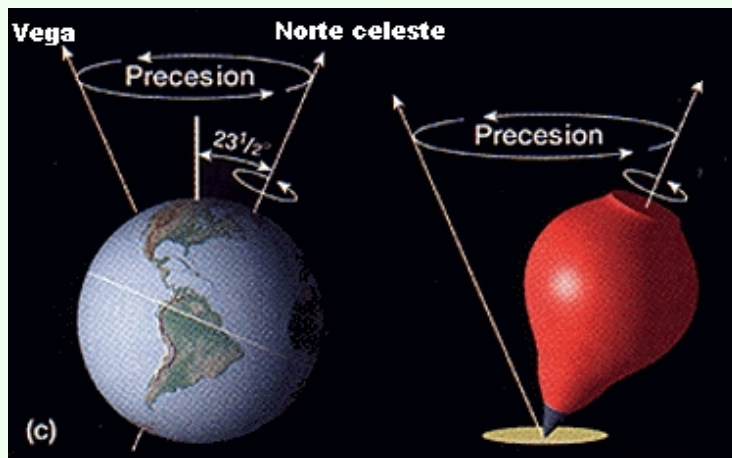
Full Screen

Close

Quit

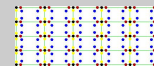
Exemplo: movimento de um pião

Pião que roda sem deslizar:



- O espaço de configurações é $SO(3)$.
- O grupoíde fundamental $\Pi(SO(3))$ representa as possíveis soluções, a *menos de deformação*.
- Temos $\pi(SO(3), x) = \mathbb{Z}_2 = \{+1, -1\}$.

Exemplo: Teoria do controlo



Simetria e grupos

Simetria e grupóides

Simetria escondida

Home Page

Title Page



Page 27 of 29

Go Back

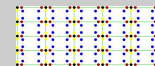
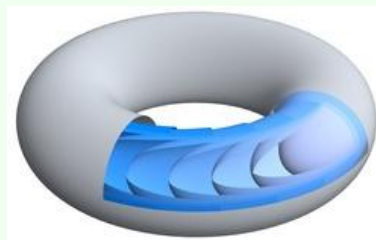
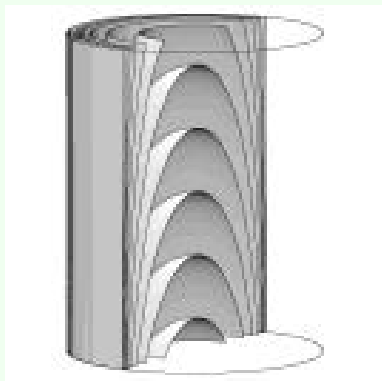
Full Screen

Close

Quit

Exemplo: Teoria do controlo

X um *espaço folheado*:



Simetria e grupos

Simetria e grupóides

Simetria escondida

Home Page

Title Page



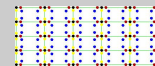
Page 27 of 29

Go Back

Full Screen

Close

Quit



Simetria e grupos

Simetria e grupóides

Simetria escondida

Home Page

Title Page



Page 27 of 29

Go Back

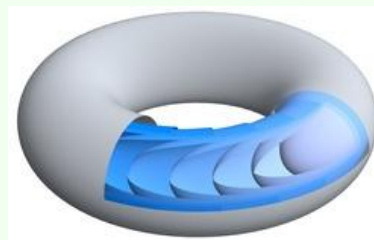
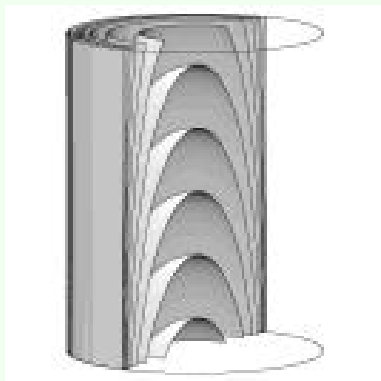
Full Screen

Close

Quit

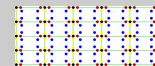
Exemplo: Teoria do controlo

X um *espaço folheado*:



Tomando apenas deformações de curvas nas folhas da folheação \mathcal{F} , obtemos o *grupóide de monodromia* da folheação:

$$\Pi(\mathcal{F}) = \{[\gamma] \mid \gamma : [0, 1] \rightarrow L, L \text{ é folha de } \mathcal{F}\}.$$



Simetria e grupos

Simetria e grupóides

Simetria escondida

Home Page

Title Page



Page 27 of 29

Go Back

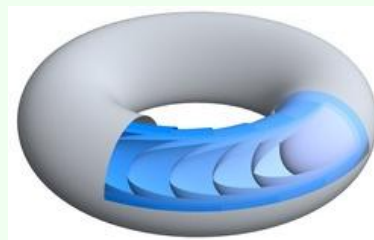
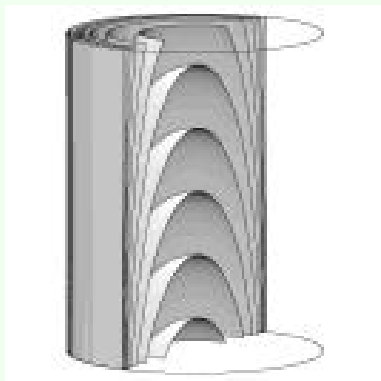
Full Screen

Close

Quit

Exemplo: Teoria do controlo

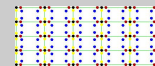
X um *espaço folheado*:



Tomando apenas deformações de curvas nas folhas da folheação \mathcal{F} , obtemos o *grupóide de monodromia* da folheação:

$$\Pi(\mathcal{F}) = \{[\gamma] \mid \gamma : [0, 1] \rightarrow L, L \text{ é folha de } \mathcal{F}\}.$$

- Órbitas são as folhas de \mathcal{F} ;



Simetria e grupos

Simetria e grupóides

Simetria escondida

Home Page

Title Page



Page 27 of 29

Go Back

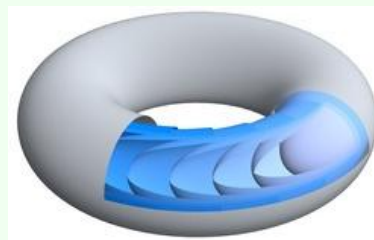
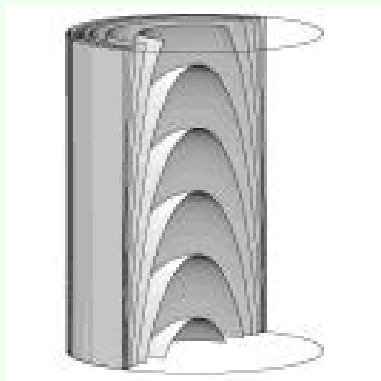
Full Screen

Close

Quit

Exemplo: Teoria do controlo

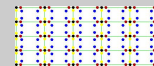
X um *espaço folheado*:



Tomando apenas deformações de curvas nas folhas da folheação \mathcal{F} , obtemos o *grupóide de monodromia* da folheação:

$$\Pi(\mathcal{F}) = \{[\gamma] \mid \gamma : [0, 1] \rightarrow L, L \text{ é folha de } \mathcal{F}\}.$$

- Órbitas são as folhas de \mathcal{F} ;
- Grupos de isotropia são os grupos fundamentais das folhas.



Simetria e grupos

Simetria e grupóides

Simetria escondida

Home Page

Title Page



Page 28 of 29

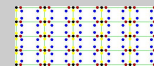
Go Back

Full Screen

Close

Quit

Exemplo: Teoria do controlo (cont.)



Simetria e grupos

Simetria e grupóides

Simetria escondida

Home Page

Title Page



Page 28 of 29

Go Back

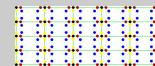
Full Screen

Close

Quit

Exemplo: Teoria do controlo (cont.)

X = CONJUNTO DOS ESTADOS



Simetria e grupos

Simetria e grupóides

Simetria escondida

Home Page

Title Page



Page 28 of 29

Go Back

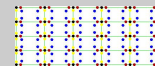
Full Screen

Close

Quit

Exemplo: Teoria do controlo (cont.)

X = CONJUNTO DOS ESTADOS
ÓRBITAS = ESTADOS ACESSÍVEIS



Simetria e grupos

Simetria e grupóides

Simetria escondida

Home Page

Title Page



Page 28 of 29

Go Back

Full Screen

Close

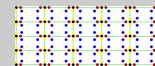
Quit

Exemplo: Teoria do controlo (cont.)

X = CONJUNTO DOS ESTADOS
ÓRBITAS = ESTADOS ACESSÍVEIS

Problema Típico: (*estabilidade*)

Fixemos uma órbita L_0 . Será que L_0 é estável? i.e., será que todas as órbitas próximas de L_0 têm a *mesma forma* de L_0 ?



Simetria e grupos

Simetria e grupóides

Simetria escondida

Home Page

Title Page



Page 28 of 29

Go Back

Full Screen

Close

Quit

Exemplo: Teoria do controlo (cont.)

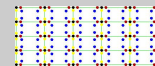
X = CONJUNTO DOS ESTADOS
ÓRBITAS = ESTADOS ACESSÍVEIS

Problema Típico: (*estabilidade*)

Fixemos uma órbita L_0 . Será que L_0 é estável? i.e., será que todas as órbitas próximas de L_0 têm a *mesma forma* de L_0 ?

Teorema 3 (Reeb). *Se L_0 é compacta e o seu grupo fundamental é trivial, então L_0 é uma órbita estável.*

Problemas deste tipo, estão entre os problemas *mais difíceis* da topologia/geometria diferencial ...



Simetria e grupos

Simetria e grupóides

Simetria escondida

Home Page

Title Page



Page 29 of 29

Go Back

Full Screen

Close

Quit

*Se quiseses compreender uma estrutura, um
objecto, etc., estuda primeiro as suas **simetrias**.*

Hermann Weyl