

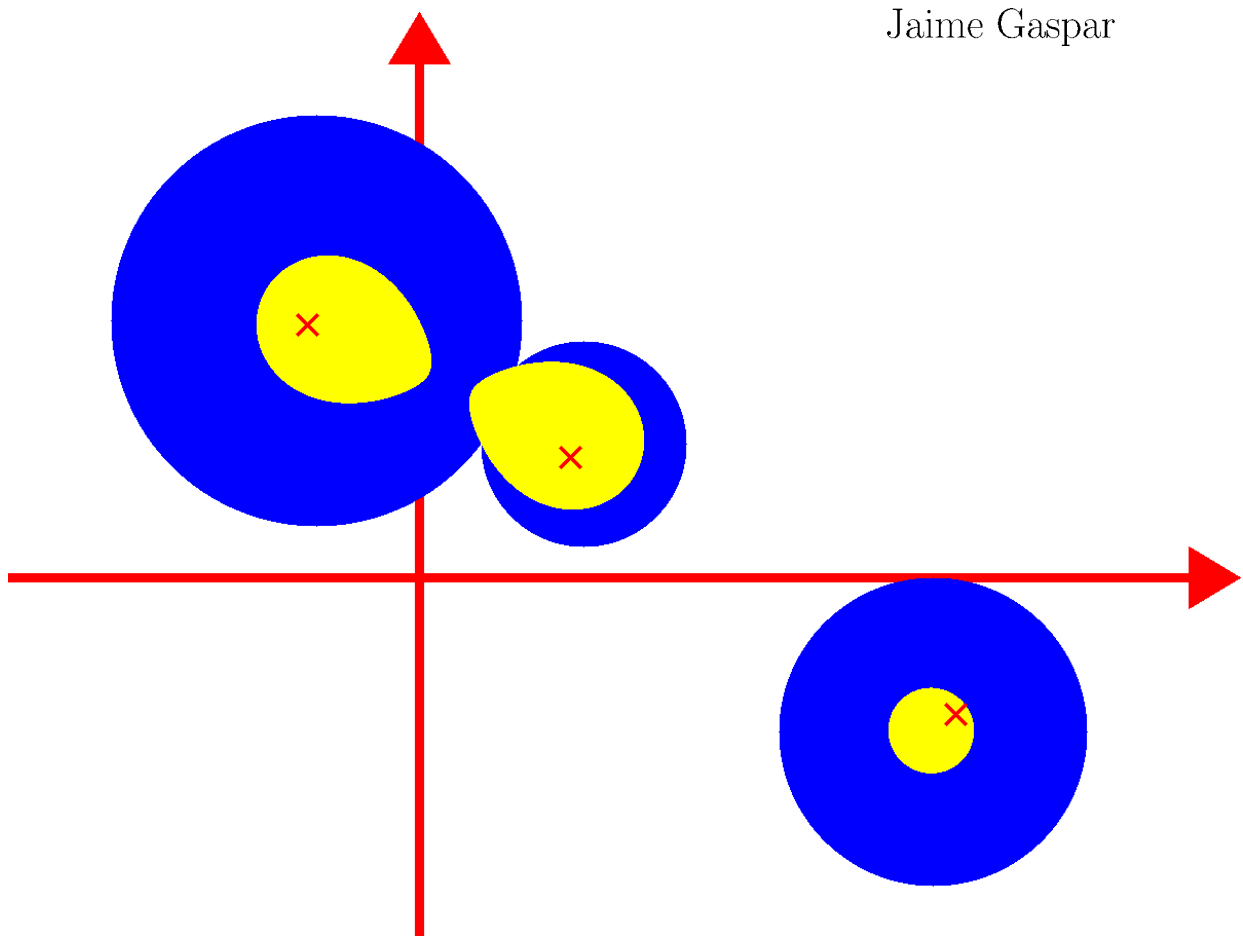
Teorema de Gerschgorin... ou será Geršgorin? ou ainda Geršhgorin?

Gersgorin? Geršgorin?

Gershgorin? Geršgorin?

...

Jaime Gaspar



Gersgorin

Gers^hgorin

Gers^{ch}gorin

Ger[̣]šgorin

Ger[̣]šgorin

Ger[̂]šgorin

Ger[̂]^hgorin

Top 3

1	35%	Gers ^{ch} gorin
2	20%	Gers ^h gorin Ger [̣] šgorin
3	10%	Ger [̣] šgorin

Definição *Seja $A = [a_{ij}] \in \mathbb{C}^{n \times n}$. Definimos*

$$R_i = \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n |a_{ik}|, \quad S_i = \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n |a_{ki}| \quad (i = 1, \dots, n).$$

Teorema de Gerschgorin *Se $A = [a_{ij}] \in \mathbb{C}^{n \times n}$, então os valores próprios de A pertencem à união dos*

$$Z_i = \{z \in \mathbb{C} : |z - a_{ii}| \leq R_i\} \quad (i = 1, \dots, n).$$

Cada conjunto de k círculos disjuntos dos restantes $n - k$ círculos contém exactamente k valores próprios de A (contando multiplicidades).

Exemplo Seja

$$A = \begin{bmatrix} -4 + 2i & 1 & 1 \\ 0 & -2 + i & 1 \\ 1 & 0 & 4 - 2i \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{3 \times 3}.$$

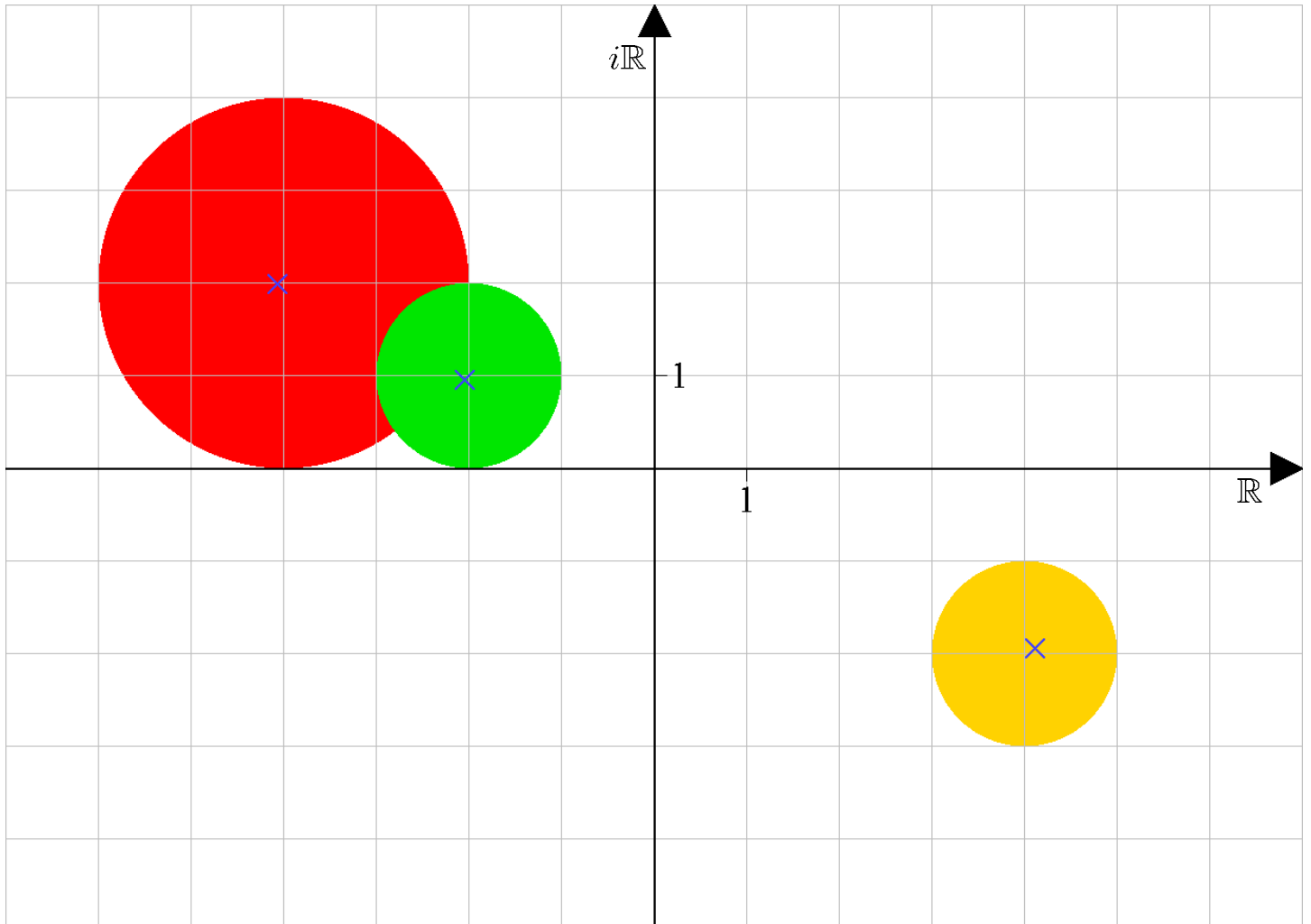
Temos $R_1 = 2$, $R_2 = 1$ e $R_3 = 1$.

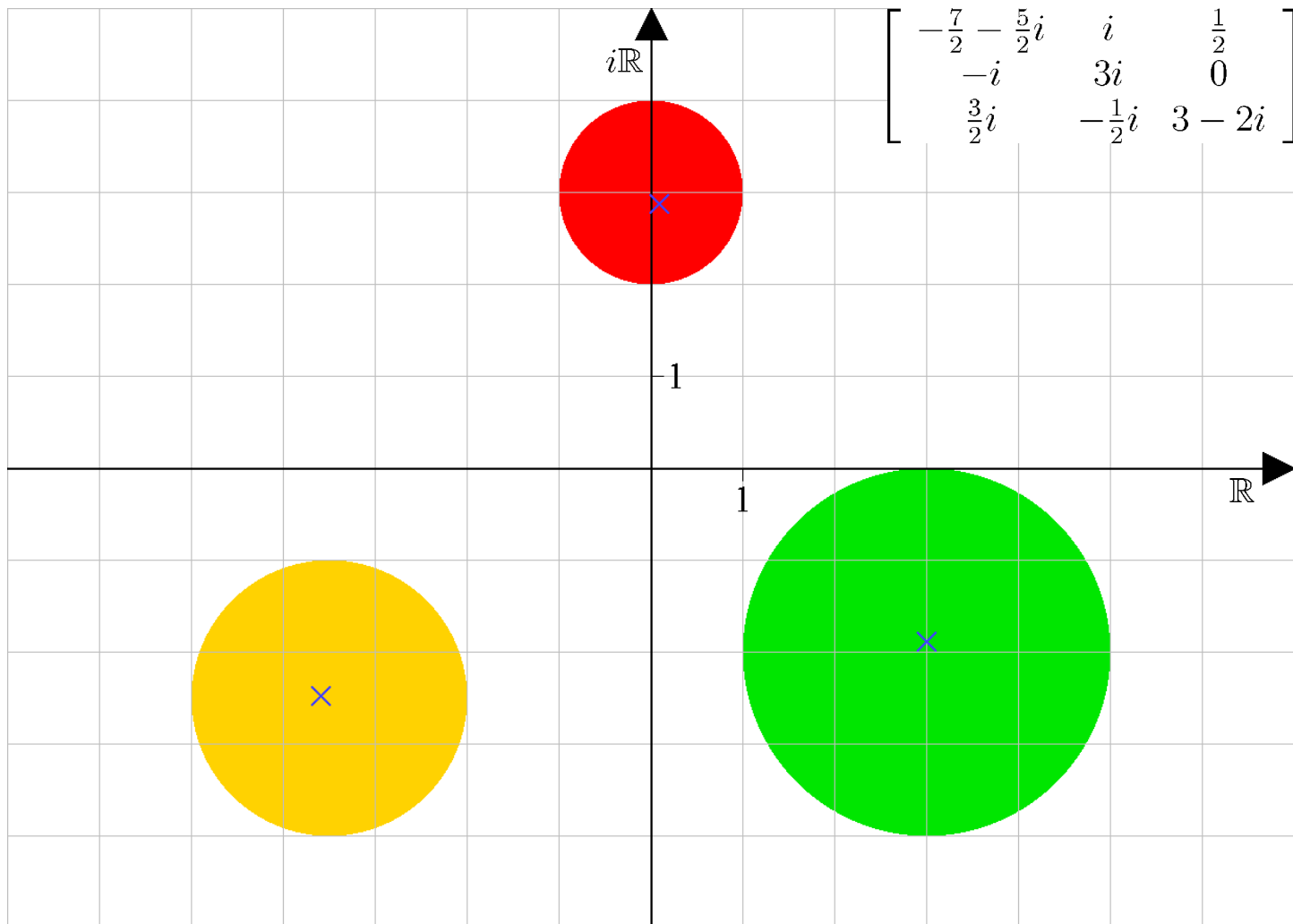
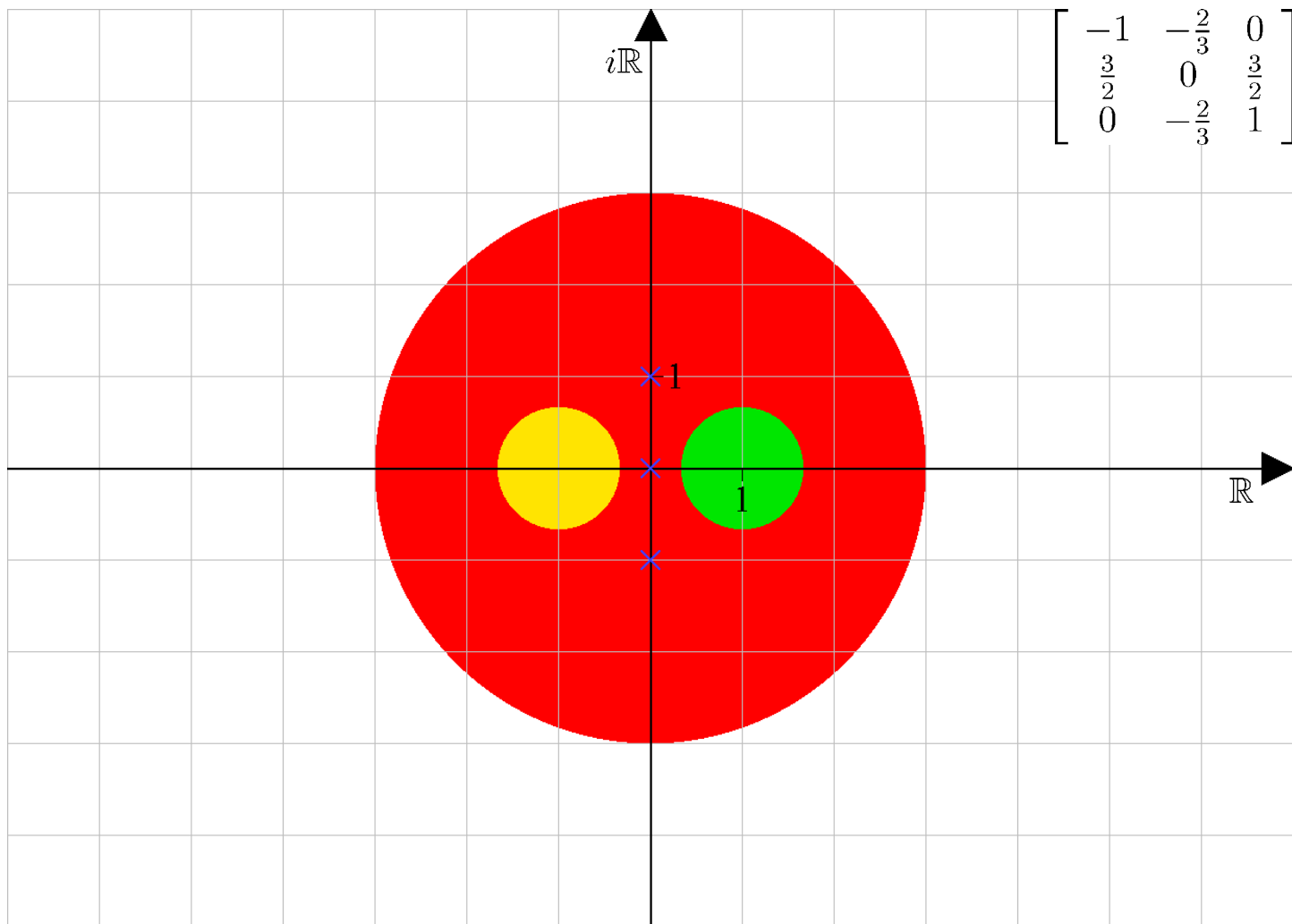
Os valores próprios de A pertencem à união dos

$$Z_1 = \{z \in \mathbb{C} : |z - (-4 + 2i)| \leq 2\},$$

$$Z_2 = \{z \in \mathbb{C} : |z - (-2 + i)| \leq 1\},$$

$$Z_3 = \{z \in \mathbb{C} : |z - (4 - 2i)| \leq 1\}.$$





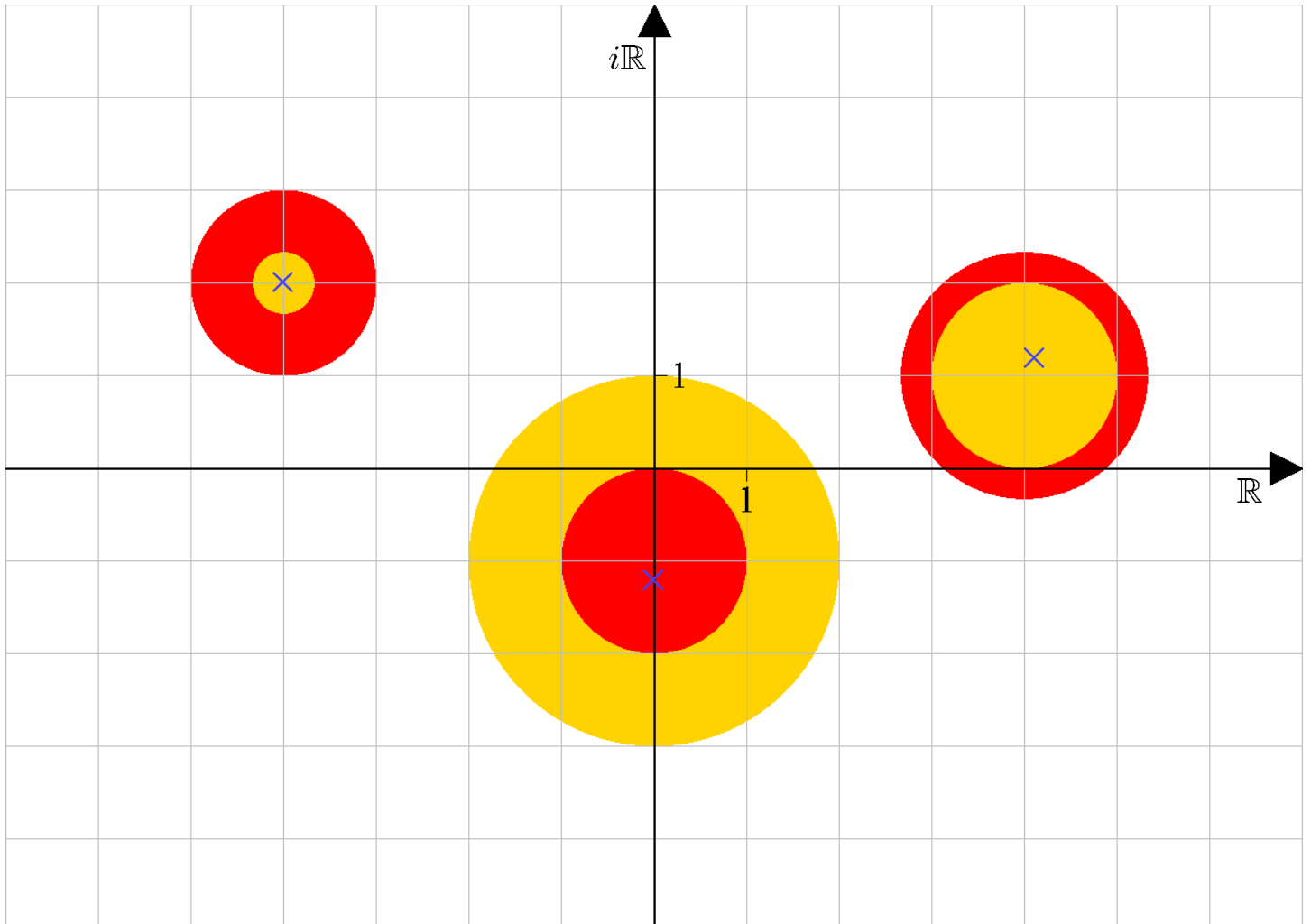
Exemplo Seja

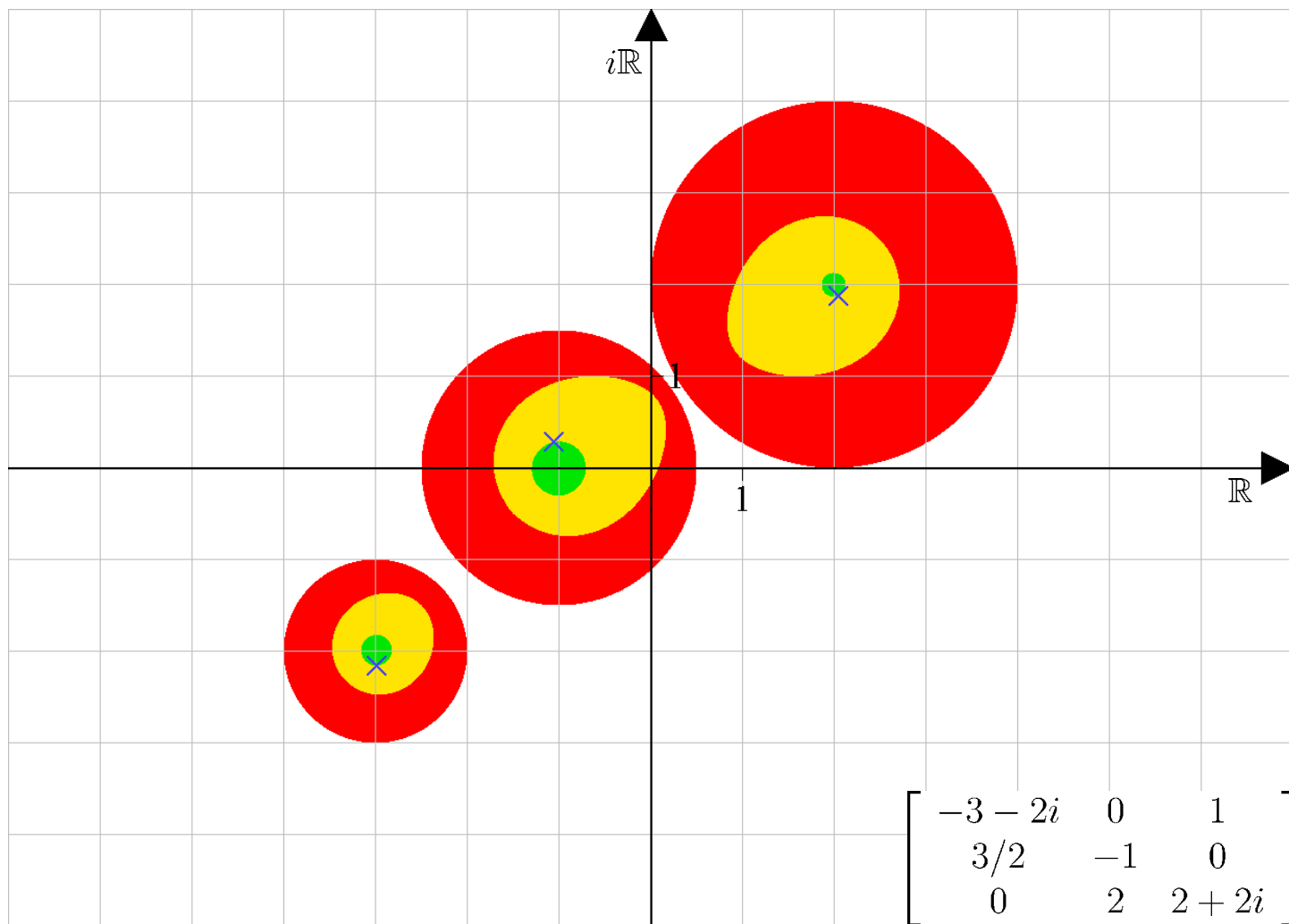
$$A = \begin{bmatrix} -4 + 2i & 1 & 0 \\ 0 & -i & 1 \\ i/3 & i & 4 + i \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{3 \times 3}.$$

Temos

$$\begin{aligned} R_1 &= 1, & R_2 &= 1, & R_3 &= 4/3, \\ S_1 &= 1/3, & S_2 &= 2, & S_3 &= 1. \end{aligned}$$

As regiões dadas pelo Teorema de Gerschgorin para A estão representadas a vermelho, e as regiões dadas pelo Teorema de Gerschgorin para A^T estão representadas a amarelo.





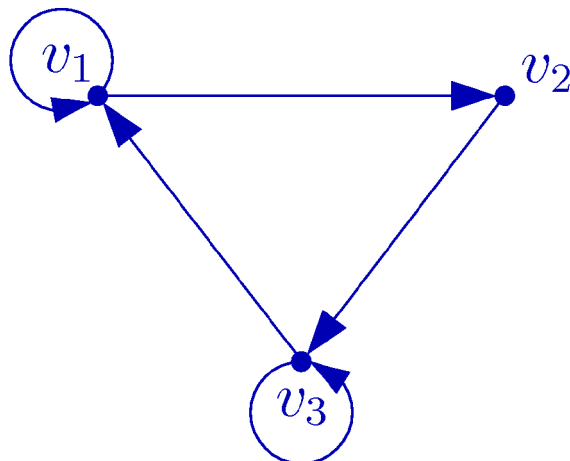
Definição *Seja $A = [a_{ij}] \in \mathbb{C}^{n \times n}$. O grafo orientado $D(A) = (V, A)$ (onde V é o conjunto de vértices de $D(A)$ e A é a família de arestas de $D(A)$) é definido da seguinte forma:*

- $V = \{v_1, \dots, v_n\}$ (com v_1, \dots, v_n distintos);
- $(v_i, v_j) \in A \Leftrightarrow a_{ij} \neq 0$.

Exemplo *Seja*

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{3 \times 3}.$$

$D(A)$ é



Definição *Seja $G = (V, A)$ um grafo orientado (onde V é o conjunto de vértices de G e A é a família de arestas de G). Uma sequência de m arestas sucessivamente adjacentes*

$$(v_{i_0}, v_{i_1}), (v_{i_1}, v_{i_2}), \dots, (v_{i_{m-1}}, v_{i_m}),$$

com $m \geq 1$, chama-se um circuito de comprimento m se e só se

- *As arestas $(v_{i_0}, v_{i_1}), \dots, (v_{i_{m-1}}, v_{i_m})$ são distintas;*
- *Os vértices v_{i_0}, \dots, v_{i_m} são distintos, com a exceção de que se tem de ter $v_{i_0} = v_{i_m}$.*

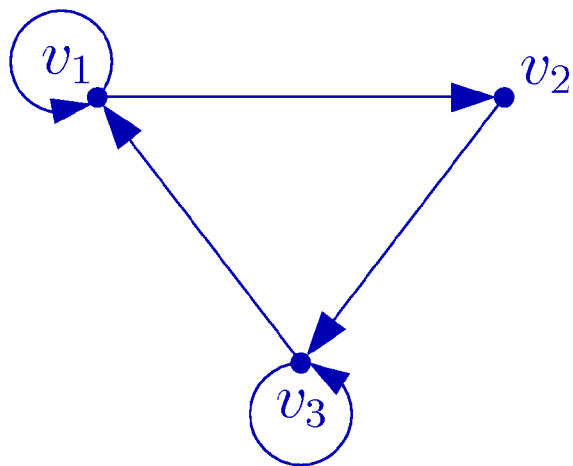
O circuito $(v_{i_0}, v_{i_1}), \dots, (v_{i_{m-1}}, v_{i_m})$ denota-se por

$$v_{i_0} \longrightarrow \dots \longrightarrow v_{i_m}.$$

Para indicar que o vértice v_k pertence ao circuito γ , escrevemos $k \in \gamma$.

O conjunto de todos os circuitos de comprimento pelo menos dois do grafo orientado G denota-se por $\mathcal{C}_2(G)$.

Exemplo Os circuitos de



são

$$v_1 \rightarrow v_1,$$

$$v_3 \rightarrow v_3,$$

$$v_1 \rightarrow v_2 \rightarrow v_3 \rightarrow v_1,$$

$$v_2 \rightarrow v_3 \rightarrow v_1 \rightarrow v_2,$$

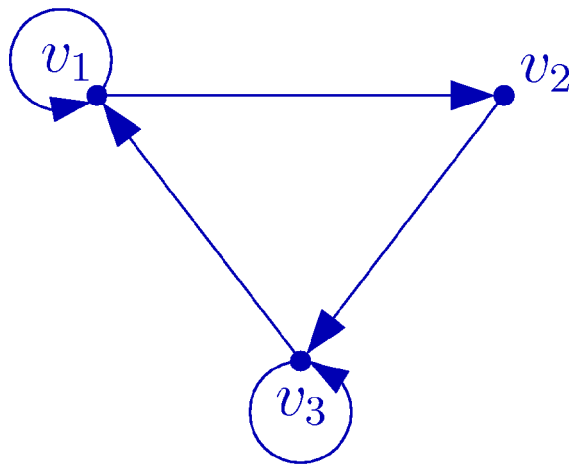
$$v_3 \rightarrow v_1 \rightarrow v_2 \rightarrow v_3.$$

Definição *Seja $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$. A matriz A diz-se fracamente irredutível se e só se todo o vértice de $D(A)$ pertence a algum circuito de comprimento pelo menos dois de $D(A)$.*

Exemplo Seja

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{3 \times 3}.$$

$D(A)$ é



Os circuitos de comprimento pelo menos dois de $D(A)$ são

$$v_1 \rightarrow v_2 \rightarrow v_3 \rightarrow v_1,$$

$$v_2 \rightarrow v_3 \rightarrow v_1 \rightarrow v_2,$$

$$v_3 \rightarrow v_1 \rightarrow v_2 \rightarrow v_3.$$

A é fracamente irredutível.

1.^a série de teoremas

Teorema 1 (de Gerschgorin) Se $A = [a_{ij}] \in \mathbb{C}^{n \times n}$, então os valores próprios de A pertencem à união dos

$$Z_i = \{z \in \mathbb{C} : |z - a_{ii}| \leq R_i\} \quad (i = 1, \dots, n).$$

Teorema 2 (de Brauer) Se $A = [a_{ij}] \in \mathbb{C}^{n \times n}$ e $n \geq 2$, então os valores próprios de A pertencem à união dos

$$Z_{ij} = \{z \in \mathbb{C} : |z - a_{ii}||z - a_{jj}| \leq R_i R_j\} \\ (i, j = 1, \dots, n; i \neq j).$$

Teorema 3 Se $A = [a_{ij}] \in \mathbb{C}^{n \times n}$ é fracamente ir-reduzível, então os valores próprios de A pertencem à união dos

$$Z_\gamma = \left\{ z \in \mathbb{C} : \prod_{i \in \gamma} |z - a_{ii}| \leq \prod_{i \in \gamma} R_i \right\} \\ (\gamma \in \mathcal{C}_2(D(A))).$$

Exemplo Seja

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2i & 1/2 \\ 2 & -3 + 3i & -2 \\ 1 & 1 & -2i \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{3 \times 3}.$$

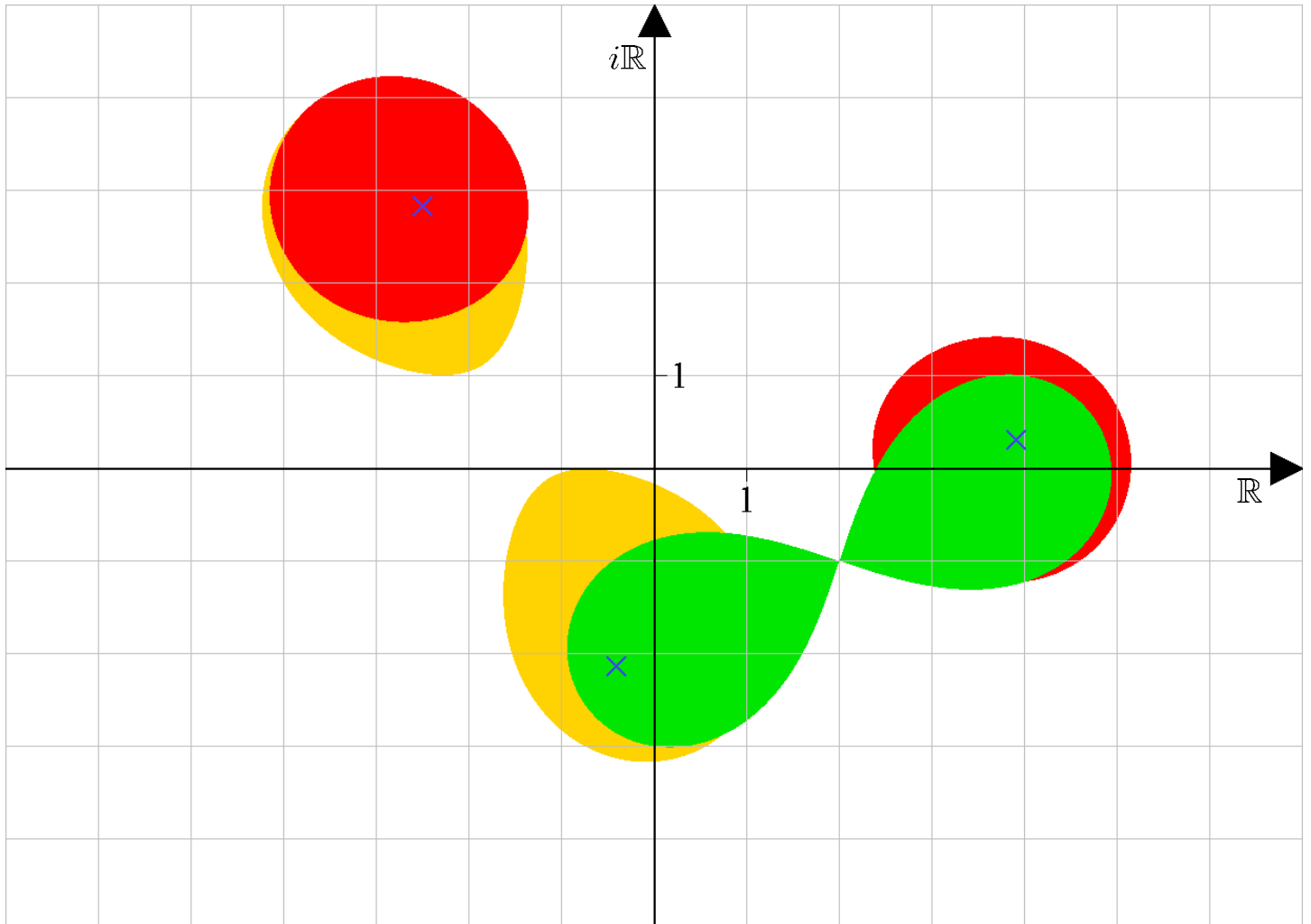
Temos $R_1 = 5/2$, $R_2 = 4$ e $R_3 = 2$.

Segundo o teorema 2 (de Brauer), os valores próprios de A pertencem à união dos

$$Z_{12} = Z_{21} = \{z \in \mathbb{C} : |z - 4||z - (-3 + 3i)| \leq 10\},$$

$$Z_{13} = Z_{31} = \{z \in \mathbb{C} : |z - 4||z - (-2i)| \leq 5\},$$

$$Z_{23} = Z_{32} = \{z \in \mathbb{C} : |z - (-3 + 3i)||z - (-2i)| \leq 8\}.$$



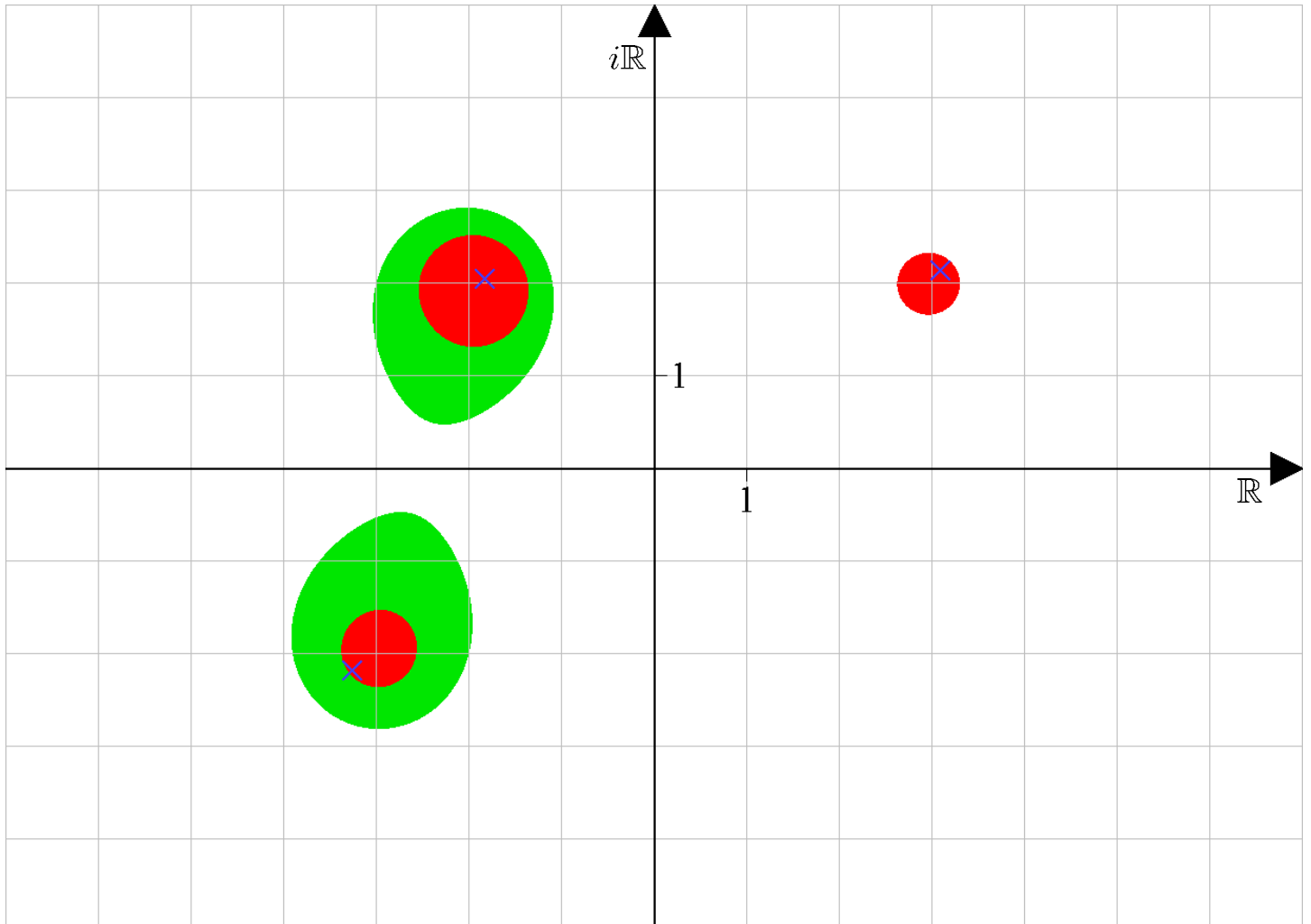
Exemplo Seja

$$A = \begin{bmatrix} -3 - 2i & i & i \\ 0 & 3 + 2i & 3 \\ 2 & 0 & -2 + 2i \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{3 \times 3}.$$

A é fracamente irredutível.

Segundo o teorema 3, os valores próprios de A pertencem à união dos

$$\begin{aligned} Z_{v_1 \rightarrow v_2 \rightarrow v_3 \rightarrow v_1} = \\ \{z \in \mathbb{C} : |z - (-3 - 2i)| |z - (3 + 2i)| |z - (-2 + 2i)| \leq 12\}, \\ Z_{v_1 \rightarrow v_3 \rightarrow v_1} = \\ \{z \in \mathbb{C} : |z - (-3 - 2i)| |z - (-2 + 2i)| \leq 4\}. \end{aligned}$$



Teorema 1 (de Gerschgorin)

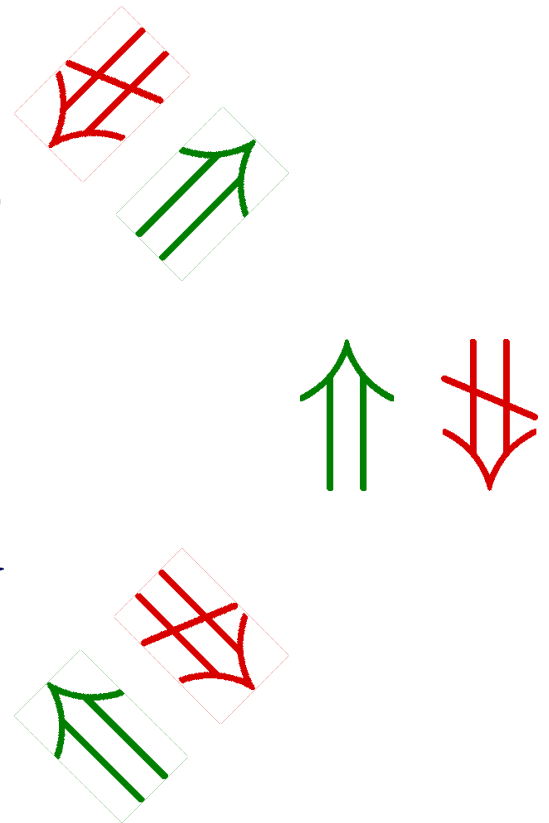
Se $A = [a_{ij}] \in \mathbb{C}^{n \times n}$, então os valores próprios de A pertencem à união dos

$$Z_i = \{z \in \mathbb{C} : |z - a_{ii}| \leq R_i\} \\ (i = 1, \dots, n).$$

Teorema 2 (de Brauer)

Se $A = [a_{ij}] \in \mathbb{C}^{n \times n}$ e $n \geq 2$, então os valores próprios de A pertencem à união dos

$$Z_{ij} = \\ \{z \in \mathbb{C} : |z - a_{ii}| |z - a_{jj}| \leq R_i R_j\} \\ (i, j = 1, \dots, n; i \neq j).$$



Teorema 3

Se $A = [a_{ij}] \in \mathbb{C}^{n \times n}$ é fracamente irredutível, então os valores próprios de A pertencem à união dos

$$Z_\gamma = \\ \left\{ z \in \mathbb{C} : \prod_{i \in \gamma} |z - a_{ii}| \leq \prod_{i \in \gamma} R_i \right\} \\ (\gamma \in \mathcal{C}_2(D(A))).$$

Teorema 1
(de Gerschgorin)

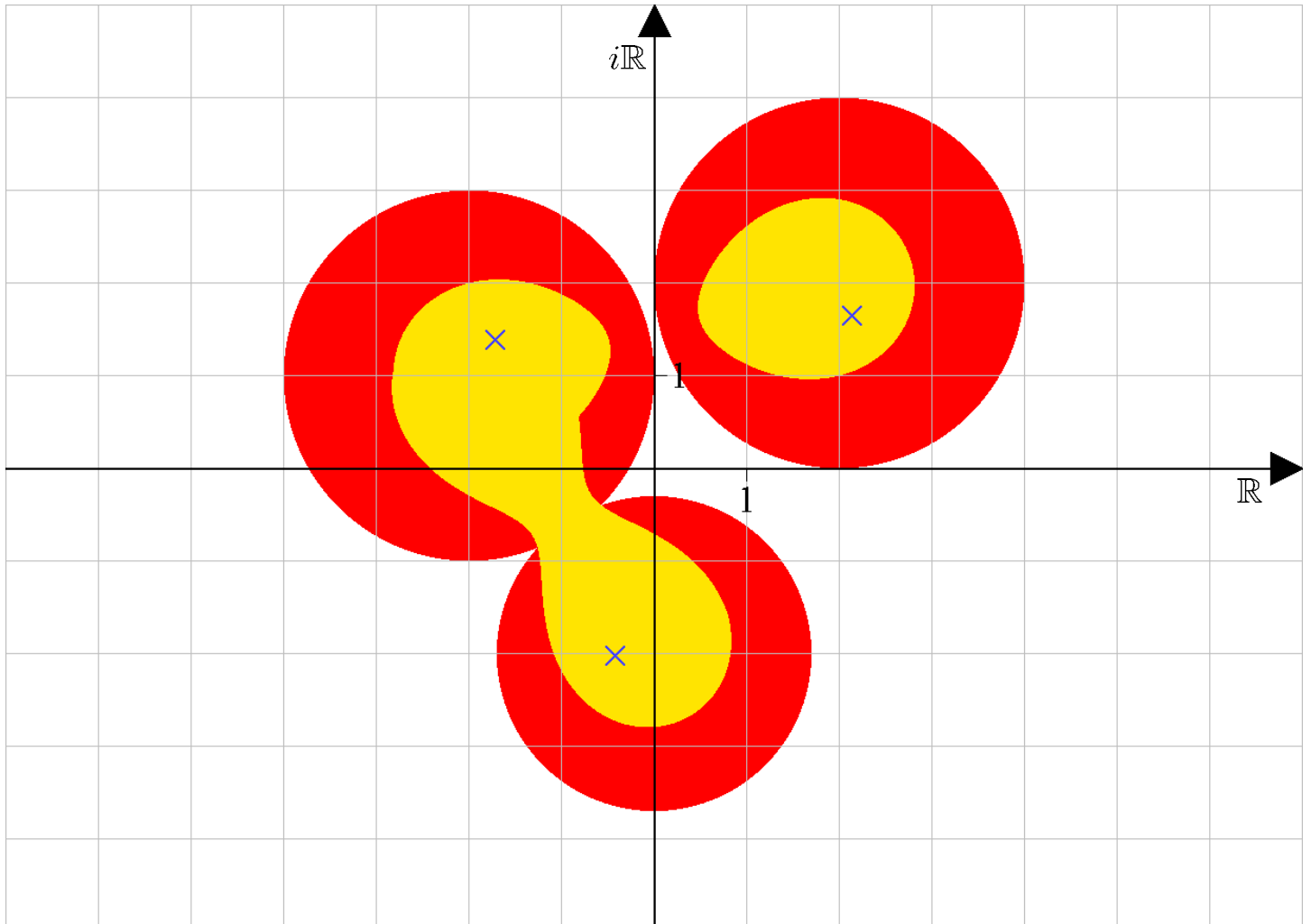


Teorema 2
(de Brauer)

Seja

$$A = \begin{bmatrix} -2 + i & 2 & 0 \\ 0 & 2 + 2i & 2 \\ 17/10 & 0 & -2i \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{3 \times 3}.$$

As regiões dadas pelo teorema 1 (de Gerschgorin) estão representadas a vermelho, e as regiões dadas pelo teorema 2 (de Brauer) estão representadas a amarelo.



Teorema 1
(de Gerschgorin)



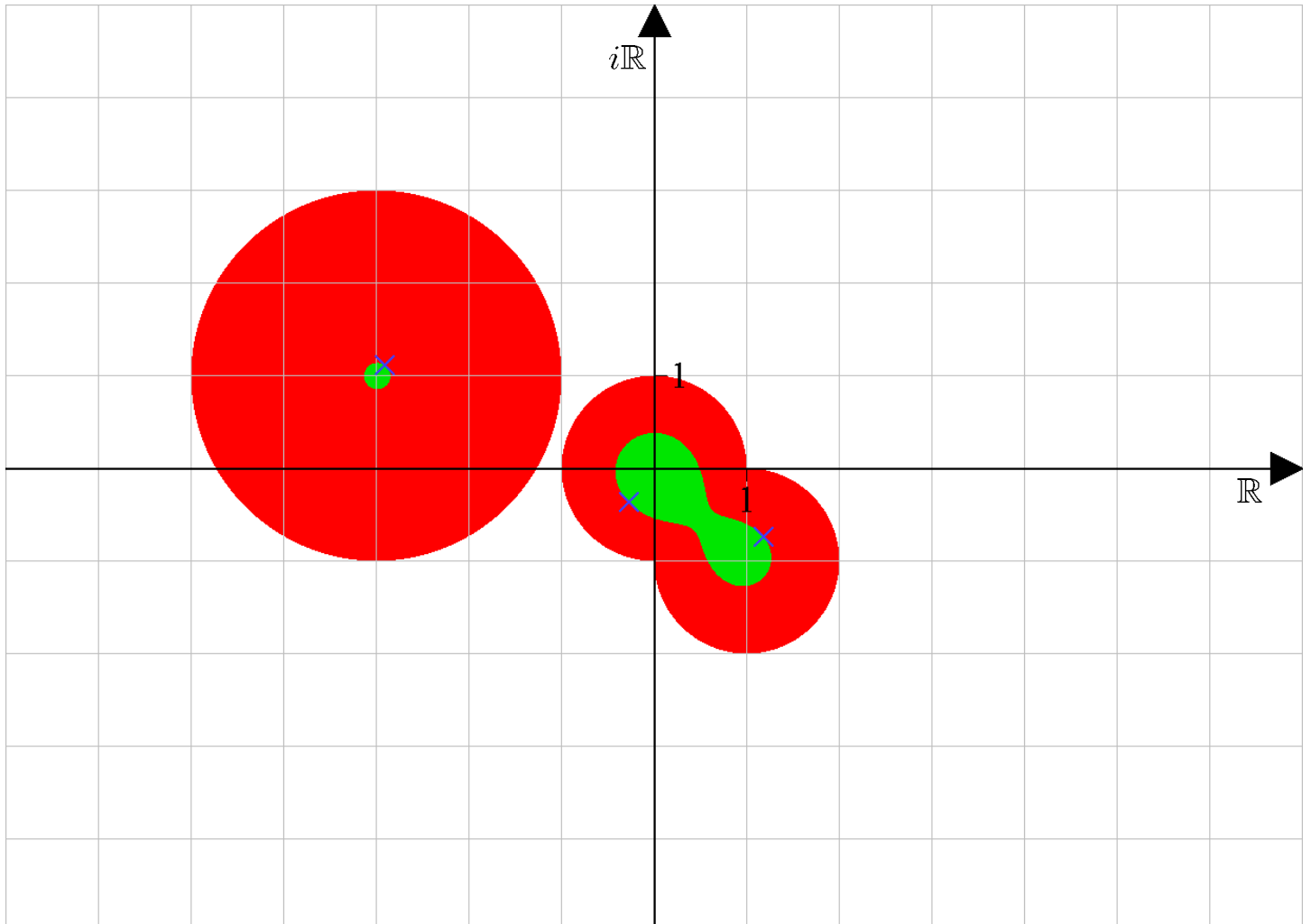
Teorema 3

Seja

$$A = \begin{bmatrix} -3 + i & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 - i \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{3 \times 3}.$$

A é fracamente irreduzível.

As regiões dadas pelo teorema 1 (de Gerschgorin) estão representadas a vermelho, e as regiões dadas pelo teorema 3 estão representadas a verde.



Teorema 2
(de Brauer)



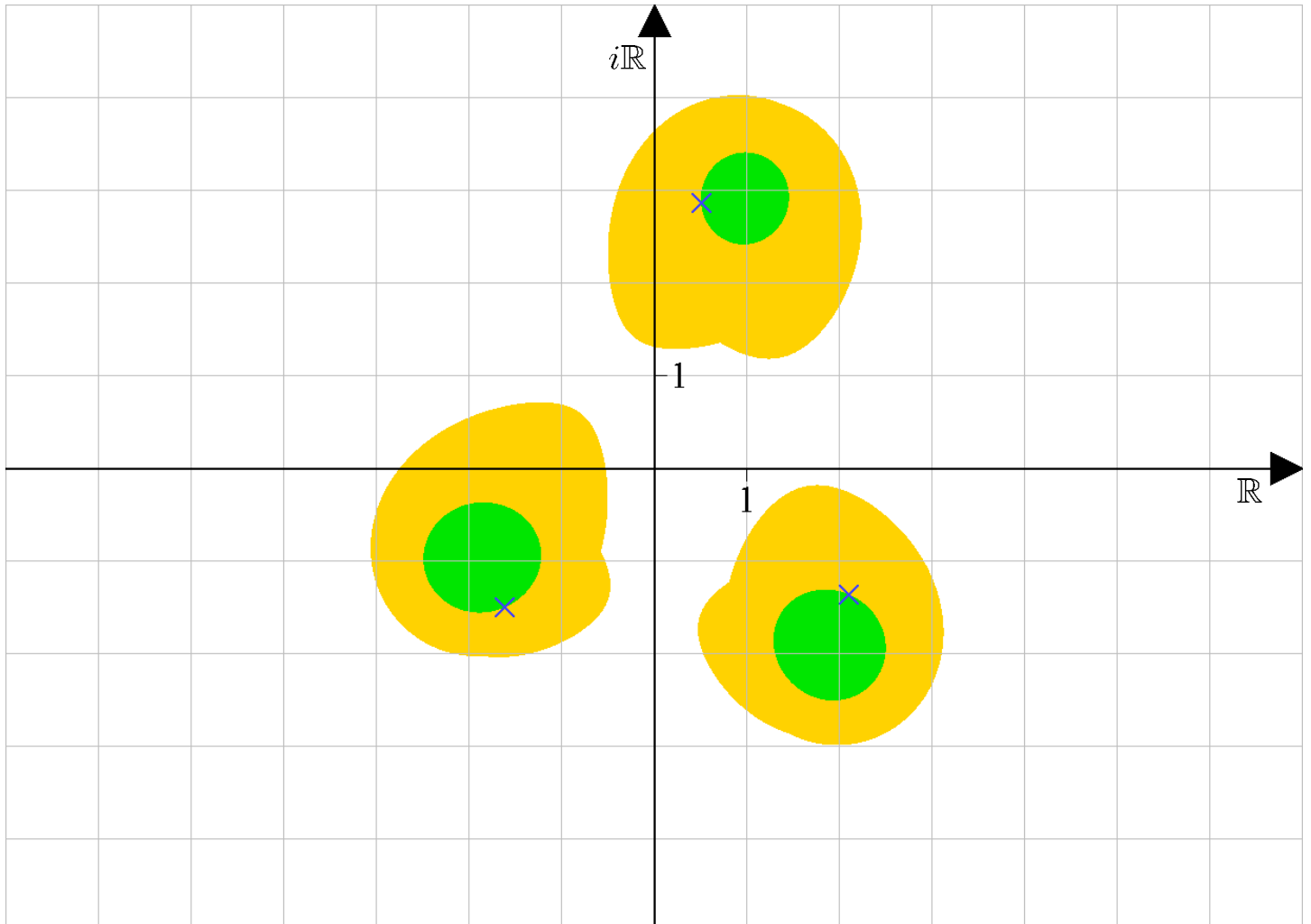
Teorema 3

Seja

$$A = \begin{bmatrix} 1 + 3i & 3 & 0 \\ 0 & -2 - i & 2 \\ 2 & 0 & 2 - 2i \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{3 \times 3}.$$

A é fracamente irredutível.

As regiões dadas pelo teorema 2 (de Brauer) estão representadas a amarelo, e as regiões dadas pelo teorema 3 estão representadas a verde.



2.^a série de teoremas

Definição A matriz $A = [a_{ij}] \in \mathbb{C}^{n \times n}$ diz-se uma matriz de diagonal dominante (por linhas) se e só se

$$|a_{ii}| > R_i \quad (i = 1, \dots, n).$$

Teorema A (de Lévy-Desplanques) Se $A = [a_{ij}] \in \mathbb{C}^{n \times n}$ é uma matriz de diagonal dominante (por linhas), então $\det A \neq 0$.

Teorema B (de Brauer) Seja $A = [a_{ij}] \in \mathbb{C}^{n \times n}$ com $n \geq 2$. Se

$$|a_{ii}||a_{jj}| > R_i R_j \quad (i = 1, \dots, n; i \neq j),$$

então $\det A \neq 0$.

Teorema C Seja $A = [a_{ij}] \in \mathbb{C}^{n \times n}$ fracamente irreduzível. Se

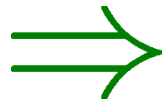
$$\prod_{i \in \gamma} |a_{ii}| > \prod_{i \in \gamma} R_i, \quad \forall \gamma \in \mathcal{C}_2(D(A)),$$

então $\det A \neq 0$.

Teorema de Gerschgorin

Se $A = [a_{ij}] \in \mathbb{C}^{n \times n}$, então os valores próprios de A pertencem à união dos

$$Z_i = \{z \in \mathbb{C} : |z - a_{ii}| \leq R_i\} \\ (i = 1, \dots, n).$$



Teorema de Lévy-Desplanques

Se $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ é uma matriz de diagonal dominante (por linhas), então $\det A \neq 0$.

$A \in \mathbb{C}^{n \times n}$
de diagonal
dominante
(por linhas)



$$\forall i \in \{1, \dots, n\}, \\ |a_{ii}| > R_i$$



$$\nexists i \in \{1, \dots, n\} : \\ |0 - a_{ii}| \leq R_i$$



$$\forall i \in \{1, \dots, n\}, \\ |0 - a_{ii}| > R_i$$



$$\nexists i \in \{1, \dots, n\} : \\ 0 \in Z_i$$



$$0 \notin \bigcup_{i=1}^n Z_i$$

Teorema de Gerschgorin \longrightarrow



$$\det A \neq 0$$



0 não é valor
próprio de A

1.^a série

Teorema 1 (de Gerschgorin)

Se $A = [a_{ij}] \in \mathbb{C}^{n \times n}$, então os valores próprios de A pertencem à união dos

$$Z_i = \{z \in \mathbb{C} : |z - a_{ii}| \leq R_i\} \\ (i = 1, \dots, n).$$

Teorema 2 (de Brauer)

Se $A = [a_{ij}] \in \mathbb{C}^{n \times n}$ e $n \geq 2$, então os valores próprios de A pertencem à união dos

$$Z_{ij} = \\ \{z \in \mathbb{C} : |z - a_{ii}||z - a_{jj}| \leq R_i R_j\} \\ (i, j = 1, \dots, n; i \neq j).$$

Teorema 3

Se $A = [a_{ij}] \in \mathbb{C}^{n \times n}$ é fracamente irredutível, então os valores próprios de A pertencem à união dos

$$Z_\gamma = \\ \left\{ z \in \mathbb{C} : \prod_{i \in \gamma} |z - a_{ii}| \leq \prod_{i \in \gamma} R_i \right\} \\ (\gamma \in \mathcal{C}_2(D(A))).$$

2.^a série

Teorema A

(de Lévy-
-Desplanques)

Se $A = [a_{ij}] \in \mathbb{C}^{n \times n}$ é uma matriz de diagonal dominante (por linhas), então $\det A \neq 0$.

Teorema B

(de Brauer)

Seja $A = [a_{ij}] \in \mathbb{C}^{n \times n}$ com $n \geq 2$. Se

$$|a_{ii}||a_{jj}| > R_i R_j \\ (i = 1, \dots, n; i \neq j),$$

então $\det A \neq 0$.

Teorema C

Seja $A = [a_{ij}] \in \mathbb{C}^{n \times n}$ fracamente irredutível.

Se

$$\prod_{i \in \gamma} |a_{ii}| > \prod_{i \in \gamma} R_i, \\ \forall \gamma \in \mathcal{C}_2(D(A)),$$

então $\det A \neq 0$.

3.º série de teoremas

Teorema *Sejam $A = [a_{ij}] \in \mathbb{C}^{n \times n}$ e $p \in [0, 1] \subseteq \mathbb{R}$. Os valores próprios de A pertencem à união dos*

$$Z_{i,p} = \{z \in \mathbb{C} : |z - a_{ii}| \leq R_i^p S_i^{1-p}\} \quad (i = 1, \dots, n).$$

Teorema *Sejam $A = [a_{ij}] \in \mathbb{C}^{n \times n}$ e $p \in [0, 1] \subseteq \mathbb{R}$. Os valores próprios de A pertencem à união dos*

$$Z_{ij,p} = \{z \in \mathbb{C} : |z - a_{ii}| |z - a_{jj}| \leq R_i^p S_i^{1-p} R_j^p S_j^{1-p}\} \\ (i, j = 1, \dots, n; i \neq j).$$

Teorema *Seja $A = [a_{ij}] \in \mathbb{C}^{n \times n}$ uma matriz fracamente irredutível e $p \in [0, 1] \subseteq \mathbb{R}$. Os valores próprios de A pertencem à união do*

$$Z_\gamma = \left\{ z \in \mathbb{C} : \prod_{i \in \gamma} |z - a_{ii}| \leq \left(\prod_{i \in \gamma} R_i^p \right) \left(\prod_{i \in \gamma} S_i^{1-p} \right) \right\} \\ (\gamma \in \mathcal{C}_2(D(A))).$$

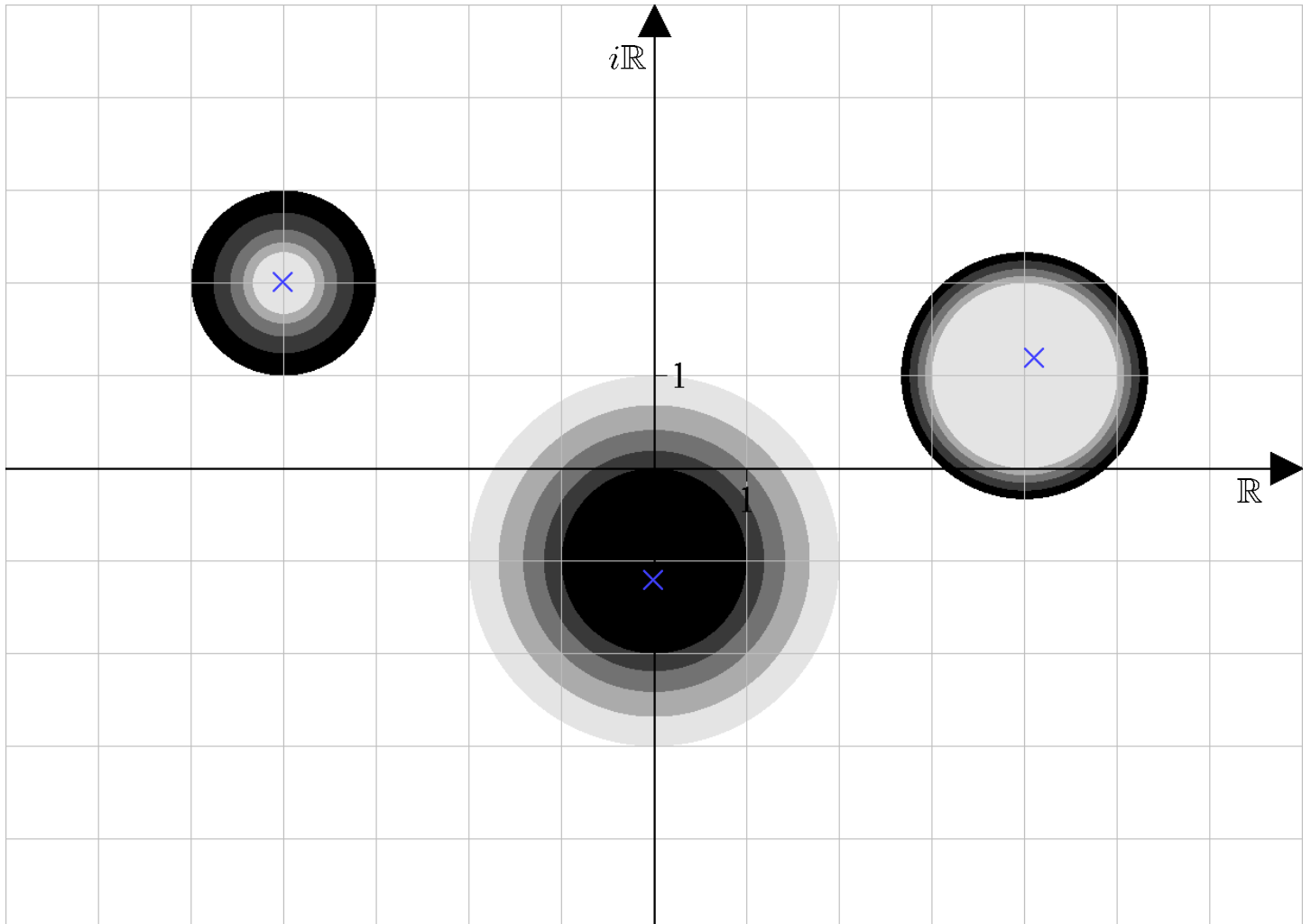
Exemplo Seja

$$A = \begin{bmatrix} -4 + 2i & 1 & 0 \\ 0 & -i & 1 \\ i/3 & i & 4 + i \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{3 \times 3}.$$

Temos

$$\begin{aligned} R_1 &= 1, & R_2 &= 1, & R_3 &= 4/3, \\ S_1 &= 1/3, & S_2 &= 2, & S_3 &= 1. \end{aligned}$$

As regiões dadas pelo primeiro teorema da terceira série estão representadas desde cinzento claro para $p = 0$ até preto para $p = 1$.



4.^a série de teoremas

Teorema *Sejam $A = [a_{ij}] \in \mathbb{C}^{n \times n}$ e $p \in [0, 1] \subseteq \mathbb{R}$. Se*

$$|a_{ii}| > R_i^p S_i^{1-p} \quad (i = 1, \dots, n),$$

então $\det A \neq 0$.

Teorema *Sejam $A = [a_{ij}] \in \mathbb{C}^{n \times n}$, $n \geq 2$ e $p \in [0, 1] \subseteq \mathbb{R}$. Se*

$$|a_{ii}||a_{jj}| > R_i^p S_i^{1-p} R_j^p S_j^{1-p} \quad (i, j = 1, \dots, n; i \neq j),$$

então $\det A \neq 0$.

Teorema *Seja $A = [a_{ij}] \in \mathbb{C}^{n \times n}$ uma matriz fracamente irredutível e $p \in [0, 1] \subseteq \mathbb{R}$. Se*

$$\prod_{i \in \gamma} |a_{ii}| > \left(\prod_{i \in \gamma} R_i^p \right) \left(\prod_{i \in \gamma} S_i^{1-p} \right), \quad \forall \gamma \in \mathcal{C}_2(D(A)),$$

então $\det A \neq 0$.

Exemplo Seja

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1/4 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{3 \times 3}.$$

Temos

$$\begin{aligned} R_1 &= 4, & R_2 &= 1/4, & R_3 &= 1, \\ S_1 &= 1/4, & S_2 &= 4, & S_3 &= 1. \end{aligned}$$

O teorema A (de Lévy-Desplanques) não se aplica a A porque $|a_{11}| = 2 \not\geq R_1$, e não se aplica a A^T porque $|a_{22}| = 2 \not\geq S_2$.

Com $p = 1/2$, o primeiro teorema da quarta série aplica-se a A porque

$$|a_{ii}| = 2 > 1 = R_i^p S_i^{1-p} \quad (i = 1, 2, 3),$$

concluindo-se que $\det A \neq 0$.