

# NOTAS DE TEORIA DE HOMOTOPIA

GUSTAVO GRANJA

## CONTENTS

1. Introdução	2
História	3
Pré-requisitos	3
Agradecimentos	4
2. Preliminares	4
Espaços Topológicos	4
Complexos em cadeia	4
3. Fibrações e cofibrações	6
Cofibrações	7
Fibrações	13
Espaços pontuados	21
Relação entre sucessões de fibração e cofibração.	27
4. Grupos de homotopia	31
Grupos de homotopia relativos	33
Dependência do ponto de base	36
5. Teoria de homotopia de complexos celulares	41
Teoremas de Aproximação	42
Excisão para grupos de homotopia.	51
O homomorfismo de Hurewicz	65
6. (Co)homologia de fibrações.	72
Sucessões espectrais	72
A sucessão espectral de um complexo filtrado	75
A sucessão espectral de Serre	81
Extensões da sucessão espectral de Serre	91
Classes de Serre de grupos abelianos.	92
A sucessão espectral de cohomologia	97
Álgebras de Hopf	103
Grupos de homotopia de esferas	109
Mais aplicações	117
7. Teoria de obstrução	123
Sistemas de Moore-Postnikov	135
Formulação dual da Teoria de Obstrução	139
8. Fibrados, classes características e $K$ -teoria.	140
Definições e exemplos	140
Classificação de fibrados	150
A construção de Milnor	156

---

*Date:* 5th August 2005.

Classes características	159
A definição de $K$ -teoria	166
9. Sugestões de Leitura	170
References	170

## 1. INTRODUÇÃO

Duas aplicações contínuas  $f, g : X \rightarrow Y$  dizem-se *homotópicas* se existe uma aplicação contínua

$$H : X \times [0, 1] \rightarrow Y$$

tal que  $H(x, 0) = f(x)$  e  $H(x, 1) = g(x)$ . Esta relação de homotopia é uma relação de equivalência no conjunto das aplicações contínuas. É fácil verificar que a composição de funções está bem definida nas classes de homotopia. Isto permite a definição da *categoria de homotopia*<sup>1</sup> cujos objectos são os espaços topológicos e os morfismos as classes de homotopia de aplicações contínuas.

Numa primeira aproximação, pode dizer-se que a Teoria de Homotopia é o estudo da categoria de homotopia, e em particular o desenvolvimento de ferramentas de cálculo dos conjuntos

$$[X, Y]$$

de classes de homotopia de funções entre dois espaços  $X$  e  $Y$ .

Uma razão porque este estudo tem interesse é que as soluções de muitos problemas interessantes de outras áreas da Matemática (notavelmente problemas de classificação em Álgebra e Geometria) se reduzem ao cálculo de conjuntos de classes de homotopia.

Um bom exemplo é o da classificação de variedades diferenciáveis compactas a menos de cobordismo<sup>2</sup> que, por um famoso resultado de Thom [Th], se reduz ao cálculo dos grupos

$$[S^{n+k}, MO(k)]$$

para certos espaços  $MO(k)$  com  $k$  suficientemente grande. Foi esta redução que permitiu a classificação das variedades a menos de cobordismo. Outro exemplo nos mesmos moldes (mas com um nível de sofisticação bastante mais elevado) é o da classificação de variedades simplesmente conexas com curvatura escalar positiva por Stefan Stolz [St] (culminando trabalho de Gromov e Lawson).

Da mesma forma, muitos problemas de classificação em álgebra podem ser traduzidos em problemas de cálculo de classes de homotopia, um ponto de vista que se revela frequentemente proveitoso. Exemplos são a classificação de extensões e deformações de vários tipos de objectos algébricos. Um outro exemplo que, embora trivial, comunica de forma satisfatória a ubiquidade da noção de homotopia na Matemática, é o facto de a relação de conjugação entre homomorfismos de grupos (e, em particular, entre elementos de um grupo) poder ser vista de forma natural como uma relação de homotopia entre os homomorfismos em questão.

<sup>1</sup>Na realidade, o uso corrente deste termo não coincide com a definição que se segue, como veremos mais tarde. Este aspecto técnico pode ser ignorado de momento.

<sup>2</sup>Duas variedades  $M$  e  $N$  de dimensão  $n$  dizem-se cobordantes se existe uma variedade com bordo  $W$  de dimensão  $n + 1$  tal que  $\partial W = M \amalg N$

A Teoria de Homotopia pode ainda ser descrita como a álgebra dos espaços topológicos. O tipo de homotopia de um espaço é um objecto de cariz algébrico e combinatório. É ele a fonte de todos os outros invariantes algébricos que se costuma associar a espaços (grupos de homologia, homotopia, etc.) mas estes invariantes dão apenas uma pálida imagem do tipo de homotopia. A Teoria de Homotopia é o estudo da "álgebra" das operações que podem ser realizadas sobre os espaços e que são invariantes de homotopia.

O estudo da categoria de homotopia dos espaços topológicos é a origem da Teoria da Homotopia, mas é claro desde o trabalho de Quillen [Qu] (por sua vez baseado em trabalho anterior de Kan) há cerca de 40 anos que a Teoria de Homotopia é algo de muito mais geral, incluindo não só toda a Topologia Algébrica e Álgebra Homológica como partes de várias outras áreas da Matemática. Este ponto de vista abstracto tem contribuído grandemente para o desenvolvimento recente da Topologia Algébrica e a sua interacção com outras áreas da Matemática.

Apesar da importância desta perspectiva abstracta, parece-nos que é preferível ter alguma familiaridade com o exemplo dos espaços topológicos (que é de qualquer maneira o exemplo universal [Ho]) antes de estudar o assunto de forma abstracta, pelo que este curso lida quase exclusivamente com espaços topológicos. Como compromisso, tentaremos desenvolver em paralelo (principalmente nos exercícios) alguma da teoria de homotopia dos complexos em cadeia de módulos sobre um anel, um exemplo que já deve ser algo familiar do estudo prévio de Topologia Algébrica. Além da importância intrínseca deste exemplo, a sua simplicidade permite por sua vez iluminar alguns dos fenómenos fundamentais em teoria de homotopia.

Felizmente, nos últimos anos apareceram excelentes livros de texto sobre Teoria de Homotopia Abstracta ([Ho] e [Hi]) que recomendamos vivamente ao leitor interessado. Para uma primeira introdução recomendamos [DS].

Finalmente, para uma breve discussão da essência e estado actual da Teoria de Homotopia cuja eloquência e sabedoria seria difícil de superar recomendamos ao leitor o texto de Haynes Miller [Mi].

**História.** É usual datar [Wh] a origem da Teoria de Homotopia em 1930, com a descoberta que a aplicação de Hopf

$$S^3 \rightarrow S^2$$

(o quociente da esfera  $S^3 \subset \mathbb{C}^2$  pela acção diagonal de  $S^1$ ) não é homotópica a uma aplicação constante.

Depois de um período de grande expansão nos anos 50 e 60 possibilitado em parte pela introdução das sucessões espectrais, esta área passou por um período de relativo isolamento das outras áreas da Matemática nos anos 70 e 80 até que há cerca de 15 anos certos desenvolvimentos internos aliados a um reconhecimento do seu papel fundamental em outras áreas (por exemplo, o fenómeno de simetria espelho em geometria simpléctica e complexa; a teoria de homotopia motivica que permitiu a resolução de vários problemas em  $K$ -teoria algébrica e levou à atribuição da medalha Fields a Voevodsky em 2002; aplicações de teoria de homotopia a álgebra comutativa) levaram a uma aproximação desta área às áreas nucleares da Matemática...

**Pré-requisitos.** Assume-se familiaridade com os resultados básicos de topologia geral, com o grupo fundamental e teoria de revestimentos (ao nível do excelente

[Mu]) e um conhecimento básico de teoria de homologia e cohomologia (ao nível dos três primeiros capítulos de [Ha]). Além disso assume-se familiaridade com noções básicas de álgebra e a linguagem das categorias.

**Agradecimentos.** Muito obrigado ao Ricardo Joel Andrade, Thomas Baier, e Rui Carpentier por muitas correções e comentários úteis a estas notas.

## 2. PRELIMINARES

**Espaços Topológicos.** Escrevemos  $Y^X$  ou  $\text{Map}(X, Y)$  para o espaço das funções contínuas entre  $X$  e  $Y$  com a topologia compacta aberta. O seguinte resultado de topologia geral será usado frequentemente

**Proposição 2.1** ([Mu] Teorema 46.11). *Se  $Y$  é um espaço localmente compacto e Hausdorff, então uma aplicação  $F : X \times Y \rightarrow Z$  é contínua sse a aplicação adjunta  $\bar{F} : X \rightarrow Z^Y$  definida por*

$$\bar{F}(x)(y) = F(x, y)$$

*é contínua.*

No seguimento tenderemos a não distinguir na notação entre aplicações adjuntas. A proposição anterior explica porque podemos encarar uma homotopia  $H : X \times [0, 1] \rightarrow Y$  equivalentemente como uma aplicação  $H : X \rightarrow Y^{[0,1]}$ .

A proposição anterior diz que a aplicação

$$Z^{X \times Y} \rightarrow (Z^Y)^X$$

é uma bijecção se  $Y$  for localmente compacto e Hausdorff. Se além disso  $X$  é Hausdorff, é possível verificar que esta aplicação é um homeomorfismo. A conveniência de ter este último resultado sem restrições leva a que seja usual considerar em topologia algébrica uma categoria de espaços topológicos diferente da usual - a dos espaços compactamente gerados.

Um espaço  $X$  diz-se *compactamente gerado* se

- para cada aplicação  $f : K \rightarrow X$  com  $K$  compacto e Hausdorff,  $f(K) \subset X$  é fechado<sup>3</sup>,
- $F \subset X$  é fechado sse para cada  $f : K \rightarrow X$  com  $K$  compacto e Hausdorff,  $f^{-1}(F) \subset K$  é fechado.

Qualquer espaço pode ser substituído functorialmente por um espaço compactamente gerado sem que os invariantes usuais em topologia algébrica sejam afectados por esta substituição. O preço a pagar pelas boas propriedades desta categoria é que as construções usuais (produtos, quocientes, etc.) têm de ser modificadas. Ver [RF, Apêndice 1] e [Mc] para mais informação sobre espaços compactamente gerados.

**Complexos em cadeia.** Em alguns exemplos iremos considerar o seguinte análogo algébrico da categoria dos espaços topológicos.

<sup>3</sup>Esta condição é um enfraquecimento da condição Hausdorff. Pode ver-se que  $f(K)$  é necessariamente Hausdorff [Mc, Lema 2.1].

**Definição 2.2.** Um complexo em cadeia  $C_*$  de grupos abelianos consiste numa sucessão  $\{C_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$  de grupos abelianos e homomorfismos  $d_n : C_n \rightarrow C_{n-1}$  (chamados operadores de bordo) tais que  $d_n d_{n+1} = 0$ . Os elementos  $x \in C_n$  dizem-se os elementos de grau  $n$  de  $C_*$  e escrevemos  $|x| = n$ . O grupo dos ciclos de grau  $n$  é

$$Z_n(C_*) = \ker d_n$$

e o grupo dos bordos de grau  $n$  é

$$B_n(C_*) = \text{im } d_{n+1}$$

Os grupos de homologia de  $C_*$  são os grupos

$$H_n(C_*) = Z_n(C_*)/B_n(C_*).$$

Um morfismo (de grau 0)  $f : C_* \rightarrow D_*$  entre complexos em cadeia é uma sucessão  $f_n : C_n \rightarrow D_n$  de homomorfismos de grupos tais que  $f_{n-1} \circ d_n^C = d_n^D \circ f_n$ . Os morfismos entre dois complexos formam um grupo abeliano. Uma *homotopia em cadeia* entre  $f, g : C_* \rightarrow D_*$  é uma sucessão de homomorfismos de grupos

$$H_n : C_n \rightarrow D_{n+1}$$

tal que  $d_{n+1} H_n + H_{n-1} d_n = f_n - g_n$ . É fácil verificar que a relação de homotopia em cadeia é uma relação de equivalência entre morfismos e que dois morfismos homotópicos determinam aplicações iguais em homologia. Escrevemos

$$[C_*, D_*]$$

para o conjunto das classes de homotopia em cadeia.

**Exemplo 2.3.** Se  $X$  é um complexo CW, o *complexo celular de  $X$*  é o complexo em cadeia definido por

$$C_n = \begin{cases} H_n(X^n, X^{n-1}) & \text{se } n \geq 0 \\ 0 & \text{se } n < 0 \end{cases}$$

com o operador de bordo  $d_n$  definido pela composição

$$H_n(X^n, X^{n-1}) \xrightarrow{\partial} H_{n-1}(X^{n-1}) \longrightarrow H_{n-1}(X^{n-1}, X^{n-2}).$$

Escrevemos  $I_*$  para o complexo celular do intervalo  $[0, 1]$  com a estrutura celular usual. Explicitamente,  $I_*$  é o complexo

$$\dots \leftarrow 0 \leftarrow \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \leftarrow \mathbb{Z} \leftarrow 0 \leftarrow \dots$$

concentrado em dimensões 0 e 1 com

$$d_1(1) = (1, 0) - (0, 1).$$

**Definição 2.4.** O produto tensorial dos complexos  $C_*$  e  $D_*$  é o complexo  $C_* \otimes D_*$  com

$$(C_* \otimes D_*)_n = \bigoplus_{k+l=n} C_k \otimes D_l$$

com o diferencial definido por

$$d(x \otimes y) = d_C x \otimes y + (-1)^{|x|} x \otimes d_D y.$$

**Exemplo 2.5.** Se  $X$  e  $Y$  são complexos celulares com a estrutura celular produto<sup>4</sup> então

$$C_*(X \times Y) = C_*(X) \times C_*(Y)$$

**Exercício 2.6.** Verifique que há uma correspondência natural entre homotopias em cadeia de  $C_*$  para  $D_*$  e morfismos

$$C_* \otimes I_* \longrightarrow D_*$$

Tal como podemos definir um espaço topológico de aplicações entre espaços topológicos, podemos definir um complexo em cadeia de morfismos entre complexos em cadeia.

**Definição 2.7.** O complexo de morfismos entre dois complexos em cadeia  $C_*$  e  $D_*$  é o complexo  $\text{Hom}(C_*, D_*)$  com

$$\text{Hom}(C_*, D_*)_n = \prod_{k \in \mathbb{Z}} \text{Ab}(C_k, D_{k+n})$$

onde  $\text{Ab}(G, H)$  denota o grupo abeliano de homomorfismos entre os grupos abelianos  $G$  e  $H$ , com os operadores de bordo definidos pela fórmula

$$d_k f = d_D f + (-1)^{k+1} f d_C.$$

Com esta definição a adjunção análoga à da Proposição 2.1 é válida sem restrições:

**Proposição 2.8.** Dados complexos em cadeias  $A_*, B_*, C_*$ , há um isomorfismo natural

$$\text{Hom}(A_* \otimes B_*, C_*) = \text{Hom}(A_*, \text{Hom}(B_*, C_*)).$$

*Proof.* Exercício. □

**Exercício 2.9.** (a) Mostre que  $Z_0(\text{Hom}(C_*, D_*))$  é o grupo abeliano dos morfismos entre os complexos  $C_*$  e  $D_*$ .

(b) Mostre que  $H_0(\text{Hom}(C_*, D_*)) = [C_*, D_*]$ .

**Exercício 2.10.** Se  $G$  é um grupo abeliano, escrevemos  $\Sigma^n G$  para o complexo em cadeia que consiste no grupo  $G$  em dimensão  $n$  com todos os operadores de bordo 0. Seja  $X$  um complexo celular. Mostre que

$$H^n(X; G) = [C_*(X), \Sigma^n G].$$

### 3. FIBRAÇÕES E COFIBRAÇÕES

Uma estratégia básica para o cálculo dos conjuntos de homotopia  $[X, Y]$  é encaixá-los em "sucessões exactas" que os relacionam com outros conjuntos do mesmo tipo onde os espaços  $X$  ou  $Y$  são mais simples. Isto faz-se por meio de certas estruturas fundamentais da categoria da homotopia chamadas *sucessões de cofibrações e de fibrações*, que agora descrevemos. Nesta secção seguimos [Ma, Capítulos 6 a 9].

---

<sup>4</sup>A não ser que um dos factores tenha um número finito de células ou que ambos tenham um número contável de células, o produto usual  $X \times Y$  não é um complexo celular. No entanto o produto na categoria dos espaços compactamente gerados é um complexo celular.



**Exercício 3.5.** *Mostre que se  $A \rightarrow X$  é uma cofibração e  $A$  é contráctil, então a aplicação quociente  $X \rightarrow X/A$  é uma equivalência de homotopia.*

Notemos que na definição de cofibração (1), há uma escolha universal para  $Y$ . Nomeadamente  $i : A \rightarrow X$  é uma cofibração sse a propriedade da extensão das homotopias (1) se verifica para o caso particular em que  $Y$  denota o pushout

$$Y = A \times [0, 1] \coprod_{A \times \{0\}} X$$

e  $f : X = X \times \{0\} \rightarrow Y$  e  $H : A \times [0, 1] \rightarrow Y$  designam as aplicações canónicas. Isto é uma consequência da propriedade universal do pushout que o leitor deve verificar.

**Exercício 3.6.** *Mostre que uma cofibração  $i : A \rightarrow X$  é necessariamente um mergulho e que, se  $X$  é Hausdorff,  $i$  é uma aplicação fechada.*

Pelo exercício anterior, toda a cofibração é uma inclusão de um subespaço (fechado se o codomínio é Hausdorff). Dado um par de espaços  $(X, A)$  com  $A$  fechado em  $X$  há uma caracterização muito útil das inclusões que são cofibrações.

**Definição 3.7.** *Um par  $(X, A)$  diz-se um par NDR<sup>7</sup> se existe uma função contínua  $u : X \rightarrow [0, 1]$  com  $A = u^{-1}(0)$  e uma deformação*

$$H : X \times [0, 1] \rightarrow X$$

tal que  $H(x, 0) = x$ ,  $H(a, t) = a$  para  $a \in A$ , e  $H(x, 1) \in A$  para  $u(x) < 1$ .

A definição anterior diz que a vizinhança  $u^{-1}([0, 1])$  de  $A$  se deforma em  $A$  mas não que esta vizinhança se retrai por deformação em  $A$  uma vez que não se requer que a homotopia preserve a vizinhança<sup>8</sup>. Note-se que podemos escolher  $u$  de tal forma que  $u(x) < 1$  para todo o  $x$  sse  $A$  é um retrato por deformação de  $X$ .

**Exercício 3.8.** *Se  $X$  é um complexo CW e  $A$  é um subcomplexo, então  $(X, A)$  é um par NDR.*

**Exercício 3.9.** *Se  $(X, A)$  é um par NDR e  $Y$  é compacto, então  $(X^Y, A^Y)$  é um par NDR.*

**Proposição 3.10.** *Se  $(X, A)$  e  $(Y, B)$  são pares NDR, então  $(X \times Y, X \times B \cup A \times Y)$  é um par NDR.*

*Proof.* Sejam  $u : X \rightarrow [0, 1]$  e  $v : Y \rightarrow [0, 1]$ ,  $H : X \times [0, 1] \rightarrow X$ ,  $K : Y \times [0, 1] \rightarrow Y$  como na Definição 3.7. Definimos  $w : X \times Y \rightarrow [0, 1]$  por

$$w(x, y) = \min\{u(x), v(y)\}$$

e  $L : X \times Y \times [0, 1] \rightarrow X \times Y$  por

$$L(x, y, t) = \begin{cases} \left( H(x, t), K\left(y, t \frac{u(x)}{v(y)}\right) \right) & \text{se } u(x) \leq v(y) \\ \left( H\left(x, t \frac{v(y)}{u(x)}\right), K(y, t) \right) & \text{se } v(y) \leq u(x) \end{cases}$$

onde se entende que as fracções designam 1 no caso em que o denominador (e portanto também o numerador) se anula. A continuidade de  $L$  só não é clara nos pontos onde  $u(x)$  e  $v(y)$  se anulam, mas é fácil ver que nesses pontos a continuidade

<sup>7</sup>NDR é a abreviatura de *neighborhood deformation retract*.

<sup>8</sup>No entanto, se  $X$  é normal, existe de facto uma vizinhança de  $A$  que se retrai por deformação em  $A$  (ver [Du, Teorema XV.7.4]).



é uma consequência de termos  $H(a, t) = a$  e  $K(b, t) = b$  para todo o  $t \in [0, 1]$ . Claramente  $w^{-1}(0) = X \times B \cup A \times Y$  e temos  $w(x, y) < 1 \implies L(x, y, 1) \in X \times B \cup A \times Y$  o que conclui a demonstração.  $\square$

**Proposição 3.11.** *Seja  $(X, A)$  um par de espaços com  $A$  fechado. As seguintes condições são equivalentes:*

- (i)  $(X, A)$  é um par NDR.
- (ii)  $X \times \{0\} \cup A \times [0, 1]$  é um retrato por deformação de  $X \times [0, 1]$ .
- (iii) Existe uma retracção de  $X \times [0, 1]$  em  $X \times \{0\} \cup A \times [0, 1]$ .
- (iv) A inclusão  $i : A \rightarrow X$  é uma cofibração.

*Proof.* (i) implica (ii) pela Proposição 3.10. De facto, para o par  $([0, 1], \{0\})$  podemos tomar  $u(t) = t/2$  na Definição 3.7. A função  $w$  na demonstração de 3.10 é então sempre  $< 1$  e portanto o produto dos pares  $(X, A)$  e  $([0, 1], \{0\})$  é a inclusão de um retrato por deformação.

Claramente (ii) implica (iii).

Se  $r : X \times [0, 1] \rightarrow X \times \{0\} \cup A \times [0, 1]$  é uma retracção, então dados  $f, H$  como na Definição 3.2 temos que

$$(f \coprod_A H) \circ r : X \times [0, 1] \rightarrow Y$$

é uma extensão da homotopia  $H$ , pelo que (iii) implica (iv). Por outro lado, tomando  $Y = X \times \{0\} \coprod A \times [0, 1]$  e para  $f, H$  as aplicações canónicas vemos que  $\tilde{H}(-, 1)$  é uma retracção de  $X \times [0, 1]$  em  $Y$  pelo que (iv) implica (iii).

Finalmente vejamos que (iii) implica (i): dada uma retracção

$$r : X \times [0, 1] \rightarrow X \times \{0\} \cup A \times [0, 1]$$

e designando as projecções de  $X \times [0, 1]$  por  $\pi_1$  e  $\pi_2$ , podemos tomar na Definição 3.7,

$$H(x, t) = \pi_1 r(x, t)$$

e

$$u(x) = \max\{t - \pi_2 r(x, t) : t \in [0, 1]\}$$

De facto,  $u$  é contínua pela compacidade de  $[0, 1]$  e  $u(x) = 1$  sse  $r(x, 1) \in X \times \{0\}$  pelo que  $u(x) < 1 \implies H(x, 1) \in A$ . Claramente,  $u(x) \geq 0$  uma vez que  $r(x, 0) = (x, 0)$ , e se  $u(x) = 0$  então  $r(x, t) \in A \times [0, 1]$  para cada  $t > 0$  e portanto  $r(x, 0) = (x, 0) \in A \times \{0\}$ .  $\square$

**Exercício 3.12.** *Dê um exemplo de uma inclusão de um subespaço fechado que não seja uma cofibração.*

Pelo preço de substituir o contradomínio por um espaço homotopicamente equivalente, qualquer aplicação  $f : X \rightarrow Y$  pode ser substituída por uma cofibração usando a construção do cilindro da aplicação  $f$ . De facto se denotarmos por

$$i : X = X \times \{0\} \rightarrow M_f = X \times [0, 1] \coprod_{X \times \{1\}} Y$$

a inclusão de  $X$  em  $M_f$  e por  $\pi : M_f \rightarrow Y$  a aplicação definida por  $\pi(x, t) = f(x)$ ,  $\pi(y) = y$ , o seguinte diagrama

$$(2) \quad \begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{i} & M_f \\ & \searrow f & \downarrow \pi \\ & & Y \end{array}$$

comuta, e  $\pi$  é uma equivalência de homotopia (na realidade a retracção de um retrato por deformação).

Se  $f$  é uma cofibração então a aplicação  $\pi$  em (2) é mais do que uma simples equivalência de homotopia. É uma *equivalência de homotopia sob A* no sentido seguinte:

Dado um espaço  $A$ , a categoria dos *espaços sob A* é a categoria cujos objectos são aplicações

$$i : A \rightarrow X$$

e cujos morfismos são aplicações  $f : X \rightarrow Y$  tais que o diagrama

$$\begin{array}{ccc} A & & \\ \downarrow i & \searrow j & \\ X & \xrightarrow{f} & Y \end{array}$$

comuta. Duas aplicações sob  $A$ ,  $f, f' : X \rightarrow Y$  dizem-se homotópicas sob  $A$  se existe uma homotopia  $H : X \times [0, 1] \rightarrow Y$  entre  $f$  e  $f'$  tal que  $H(i(a), t) = j(a)$ . Com esta definição de homotopia podemos definir a categoria de homotopia sob  $A$  da forma óbvia. Uma equivalência de homotopia sob  $A$  chama-se também uma *equivalência de homotopia cofibrada*. O seguinte exercício mostra que o tipo de homotopia da cofibra de uma aplicação é invariante mediante equivalências de homotopia cofibradas.

- Exercício 3.13.** (a) *Mostre que uma equivalência de homotopia de pares  $f : (X, A) \rightarrow (Y, B)$  induz uma equivalência de homotopia  $\bar{f} : X/A \rightarrow Y/B$ .*  
 (b) *Conclua que se  $i : A \rightarrow X$  e  $j : A \rightarrow Y$  são espaços sob  $A$  e  $f : X \rightarrow Y$  é uma equivalência de homotopia cofibrada, então  $f$  induz uma equivalência de homotopia entre as cofibras de  $i$  e  $j$ .*

- Proposição 3.14.** (a) *Sejam  $i : A \rightarrow X$  e  $j : A \rightarrow Y$  cofibrações. Se  $f : X \rightarrow Y$  é uma aplicação sob  $A$  e uma equivalência de homotopia, então  $f$  é uma equivalência de homotopia cofibrada.*  
 (b) *Sejam  $i : A \rightarrow X$  e  $j : B \rightarrow Y$  cofibrações. Se as aplicações  $f, g$  no diagrama comutativo*

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{g} & B \\ \downarrow i & & \downarrow j \\ X & \xrightarrow{f} & Y \end{array}$$

*são equivalências de homotopia, então  $(f, g)$  é uma equivalência de homotopia de pares.*

*Proof.* (a) Basta-nos mostrar que para cada  $f$  nas condições do enunciado existe uma aplicação sob  $A$ ,  $g : Y \rightarrow X$  tal que  $g \circ f \simeq_A \text{id}_X$ , isto é, tal que  $g$  é um inverso de homotopia sob  $A$  à esquerda para  $f$ . De facto, se tal é verdade podemos aplicar o resultado a  $g$  para obter um inverso à esquerda sob  $A$ ,  $f'$  para  $g$  e então a equação

$$f' \simeq_A f' \circ g \circ f \simeq_A f$$

mostra que  $f'$  é homotópico a  $f$  sob  $A$  e portanto que  $g$  é também um inverso de homotopia sob  $A$  à direita para  $f$ .

Como  $f$  é uma equivalência de homotopia, existe  $h : Y \rightarrow X$  tal que  $h \circ f \simeq \text{id}_X$ . Isto implica que  $h \circ j \simeq i$ , e estendendo a  $X$  uma homotopia entre  $h \circ j$  e  $i$  obtemos uma aplicação  $h' : X \rightarrow X$  tal que  $h' \simeq h$  (e portanto  $h' \circ f \simeq \text{id}_X$ ) e  $h' \circ j = i$ . Basta-nos agora determinar  $e : X \rightarrow X$  sob  $A$  tal que  $e \circ (h' \circ f) \simeq_A \text{id}_X$  uma vez que esta equação mostra que  $g = e \circ h'$  é o inverso à esquerda que procuramos.

Estamos portanto reduzidos ao caso em que  $Y = X, j = i$ , e  $f \simeq \text{id}_X$ . A essência da demonstração é a maneira como a propriedade da extensão das homotopias determina um inverso à esquerda sob  $A$  para um tal  $f$ . Seja  $H : X \times [0, 1] \rightarrow X$  uma homotopia entre  $f$  e  $\text{id}_X$ . A restrição  $H|_{A \times [0, 1]} : A \times [0, 1] \rightarrow X$  determina um laço  $[0, 1] \rightarrow X^A$  baseado em  $\text{id}_A$ <sup>9</sup>. Se este laço fosse contráctil, e  $K : A \times [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow X$  fosse uma nul-homotopia, poderíamos aplicar a propriedade de extensão das homotopias ao par  $(X \times [0, 1], A \times [0, 1])$  e à homotopia original  $H : X \times [0, 1] \times \{0\} \rightarrow X$  entre  $f$  e  $\text{id}_X$  para obter uma homotopia relativa a  $A$  entre  $f$  e  $\text{id}_X$  (percorrendo a fronteira de  $[0, 1] \times [0, 1]$  entre  $(0, 0)$  e  $(1, 0)$  ao longo dos três segmentos que não  $[0, 1] \times \{0\}$ ).

Em geral o caminho  $H|_{A \times [0, 1]}$  não será contráctil. Podemos no entanto aplicar a propriedade da extensão das homotopias a  $H|_{A \times [0, 1]}$  e a  $\text{id}_X$  para obter uma aplicação  $e : X \rightarrow X$  com  $e|_A = i$ , e uma homotopia  $K : X \times [0, 1] \rightarrow X$  entre  $\text{id}_X$  e  $e$ . Este  $e$  é o inverso de homotopia que procuramos. De facto, se concatenarmos a homotopia  $K(f(x), 1 - t)$  com  $H$  obtemos uma homotopia entre  $e \circ f$  e  $\text{id}_X$  tal que a restrição a  $A \times [0, 1]$  corresponde a um caminho contráctil em  $X^A$  (como  $f|_A = i$  trata-se de um caminho seguido do seu inverso) e podemos aplicar o argumento anterior para obter uma homotopia relativa a  $A$  entre  $e \circ f$  e  $\text{id}_X$  concluindo a demonstração.

(b) Exercício (ou ver [Ma, p. 47]).

□

Como vimos em (2) qualquer aplicação  $f : X \rightarrow Y$  pode ser substituída por uma cofibração

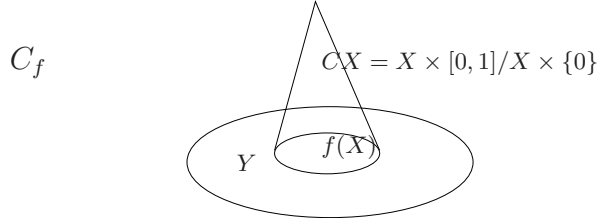
$$X \xrightarrow{i} M_f$$

Se  $f$  é uma cofibração, a cofibra de  $f$  e de  $i$  têm o mesmo tipo de homotopia (pela Proposição 3.14 e Exercício 3.13). Quando  $f$  não é uma cofibração, é a cofibra da aplicação  $i$  que corresponde ao "co-núcleo de  $f$ " (conforme o Exercício 3.16)

<sup>9</sup>Embora, com as nossas convenções, o recíproco só seja verdade se  $A$  é localmente compacto e Hausdorff. No resto da demonstração vamos ignorar a não validade desta correspondência uma vez que é claro como escrever as fórmulas para as homotopias pretendidas sem nunca falar de caminhos em espaços de funções.

**Definição 3.15.** A cofibra de homotopia, ou cone da aplicação  $f : X \rightarrow Y$  define-se pela equação

$$C_f = \left( (X \times [0, 1]) \coprod_X Y \right) / X \times \{0\}$$



**Exercício 3.16.** (a) Mostre que, escrevendo  $j : Y \rightarrow C_f$  para a inclusão canónica, existe uma sucessão exacta longa de homologia

$$\cdots \rightarrow H_k(X) \xrightarrow{f_*} H_k(Y) \xrightarrow{j_*} \overline{H}_k(C_f) \xrightarrow{\partial} H_{k-1}(X) \rightarrow \cdots$$

(b) Mostre que se  $A \rightarrow X$  é uma cofibração então  $H_*(X, A) = \overline{H}_*(X/A)$ .

A cofibra de homotopia tem a seguinte propriedade universal que é uma consequência directa da definição:

**Proposição 3.17.** Se  $f : X \rightarrow Y$  é uma aplicação, dar uma aplicação  $g : C_f \rightarrow Z$  equivale a dar

- Uma aplicação  $h : Y \rightarrow Z$ ,
- Uma homotopia entre  $h \circ f$  e uma aplicação constante  $X \rightarrow Z$ .

Esta caracterização das aplicações a partir de uma cofibra traduz-se no facto de a sucessão de conjuntos de classes de homotopia

$$(3) \quad [X, Z] \xleftarrow{f^*} [Y, Z] \xleftarrow{j^*} [C_f, Z]$$

ser *exacta* no sentido em que dada  $h : Y \rightarrow Z$ , temos  $f^*([h])$  é a classe de uma aplicação constante sse  $[h]$  está na imagem da restrição  $j^*$ .

Recorde-se que a *suspensão* de um espaço  $X$  é definida pela fórmula

$$\Sigma X \cong (X \times [0, 1]) / \sim$$

onde  $\sim$  é a relação de equivalência gerada por  $(x, 0) \sim (x', 0)$  e  $(x, 1) \sim (x', 1)$  para todos os  $x, x' \in X$ . Esta operação define um functor da categoria dos espaços nela própria da forma evidente. Escrevemos  $-\Sigma f : \Sigma X \rightarrow \Sigma Y$  para a aplicação

$$-\Sigma f[(x, t)] = [(f(x), 1 - t)].$$

Há uma equivalência de homotopia natural

$$C_j \xrightarrow{\pi} \Sigma X$$

dada pelo colapso do subespaço contráctil (cf. Exercício 3.5)  $CY = (Y \times [0, 1]) / (Y \times \{0\}) \subset C_j$ , e portanto denotando por  $d : C_f \rightarrow C_j$  a inclusão natural, colapsando o subespaço contráctil  $CC_f \subset C_d$ , temos uma equivalência

$$C_d \xrightarrow{\pi} \Sigma Y.$$

**Exercício 3.18.** Mostre que, denotando por  $l : C_j \rightarrow C_d$  a inclusão natural, o seguinte diagrama comuta na categoria de homotopia

$$\begin{array}{ccc} C_j & \xrightarrow{l} & C_d \\ \downarrow \pi & & \downarrow \pi \\ \Sigma X & \xrightarrow{-\Sigma f} & \Sigma Y \end{array}$$

**Exercício 3.19.** Mostre que há um homeomorfismo natural<sup>10</sup>

$$\Sigma C_f \simeq C_{\Sigma f}.$$

Estes exercícios mostram que, calculando sucessivamente as cofibras de homotopia das aplicações obtidas pelo procedimento anterior obtemos a seguinte sucessão infinita de espaços e aplicações que desempenha um papel fundamental em teoria de homotopia.

**Definição 3.20.** A sucessão de cofibração associada à aplicação  $f : X \rightarrow Y$  é a sucessão de espaços

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{j} C_f \xrightarrow{\pi} \Sigma X \xrightarrow{-\Sigma f} \Sigma Y \xrightarrow{-\Sigma j} \Sigma C_f \xrightarrow{-\Sigma \pi} \Sigma^2 X \xrightarrow{\Sigma^2 f} \Sigma^2 Y \rightarrow \dots$$

Tal como em (3) considerando aplicações para um conjunto  $Z$  produz uma sucessão exacta longa de conjuntos de homotopia associada à aplicação  $f$ . Veremos em breve que, a partir do terceiro, estes conjuntos têm uma estrutura multiplicativa que permite dar um sentido mais forte à "exactidão da sucessão".

**Exercício 3.21.** Mostre que se  $f, g : X \rightarrow Y$  são aplicações homotópicas, então as cofibras de homotopia são homotópicamente equivalentes.

**Exercício 3.22.** Mostre que  $f : X \rightarrow Y$  é uma equivalência de homotopia sse  $M_f$  se retraindo por deformação em  $X \times \{0\}$ .

**Fibrações.** A fibra de uma aplicação  $f : X \rightarrow Y$  sobre  $y \in Y$  é o subespaço  $f^{-1}(y) \subset X$ . A operação de tomar a fibra de uma aplicação pode ser interpretada como o cálculo do "núcleo" da aplicação. É fácil ver que esta operação não interage de forma satisfatória com a relação de homotopia (dê um exemplo!).

**Definição 3.23.** Diz-se que uma aplicação  $p : E \rightarrow B$  é uma fibração, ou que tem a propriedade do levantamento das homotopias se em todo o diagrama comutativo

$$(4) \quad \begin{array}{ccc} X \times \{0\} & \xrightarrow{f} & E \\ \downarrow & \nearrow \tilde{H} & \downarrow p \\ X \times [0, 1] & \xrightarrow{H} & B \end{array}$$

existe o levantamento  $\tilde{H}$ .

Esta definição diz que a operação de projecção  $p : E \rightarrow B$  interage de forma satisfatória com a noção de homotopia. A definição tem como corolário imediato o seguinte resultado.

<sup>10</sup>Deve notar-se que este homeomorfismo troca as coordenadas do cone e da suspensão e portanto quando se escolhem geradores para a homologia de forma consistente, este homeomorfismo induz o simétrico da aplicação identidade em homologia.

**Lema 3.24.** (i) A composição de duas fibrações é uma fibração.  
(ii) Se  $p : E \rightarrow B$  é uma fibração e  $g : A \rightarrow B$  é uma aplicação contínua, então o pullback  $g^*p : A \times_B E \rightarrow A$  é uma fibração.

Há vários exemplos já familiares de fibrações. A verificação da propriedade do levantamento das homotopias é muito simples e deixa-se como exercício.

**Exemplo 3.25.** (i) A projecção  $\pi_1 : B \times F \rightarrow B$  é uma fibração.  
(ii) Se  $p : E \rightarrow B$  é um revestimento, então  $p$  é uma fibração.  
(iii) A aplicação  $X^{[0,1]} \rightarrow X$  determinada pela avaliação em  $t = 0$  é uma fibração, chamada a *fibração dos caminhos*.<sup>11</sup>

A seguinte relação entre as noções de cofibração e fibração é absolutamente fundamental:

**Proposição 3.26.** Se  $i : A \rightarrow X$  é uma cofibração e  $X$  é localmente compacto e Hausdorff, a aplicação

$$Y^i : Y^X \rightarrow Y^A$$

é uma fibração.

*Proof.* Se  $X$  é Hausdorff,  $A$  é necessariamente um subespaço fechado de  $X$  e portanto localmente compacto e Hausdorff. Usando a Proposição 2.1 podemos escrever a propriedade do levantamento das homotopias para a aplicação de restrição

$$\begin{array}{ccc} Z & \longrightarrow & Y^X \\ \downarrow & & \downarrow Y^i \\ Z \times [0, 1] & \xrightarrow{H} & Y^A \end{array}$$

na forma adjunta

$$\begin{array}{ccc} Z \times A & \xrightarrow{\quad} & Z \times X \\ \downarrow & & \downarrow \\ Z \times A \times [0, 1] & \xrightarrow{\quad} & Y \\ & \nearrow & \searrow \\ & Z \times X \times [0, 1] & \end{array}$$

que é a propriedade da extensão das homotopias para  $Z \times i : Z \times A \rightarrow Z \times X$ . O resultado pretendido é portanto uma consequência da Proposição 3.10 aplicada aos pares  $(Z, \emptyset)$  e  $(X, A)$ .  $\square$

Note-se que a demonstração anterior consiste numa utilização formal da adjunção 2.1. Se utilizarmos uma categoria adequada de espaços topológicos, o resultado da proposição anterior é válido sem qualquer restrições na topologia de  $X$ .

Tal como no caso das cofibrações é útil formular a propriedade (4) de forma dual: uma aplicação  $p : E \rightarrow B$  é uma fibração sse podemos encontrar uma aplicação a

<sup>11</sup> É fácil convencer-mo-nos que ao contrário dos dois exemplos anteriores, esta aplicação não é localmente homeomorfa a um produto com um aberto da base.

tracedado fazendo o seguinte diagrama comutativo (no qual as aplicações verticais são as aplicações de avaliação em  $t = 0$ )

$$\begin{array}{ccc}
 B^{[0,1]} & \xleftarrow{p^{[0,1]}} & E^{[0,1]} \\
 \downarrow & \swarrow H & \nearrow \tilde{H} \\
 & A & \\
 \downarrow & \searrow f & \downarrow \\
 B & \xleftarrow{p} & E
 \end{array}$$

Tal como antes, conclui-se desta formulação que há uma escolha universal para o espaço de teste  $A$  e as aplicações  $f$  e  $H$ :

$$A = E \times_B B^{[0,1]} = \{(e, \alpha) : \alpha(0) = p(e)\}, \quad f = \pi_1|_A, \quad H = \pi_2|_A$$

Neste caso universal, o levantamento da homotopia  $\tilde{H}$  designa-se uma *aplicação de levantamento* e portanto temos o seguinte resultado

**Lema 3.27.** *Uma aplicação  $p : E \rightarrow B$  é uma fibração sse existe uma aplicação*

$$\Lambda : E \times_B B^{[0,1]} \rightarrow E^{[0,1]}$$

*tal que  $\Lambda(e, \alpha)(0) = e$  e  $p(\Lambda(e, \alpha)(t)) = \alpha(t)$ .*

Em breve ser-nos-á útil uma ligeira generalização deste conceito. Considere-se a aplicação de avaliação  $B^{[0,1]} \times [0, 1] \rightarrow B$ .

**Definição 3.28.** *Seja  $p : E \rightarrow B$  uma aplicação contínua. Uma aplicação*

$$\Lambda : E \times_B (B^{[0,1]} \times [0, 1]) \rightarrow E^{[0,1]}$$

*diz-se uma aplicação de levantamento estendida para  $p$  se  $\Lambda(e, \alpha, s)(s) = e$  e  $p(\Lambda(e, \alpha, s)(t)) = \alpha(t)$ .*

**Lema 3.29.** *Uma aplicação  $p : E \rightarrow B$  é uma fibração sse tem uma aplicação de levantamento estendida.*

*Proof.* A restrição de uma aplicação de levantamento estendida a  $E \times_B (B^{[0,1]} \times \{0\})$  é uma aplicação de levantamento no sentido usual. Por outro lado, se  $\Lambda : E \times_B B^{[0,1]} \rightarrow E^{[0,1]}$  é uma aplicação de levantamento, podemos definir

$$\tilde{\Lambda} : E \times_B (B^{[0,1]} \times [0, 1]) \rightarrow E^{[0,1]}$$

usando a aplicação  $\Lambda$  para levantar o caminho  $\alpha$  a partir de  $e$  até  $t = 1$ , e para trás, a partir de  $e$ , até  $t = 0$ . De facto, se escrevermos  $\alpha_s$  para o caminho

$$\alpha_s(t) = \begin{cases} \alpha(t+s) & \text{se } t \leq 1-s \\ \alpha(1) & \text{se } t > 1-s \end{cases}$$

e

$$\bar{\alpha}_s(t) = \begin{cases} \alpha(s-t) & \text{se } t \leq s \\ \alpha(0) & \text{se } t > s \end{cases}$$

então definindo

$$\tilde{\Lambda}(e, \alpha, s)(t) = \begin{cases} \Lambda(\alpha_s, e)(t-s) & \text{se } t \geq s \\ \Lambda(\bar{\alpha}_s, e)(s-t) & \text{se } t < s \end{cases}$$

é fácil verificar que  $\tilde{\Lambda}$  é uma aplicação de levantamento estendida para  $p$ .  $\square$

Vamos agora demonstrar (seguindo [Du, Teorema XX.3.2]) que a propriedade de ser uma fibração é uma *propriedade local*. Isto é, que uma aplicação que se restringe a uma fibração sobre cada um dos abertos de uma cobertura da base é ainda uma fibração (desde que o espaço de base seja paracompacto). Para isso precisamos de alguns preliminares de Topologia Geral.

**Definição 3.30.** *Uma cobertura  $\mathcal{U}$  de  $X$  diz-se localmente finita se para todo  $x \in X$  existe um aberto  $V$  contendo  $x$  que intersecta apenas um número finito de abertos de  $\mathcal{U}$ . Um conjunto aberto  $V \subset X$  diz-se um conjunto co-zero se existe uma aplicação contínua  $\phi : X \rightarrow [0, 1]$  tal que  $\phi^{-1}(]0, 1]) = V$ . Uma cobertura aberta  $\mathcal{U}$  de  $X$  diz-se enumerável se é uma cobertura localmente finita por conjuntos co-zero.*

Recorde-se que um espaço se diz *paracompacto* se toda a cobertura aberta admite um refinamento localmente finito. Se  $X$  é paracompacto e Hausdorff, então  $X$  é normal [Mu, Teorema 41.1] e é fácil ver que então toda a cobertura aberta de  $X$  admite um refinamento enumerável.

**Exemplo 3.31.** Um complexo celular é um espaço paracompacto e Hausdorff (ver [RF, Teorema 1.3.5] ou [Ha2, Proposição 1.20]).

**Lema 3.32.** (a) *Uma intersecção finita de conjuntos co-zero é um conjunto co-zero.*

(b) *A união de uma família localmente finita de conjuntos co-zero é um conjunto co-zero.*

(c) *Se  $J \subset [0, 1]$  é fechado e  $U \subset X$  é um conjunto co-zero, o conjunto  $S(J, U) = \{f \in X^{[0,1]} : f(J) \subset U\}$  é um conjunto co-zero.*

(d) *Se  $\mathcal{U}$  é uma cobertura de  $X$  por conjuntos co-zero e  $\mathcal{U} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{U}_n$  com  $\mathcal{U}_n$  famílias localmente finitas, então  $\mathcal{U}$  admite um refinamento enumerável.*

*Proof.* (a) Se  $c_k : X \rightarrow [0, 1]$  são tais que  $c_k^{-1}(]0, 1]) = U_k$  tome-se

$$c(x) = \min\{c_1(x), \dots, c_n(x)\}.$$

(b) Dada uma família localmente finita  $\{U_\alpha\}$ ,  $c(x) = \max\{c_\alpha(x)\}$  é contínua e  $c^{-1}(]0, 1]) = \bigcup_\alpha U_\alpha$ .

(c) Se  $c^{-1}(]0, 1]) = U$ , então a aplicação  $\bar{c} : X^{[0,1]} \rightarrow [0, 1]$  definida por  $\bar{c}(\alpha) = \min_{t \in J} c(\alpha(t))$  é contínua e satisfaz  $\bar{c}^{-1}(]0, 1]) = S(J, U)$ .

(d) Seja  $W_n = \bigcup \mathcal{U}_n$ . Pela parte (b), existe  $c_n : X \rightarrow [0, 1]$  com  $c_n^{-1}(]0, 1]) = W_n$ . Tome-se  $W'_n = \{x \in W_n : c_i(x) < 1/n, i = 1, \dots, n-1\}$ . Então  $W'_n$  é um conjunto co-zero e  $\{W'_n\}$  é uma cobertura localmente finita.  $\{\mathcal{U}_n \cap W'_n : n \in \mathbb{N}\}$  é o refinamento desejado. □

**Teorema 3.33** (Hurewicz). *Seja  $p : E \rightarrow B$  uma aplicação contínua. Se existe uma cobertura enumerável  $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}$  de  $B$  tal que  $p : p^{-1}(U_\alpha) \rightarrow U_\alpha$  é uma fibração para cada  $\alpha$ , então  $p$  é uma fibração.*

*Proof.* Seja  $\{U_\alpha\}$  uma cobertura de  $B$  satisfazendo as condições do enunciado e

$$\Lambda_\alpha : p^{-1}(U_\alpha) \times_{U_\alpha} (U_\alpha^{[0,1]} \times [0, 1]) \rightarrow E^{[0,1]}$$

aplicações de levantamento estendidas para  $p : p^{-1}(U_\alpha) \rightarrow U_\alpha$ . Para cada  $n$ -tuplo de índices  $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$  seja  $W_{\alpha_1, \dots, \alpha_n} = S([0, 1/n], U_{\alpha_1}) \cap \dots \cap S([(n-1)/n, 1], U_{\alpha_n})$ . Pelo Lema 3.32(a) e (c) estes conjuntos são co-zero. Como  $[0, 1]$  é compacto, a imagem de cada  $\alpha \in B^{[0,1]}$  intersecta apenas um número finito de abertos  $U_\alpha$  pelo



que  $\mathcal{U}_n = \{W_{\alpha_1, \dots, \alpha_n}\}$  é uma família localmente finita (mas infelizmente não uma cobertura). A cobertura  $\mathcal{U} = \cup \mathcal{U}_n$  de  $B^{[0,1]}$  está portanto nas condições do Lema 3.32(d) e portanto podemos escolher um refinamento enumerável  $\{V_\mu\}$  para  $\mathcal{U}$ .

Vamos agora definir aplicações de levantamento estendidas locais

$$\Lambda_\mu : E \times (B^{[0,1]} \times [0, 1]) \cap E \times V_\mu \times [0, 1] \rightarrow E^{[0,1]}$$

Para cada  $\mu$ , escolha-se  $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$  tais que  $V_\mu \subset W_{\alpha_1, \dots, \alpha_n}$ . Dado  $(e, \alpha, t)$  no domínio de  $\Lambda_\mu$  tome-se  $k$  tal que  $t \in [(k-1)/n, k/n]$ . Seja  $\alpha_j$  o prolongamento por caminhos constantes de  $\alpha_{|(j-1)/n, j/n]}$  ao intervalo  $[0, 1]$ . Podemos definir  $\beta = \Lambda_\mu(e, \alpha, t)$  indutivamente da seguinte forma

$$\beta(s) = \begin{cases} \Lambda_{\beta_k}(e, \alpha_k, t)(s) & \text{se } (k-1)/n \leq t \leq k/n \\ \Lambda_{\beta_{k-1}}(\Lambda_{\beta_k}(e, \alpha_k, t)((k-1)/n), \alpha_{k-1}, (k-1)/n)(s) & \text{se } (k-2)/n \leq t \leq (k-1)/n \\ \Lambda_{\beta_{k+1}}(\Lambda_{\beta_k}(e, \alpha_k, t)(k/n), \alpha_{k+1}, k/n)(s) & \text{se } k/n \leq t \leq (k+1)/n \\ \dots & \end{cases}$$

É fácil verificar que esta aplicação é contínua, e por definição satisfaz as equações requeridas de uma aplicação de levantamento. No entanto, se  $W_\mu \cap W_{\mu'} \neq \emptyset$  não temos garantia que  $\Lambda_\mu$  e  $\Lambda_{\mu'}$  estejam de acordo na intersecção e portanto não temos ainda uma aplicação de levantamento globalmente definida. Este problema resolve-se utilizando uma partição da unidade para a cobertura  $\{W_\mu\}$ .

Seja  $c_\mu : B^{[0,1]} \rightarrow [0, 1]$  tais que  $c_\mu^{-1}([0, 1]) = W_\mu$  e

$$\sum_{\mu} c_\mu(\alpha) = 1$$

para todo o  $\alpha \in B^{[0,1]}$ . Escolhamos uma ordem total para o conjunto dos índices  $\{\mu\}$  e uma cobertura de  $B^{[0,1]}$  por abertos  $\{U\}$  tais que cada aberto  $U$  intersecta apenas um número finito de abertos  $W_{\mu_1}, \dots, W_{\mu_k}$  com  $\mu_1 < \dots < \mu_k$ . Definimos funções  $t_i : U \rightarrow [0, 1]$  para  $i = 1, \dots, k$  por

$$t_i(\alpha) = c_{\mu_1}(\alpha) + \dots + c_{\mu_i}(\alpha)$$

de forma que  $t_k(\alpha) = 1$  para todo o  $\alpha \in U$ . Definimos em  $U$  uma nova função de levantamento

$$\Lambda_U : E \times_B B^{[0,1]} \cap E \times U \rightarrow E^{[0,1]}$$

que combina todas as funções dos abertos  $\Lambda_{\mu_i}$  da seguinte forma

$$\Lambda_U(e, \alpha)(t) = \begin{cases} \Lambda_{\mu_1}(e, \alpha, 0)(t) & \text{se } 0 \leq t \leq t_1(\alpha) \\ \Lambda_{\mu_2}(\Lambda_{\mu_1}(e, \alpha, 0)(t_1(\alpha)), \alpha, t_1(\alpha))(t) & \text{se } t_1(\alpha) \leq t \leq t_2(\alpha) \\ \dots & \end{cases}$$

É fácil verificar que esta aplicação é contínua no seu domínio. A sua propriedade fundamental é que  $\Lambda_U(e, \alpha)$  depende apenas dos abertos  $W_{\mu_i}$  a que  $\alpha$  pertence (e não do conjunto  $U$ ) pois se  $\alpha \notin W_{\mu_i}$  então  $t_i(\alpha) = t_{i+1}(\alpha)$ . Isto mostra que se  $\alpha \in U \cap V$ , então  $\Lambda_U(\alpha) = \Lambda_V(\alpha)$ . Obtemos assim a aplicação de levantamento pretendida

$$\Lambda : E \times_B B^{[0,1]} \rightarrow E^{[0,1]}$$

através da fórmula

$$\Lambda(e, \alpha) = \Lambda_U(e, \alpha) \text{ para } U \text{ um aberto qualquer contendo } \alpha$$

Conclui-se que  $p$  é uma fibração.  $\square$

Uma consequência importante deste teorema é que as aplicações que localmente são produtos têm a propriedade do levantamento das homotopias (pelo menos quando a base é paracompacta).

**Definição 3.34.** *Uma aplicação  $p : E \rightarrow B$  diz-se um fibrado com fibra  $F$  se existe uma cobertura aberta  $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}$  de  $B$  tal que para cada  $\alpha$  existe um homeomorfismo  $\phi_\alpha$  fazendo o seguinte diagrama comutar*

$$\begin{array}{ccc} p^{-1}(U_\alpha) & \xrightarrow{\phi} & U_\alpha \times F \\ & \searrow p & \swarrow \pi_1 \\ & & U_\alpha \end{array}$$

**Corolário 3.35.** *Se  $p : E \rightarrow B$  é um fibrado e  $B$  é um espaço paracompacto então  $p$  é uma fibração.*

Dado um espaço  $B$ , podemos definir a *categoria dos espaços sobre  $B$*  cujos objectos são as aplicações

$$E \xrightarrow{p} B$$

e cujos morfismos são as aplicações  $f : E \rightarrow E'$  tais que

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{f} & E' \\ & \searrow p & \swarrow q \\ & & B \end{array}$$

comuta. Temos a noção óbvia de homotopia de aplicações sobre  $B$  e a composição de aplicações está bem definida nas classes de homotopia pelo que podemos definir a categoria de homotopia de espaços sob  $B$ . Um isomorfismo nesta categoria diz-se uma *equivalência de homotopia fibrada*. Mais geralmente podemos definir uma categoria de aplicações onde os objectos são as aplicações  $p : E \rightarrow B$  e os morfismos são os diagramas comutativos

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{f} & E' \\ \downarrow p & & \downarrow q \\ B & \xrightarrow{g} & B' \end{array}$$

com a noção de homotopia óbvia. Os isomorfismos na correspondente categoria de homotopia chamam-se equivalências de homotopia de fibrações. Tal como no caso dual das cofibrações, as fibrações têm a seguinte propriedade útil:

**Proposição 3.36.** (a) *Se  $p : E \rightarrow B$  e  $q : E' \rightarrow B$  são fibrações e  $f : E \rightarrow E'$  é uma aplicação sobre  $B$  e uma equivalência de homotopia, então  $f$  é uma equivalência de homotopia fibrada.*

(b) *Se  $p : E \rightarrow B$  e  $q : E' \rightarrow B'$  são fibrações e  $f : E \rightarrow E'$ ,  $g : B \rightarrow B'$  são equivalências de homotopia tais que o diagrama*

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{f} & E' \\ p \downarrow & & \downarrow q \\ B & \xrightarrow{g} & B' \end{array}$$

comuta então  $(f, g)$  é uma equivalência de homotopia de fibrações.

*Proof.* Exercício. □

Qualquer aplicação  $f : X \rightarrow Y$  pode ser substituída por uma fibração da seguinte maneira. Defina-se

$$P_f = X \times_Y Y^{[0,1]} = \{(x, \alpha) \in X \times Y^{[0,1]} : f(x) = \alpha(0)\}$$

Temos uma inclusão e projecção naturais

$$i : X \rightarrow P_f \quad i(x) = (x, c_{f(x)}), \quad \pi : P_f \rightarrow Y \quad \pi(x, \alpha) = \alpha(1)$$

(onde escrevemos  $c_a$  para o caminho constante em  $a \in Y$ ) e o seguinte diagrama comuta

$$(5) \quad \begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{i} & P_f \\ & \searrow f & \downarrow \pi \\ & & Y \end{array}$$

**Exercício 3.37.** (a)  $i$  é a inclusão de um retrato por deformação (e portanto uma cofibração).

(b)  $\pi$  é uma fibração.

É uma consequência da Proposição 3.36 que, se  $f : X \rightarrow Y$  é uma fibração então a aplicação  $i$  é uma equivalência de homotopia fibrada e em particular induz uma equivalência de homotopia entre as fibras  $f^{-1}(y)$  e  $\pi^{-1}(y)$  para cada  $y \in Y$ . Isto sugere a seguinte definição:

**Definição 3.38.** A fibra de homotopia de uma aplicação  $f : X \rightarrow Y$  sobre  $y \in Y$ , é o espaço

$$F_f = \pi^{-1}(y) = \{(x, \alpha) \in X \times Y^{[0,1]} : \alpha(0) = f(x), \alpha(1) = y\}$$

Tal como no caso dual das cofibrações temos claramente a seguinte propriedade universal da fibra de homotopia:

**Proposição 3.39.** Dar uma aplicação  $g : A \rightarrow F_f$  entre  $A$  e a fibra de homotopia sobre  $y \in Y$ , equivale a dar

- Uma aplicação  $h : A \rightarrow X$ ,
- Uma homotopia entre  $f \circ h$  e a aplicação constante  $A \rightarrow \{y\} \subset Y$ .

Dito de outra forma, a sucessão de conjuntos

$$[A, F_f] \xrightarrow{\pi_1^*} [A, X] \xrightarrow{f_*} [A, Y]$$

é exacta no mesmo sentido que (3). Notemos que para iterar esta operação de tomar a fibra, precisamos de escolher um ponto de base em  $X$  sobre o qual tomar a fibra de  $\pi : F_f \rightarrow X$ . Assim as sucessões de fibração definem-se naturalmente apenas na categoria dos espaços pontuados cujos objectos consistem em pares  $(X, x_0)$  com  $x_0 \in X$ , e os morfismos são as aplicações que preservam pontos de base.

Vamos agora ver que a propriedade do levantamento das homotopias nos dá uma acção dos caminhos na base no espaço total de uma fibração. Seja  $p : E \rightarrow B$  uma

fibração, e  $\alpha : [0, 1] \rightarrow B$  um caminho com  $\alpha(0) = b$  e  $\alpha(1) = b'$ . Aplicando a propriedade do levantamento das homotopias ao diagrama

$$\begin{array}{ccc} p^{-1}(b) \times \{0\} & \xrightarrow{\quad} & E \\ \downarrow & \nearrow \tilde{H}_\alpha & \downarrow p \\ p^{-1}(b) \times [0, 1] & \xrightarrow{\pi_2} & [0, 1] \xrightarrow{\alpha} B \end{array}$$

obtemos uma aplicação

$$M_\alpha : p^{-1}(b) \rightarrow p^{-1}(b')$$

definida por

$$M_\alpha(e) = \tilde{H}_\alpha(e, 1).$$

Esta aplicação depende da escolha de levantamento  $\tilde{H}_\alpha$ , mas dados dois caminhos homotópicos  $\alpha \simeq \alpha'$ , e dois levantamentos  $\tilde{H}_\alpha, \tilde{H}_{\alpha'} : p^{-1}(b) \times [0, 1] \rightarrow E$ , uma aplicação da propriedade do levantamento das homotopias<sup>12</sup> ao diagrama

$$\begin{array}{ccc} p^{-1}(b) \times ([0, 1] \times \{0, 1\} \cup \{0\} \times [0, 1]) & \xrightarrow{F} & E \\ \downarrow & \nearrow \tilde{K} & \downarrow p \\ p^{-1}(b) \times [0, 1] \times [0, 1] & \xrightarrow{\pi_2} & [0, 1] \times [0, 1] \xrightarrow{K} B \end{array}$$

onde  $K$  designa a homotopia entre  $\alpha$  e  $\alpha'$ ,  $F$  é a aplicação definida por

$$F(e, t, 0) = \tilde{H}_\alpha(e, t) \quad F(e, t, 1) = \tilde{H}_{\alpha'}(e, t) \quad F(e, 0, t) = e$$

mostra que a aplicação  $p^{-1}(b) \times [0, 1] \rightarrow p^{-1}(b')$  definida por

$$(e, t) \mapsto F(e, 1, t)$$

é uma homotopia entre as aplicações  $M_\alpha$  e  $M_{\alpha'}$ . Concluimos portanto que a classe de homotopia da aplicação de monodromia

$$M_\alpha : p^{-1}(b) \rightarrow p^{-1}(b')$$

está bem definida e depende apenas da classe de homotopia do caminho  $\alpha$ .

Se  $\alpha$  é um caminho constante, podemos claramente tomar  $\tilde{H}_\alpha(e, t) = e$  e se  $\alpha * \beta$  denota a concatenação de dois caminhos, a expressão

$$\tilde{H}_{\alpha * \beta}(e, t) = \begin{cases} \tilde{H}_\alpha(e, 2t) & \text{se } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \tilde{H}_\beta(M_\alpha(e), 2t - 1) & \text{se } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

é um levantamento de  $\alpha * \beta$ , mostrando que

$$M_{\alpha * \beta} \simeq M_\beta \circ M_\alpha.$$

Temos portanto o seguinte resultado:

**Proposição 3.40.** *Seja  $p : E \rightarrow B$  uma fibração. A aplicação que associa a cada ponto  $b \in B$  a fibra  $p^{-1}(b)$ , e a cada classe de homotopia de caminhos  $[\alpha]$  entre  $b$  e  $b' \in B$  a classe de homotopia  $[M_\alpha] : p^{-1}(b) \rightarrow p^{-1}(b')$  é um functor contravariante*

$$M : \Pi(B) \rightarrow Ho(Top)$$

*do grupóide fundamental de  $B$  para a categoria de homotopia dos espaços topológicos.*

<sup>12</sup>Note-se que o par  $([0, 1] \times [0, 1], [0, 1] \times \{0, 1\} \cup \{0\} \times [0, 1])$  é homeomorfo ao par  $([0, 1] \times [0, 1], [0, 1] \times \{0\})$ .

**Corolário 3.41.** *Seja  $p : E \rightarrow B$  uma fibração. Se  $b, b' \in B$  pertencem à mesma componente conexa por arcos de  $B$ , as fibras  $p^{-1}(b)$  e  $p^{-1}(b')$  são homotopicamente equivalentes.*

**Corolário 3.42.** *Se  $p : E \rightarrow B$  é uma fibração e  $b \in B$ , temos uma representação (dita de monodromia)*

$$\rho : \pi_1(B, b) \rightarrow \text{Aut}_h(p^{-1}(b))$$

onde  $\text{Aut}_h(p^{-1}(b))$  denota o grupo de equivalências de homotopia da fibra  $p^{-1}(b)$ . A representação é definida por

$$\rho([\alpha]) = [M_\alpha].$$

**Exercício 3.43.** *Neste exercício, assuma que a adjunção 2.1 é válida para os espaços que for conveniente. Seja  $p : E \rightarrow B$  uma fibração e seja  $\text{Aut}_h(p^{-1}(b))$  o monóide topológico das equivalências de homotopia de  $p^{-1}(b)$  (com o produto definido pela composição de aplicações). Promova a representação do Corolário 3.42 a uma aplicação*

$$\phi : \Omega_b B \rightarrow \text{Aut}_h(p^{-1}(b))$$

que é multiplicativa a menos de homotopia (Compare este resultado com a demonstração da Proposição 3.14 no caso da fibração  $X^X \rightarrow X^A$ .)

**Espaços pontuados.** Um espaço pontuado é um par  $(X, *)$  com  $* \in X$ . Uma aplicação  $f : (X, *) \rightarrow (Y, *)$  é uma aplicação  $f : X \rightarrow Y$  que preserva o ponto de base. Os espaços pontuados juntamente com estas aplicações formam a categoria dos espaços pontuados. Dado um espaço  $X$  escrevemos  $X_+$  para o espaço  $X$  com um ponto de base disjunto. A aplicação

$$X \rightarrow X_+$$

é um functor da categoria dos espaços para a categoria dos espaços pontuados (adjunto à esquerda do functor esquecido). Recorde-se que um espaço se diz *bem pontuado* se a inclusão do ponto de base é uma cofibração.

O coproduto na categoria dos espaços pontuados é a *soma wedge*, definida por

$$X \vee Y = (X \amalg Y) / *_X \sim *_Y$$

O produto é o produto usual com o ponto de base  $(*_X, *_Y)$  e definimos o *produto smash* pela fórmula

$$X \wedge Y = (X \times Y) / (X \vee Y).$$

**Exemplo 3.44.** Para todo o  $k, n \geq 0$ ,  $S^k \wedge S^n$  é homeomorfo a  $S^{n+k}$ .

O produto smash está sujeito a algumas patologias como é indicado na primeira parte do seguinte exercício.

**Exercício 3.45.** (a) *Mostre que  $\mathbb{Q} \wedge (\mathbb{Q} \wedge \mathbb{N}) \not\cong (\mathbb{Q} \wedge \mathbb{Q}) \wedge \mathbb{N}$ .*

(b) *Mostre que se  $X, Z$  são localmente compactos e Hausdorff então  $X \wedge (Y \wedge Z) \cong (X \wedge Y) \wedge Z$ .*

Escrevemos

$$\text{Map}_*(X, Y) \subset Y^X$$

para o subespaço de  $Y^X$  formado pelas aplicações que preservam o ponto de base, com ponto de base dado pela aplicação constante no ponto de base de  $Y$ . Pela propriedade universal do quociente temos uma aplicação

$$(6) \quad \text{Map}_*(X \wedge Y, Z) \rightarrow \text{Map}_*(X, \text{Map}_*(Y, Z))$$

que é uma bijecção se  $Y$  é localmente compacto e Hausdorff (de acordo com a Proposição 2.1). Esta adjunção explica a relevância do produto smash. Note-se que numa categoria adequada de espaços topológicos esta adjunção é válida sem restrições e é na realidade um homeomorfismo de espaços topológicos o que implica formalmente a associatividade do produto smash.

A noção natural de homotopia nesta categoria é a de uma homotopia que preserve o ponto de base, que podemos escrever

$$H : X \wedge [0, 1]_+ \rightarrow Y$$

O conjunto das classes de homotopia pontuadas entre  $(X, *)$  e  $(Y, *)$  escreve-se

$$[X, Y]_*$$

Note-se que este conjunto tem um ponto de base natural (a aplicação constante no ponto de base de  $Y$ ).

Podemos definir cofibrações e fibrações na categoria dos espaços pontuados, pelas propriedades da extensão e levantamento das homotopias (pontuadas). A relação entre estes conceitos e os conceitos discutidos anteriormente é a seguinte: Uma cofibração é uma cofibração pontuada (uma vez que o ponto de base pertence ao subespaço). Se  $(A, *) \rightarrow (X, *)$  é uma cofibração pontuada e  $(A, *)$  (e portanto  $(X, *)$ ) é bem pontuado, então  $A \rightarrow X$  é uma cofibração. Por outro lado uma fibração pontuada é uma fibração (uma vez que a propriedade do levantamento das homotopias pontuadas para  $A_+$  é o mesmo que a propriedade do levantamento das homotopias para  $A$ ) e uma fibração tem necessariamente a propriedade do levantamento das homotopias pontuadas relativamente aos espaços bem pontuados.

O *cilindro reduzido* de uma aplicação  $f : (X, *) \rightarrow (Y, *)$  é o espaço

$$M_f = (X \wedge [0, 1]_+ \amalg Y) / (x \wedge 1 \sim f(x))$$

e o *cone reduzido* ou a *cofibra de homotopia* de  $f$  é

$$C_f = M_f / (X \times \{0\}).$$

A *suspensão reduzida* de  $(X, *)$  é

$$\Sigma X = X \wedge S^1.$$

É usual identificar  $S^1$  com o quociente  $[0, 1] / (\{0, 1\})$  e escrever  $x \wedge t$  com  $t \in [0, 1]$  para um elemento de  $\Sigma X$ .

Note-se que  $M_f, C_f$  e  $\Sigma X$  obtêm-se das versões não reduzidas colapsando um intervalo  $[0, 1]$ . É fácil ver que se  $X$  e  $Y$  são bem pontuados, as inclusões deste intervalo são cofibrações e portanto as aplicações quociente são equivalências de homotopia.

O *espaço dos caminhos* de  $(X, *)$  é o espaço pontuado  $PX = \text{Map}_*([0, 1], X)$  em que damos a  $[0, 1]$  o ponto de base 0. Temos uma aplicação natural

$$e : PX \rightarrow X$$

dada por avaliação em  $t = 1$ . O *espaço de laços* de  $(X, *)$  é o espaço pontuado

$$\Omega X = \text{Map}_*(S^1, X).$$

A adjunção (6) tem como consequência imediata a seguinte relação

$$[\Sigma X, Y]_* = [X, \Omega Y]_*$$

**Proposição 3.46.**  $[ \Sigma X, Y ]_*$  é um grupo e  $[ \Sigma^2 X, Y ]$  é um grupo abeliano.

*Proof.* A multiplicação em  $[\Sigma X, Y]$  é induzida pela aplicação

$$\Sigma X \xrightarrow{\nu} \Sigma X \vee \Sigma X$$

que colapsa o "equador" de  $\Sigma X$ . Mais precisamente, identificando como habitualmente  $S^1$  com  $[0, 1]/\{0, 1\}$ ,

$$\nu(x \wedge t) = \begin{cases} x \wedge 2t \in \Sigma X \vee * & \text{se } 0 \leq t \leq 1/2 \\ x \wedge (2t - 1) \in * \vee \Sigma X & \text{se } 1/2 \leq t \leq 1 \end{cases}$$

Utilizando o argumento já familiar no caso do grupo fundamental<sup>13</sup>, é fácil ver que este produto é associativo, que o elemento neutro é dado pela classe da aplicação constante e que a classe da aplicação  $-f : \Sigma X \rightarrow Y$  definida por

$$(-f)(x \wedge t) = f(x \wedge (1 - t))$$

é o inverso de  $[f] \in [\Sigma X, Y]$ .

Para ver que  $[\Sigma^2 X, Y]$  é abeliano, notemos que  $S^1 \wedge S^1$  é homeomorfo a  $[0, 1]^2 / \partial([0, 1]^2)$ . Por definição, a multiplicação em  $[\Sigma^2 X, Y]$  efectua-se concatenando as aplicações na segunda coordenada. A figura

$$\begin{array}{|c|} \hline f \\ \hline g \\ \hline \end{array} \rightarrow \begin{array}{|c|c|} \hline f & * \\ \hline * & g \\ \hline \end{array} \rightarrow \begin{array}{|c|c|} \hline * & g \\ \hline f & * \\ \hline \end{array} \rightarrow \begin{array}{|c|} \hline g \\ \hline f \\ \hline \end{array}$$

ilustra a homotopia entre  $[f][g]$  e  $[g][f]$ . □

Uma vez que  $S^n = \Sigma^n S^0 = \Sigma^2 S^{n-2}$ , as classes de homotopia a partir de uma esfera de dimensão maior ou igual a 2 formam um grupo abeliano.

**Definição 3.47.** *Seja  $(X, *)$  um espaço pontuado. Para cada  $n \geq 0$ , define-se o  $n$ -ésimo grupo de homotopia de  $X$  por*

$$\pi_n(X, *) = [S^n, X]_*$$

É claro que  $\pi_0(X)$  é o conjunto pontuado das componentes conexas por arcos de  $X$ ,  $\pi_1(X, *)$  é o grupo fundamental. Para  $n \geq 2$ ,  $\pi_n(X, *)$  é um grupo abeliano como observámos acima. Estes grupos são os invariante mais importantes em teoria de homotopia, e geralmente quaisquer outros invariantes (grupos de homologia por exemplo) podem ser interpretados em termos deles. Note-se que sempre que seja válida a adjunção 2.1 temos  $[\Sigma^n X, Y]_* = \pi_n(\text{Map}_*(X, Y))$ . Estes grupos são extremamente difíceis de calcular em geral. Até à data não são conhecidos os grupos de homotopia de  $S^2$  (ou na realidade de qualquer complexo celular finito que não seja esférico<sup>14</sup>).

É claro da definição da multiplicação na Proposição 3.46 que a composição com uma aplicação  $g : (Y, *) \rightarrow (Z, *)$  determina um homomorfismo de grupos

$$[\Sigma X, Y]_* \xrightarrow{g_*} [\Sigma X, Z]_*$$

e que

$$\Sigma f : \Sigma X \rightarrow \Sigma Y$$

<sup>13</sup>Note-se que se assumirmos a adjunção 2.1, temos  $[\Sigma X, Y] = \pi_1(\text{Map}_*(X, Y))$ .

<sup>14</sup>Diz-se que um espaço é esférico se  $\pi_k(X, *) = 0$  para todo o  $k \geq 2$ .

determina, por pré-composição, um homomorfismo de grupos

$$[\Sigma X, Z]_* \xleftarrow{\Sigma f^*} [\Sigma Y, Z].$$

Tal como no caso não pontuado (cf. Exercícios 3.18 e 3.19) temos o seguinte resultado cuja demonstração se deixa como exercício.

**Lema 3.48.** *Seja  $f : (X, *) \rightarrow (Y, *)$ ,  $i : Y \rightarrow C_f, j : C_i \rightarrow C_f$  as inclusões naturais,  $\pi : C_f \rightarrow \Sigma X$  a aplicação que colapsa  $Y \subset C_f$ ,  $\xi : C_i \rightarrow \Sigma X$  a aplicação que colapsa  $Y \wedge [0, 1]_+$  em  $C_f$ , e  $\tau : C_j \rightarrow \Sigma Y$  a aplicação que colapsa  $C_f \wedge [0, 1]_+$ .*

(a) *No seguinte diagrama, o triângulo comuta, o quadrado comuta a menos de homotopia e as aplicações verticais são equivalências de homotopia*

$$\begin{array}{ccccccc} Y & \xrightarrow{i} & C_f & \xrightarrow{\pi} & \Sigma X & \xrightarrow{-\Sigma f} & \Sigma Y \\ & & \searrow j & & \uparrow \xi & & \uparrow \tau \\ & & & & C_i & \longrightarrow & C_j \end{array}$$

(b) *Há um homeomorfismo natural  $\Sigma C_f \simeq C_{\Sigma f}$ .*

O resultado anterior sugere a seguinte definição.

**Definição 3.49.** *A sucessão de cofibração associada a  $f : (X, *) \rightarrow (Y, *)$  é a sucessão*

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{i} C_f \xrightarrow{\pi} \Sigma X \xrightarrow{-\Sigma f} \Sigma Y \xrightarrow{-\Sigma i} \Sigma C_f \xrightarrow{-\Sigma \pi} \Sigma^2 X \xrightarrow{\Sigma^2 f} \dots$$

O lema anterior mostra que a menos de equivalência de homotopia, em cada subsucessão de três termos de uma sucessão de cofibração

$$X_0 \rightarrow X_1 \rightarrow X_2$$

temos que  $X_2$  é a cofibra de homotopia da aplicação  $X_0 \rightarrow X_1$ . Pela propriedade universal da cofibra de homotopia temos então o seguinte resultado.

**Proposição 3.50.** *Seja  $f : (X, *) \rightarrow (Y, *)$  uma aplicação e  $(Z, *)$  um espaço pontuado. A sucessão*

$$[X, Z]_* \xleftarrow{f^*} [Y, Z]_* \xleftarrow{i^*} [C_f, Z]_* \xleftarrow{\pi^*} [\Sigma X, Z]_* \xleftarrow{\Sigma f^*} [\Sigma Y, Z]_* \xleftarrow{\Sigma i^*} [\Sigma C_f, Z]_* \xleftarrow{\Sigma \pi^*} \dots$$

*é uma sucessão exacta de conjuntos pontuados, de grupos a partir do terceiro termo e de grupos abelianos a partir do sexto termo.*

Notemos que a exactidão da sucessão não é afectada se trocarmos o sinal das aplicações. A exactidão da sucessão acima tem um significado mais forte na secção

$$(7) \quad [Y, Z]_* \xleftarrow{i^*} [C_f, Z]_* \xleftarrow{\pi^*} [\Sigma X, Z]_*$$

De facto, a aplicação

$$C_f \xrightarrow{c} \Sigma X \vee C_f$$

que "colapsa o equador de  $X \wedge [0, 1]_+$ ", definida por

$$c(z) = \begin{cases} x \wedge 2t \in \Sigma X & \text{se } z = x \wedge t, 0 \leq t \leq 1/2 \\ x \wedge (2t - 1) \in C_f & \text{se } z = x \wedge t, 1/2 \leq t \leq 1 \\ z \in C_f & \text{se } z \in Y \subset C_f \end{cases}$$



determina uma aplicação

$$[\Sigma X, Z]_* \times [C_f, Z]_* \xrightarrow{c^*} [C_f, Z]_*$$

e é um exercício simples verificar que se trata de uma acção do grupo  $[\Sigma X, Z]_*$  no conjunto  $[C_f, Z]_*$ .

**Proposição 3.51.** *Na sucessão (7) temos  $i^*([f]) = i^*([g])$  sse existe  $[h] \in [\Sigma X, Z]_*$  tal que*

$$i^*([f]) = c^*([h], [g]).$$

*Proof.* Sejam  $f, g : C_f \rightarrow Z$  tais que  $i^*([f]) = i^*([g])$ . Pela propriedade de extensão das homotopias, podemos substituir  $f, g$  por aplicações tais que  $f \circ i = g \circ i$ . A aplicação

$$h : \Sigma X \rightarrow Z$$

definida por

$$h(x \wedge t) = \begin{cases} f(x \wedge 2t) & \text{se } 0 \leq t \leq 1/2 \\ g(x \wedge (2t - 1)) & \text{se } 1/2 \leq t \leq 1 \end{cases}$$

está portanto bem definida, e é fácil ver que  $(h \vee g) \circ c \simeq f$  como queríamos demonstrar.  $\square$

**Exercício 3.52.** *Sejam  $X$  e  $Y$  espaços bem pontuados. Mostre que*

$$\Sigma(X \times Y) \simeq \Sigma X \vee \Sigma Y \vee \Sigma X \wedge Y.$$

Sugestão: Use a sucessão de cofibração determinada por  $X \vee Y \hookrightarrow X \times Y$  para mostrar que a aplicação  $X \wedge Y \rightarrow \Sigma X \vee \Sigma Y$  é nulhomotópica.

Na categoria dos espaços pontuados podemos agora definir a sucessão dual da sucessão de cofibração de uma aplicação.

**Definição 3.53.** *A fibra de homotopia de uma aplicação  $f : (X, *) \rightarrow (Y, *)$  é*

$$F_f = \{(x, \alpha) \in X \times Y^{[0,1]} : \alpha(0) = *, \alpha(1) = f(x)\}.$$

Note-se que esta definição coincide com a Definição 3.38 no caso não pontuado apenas a menos de homeomorfismo. A razão desta nova definição prende-se com o facto de se tomar normalmente 0 para ponto de base em  $[0, 1]$ . Com esta definição temos um diagrama de pullback de espaços pontuados

$$\begin{array}{ccc} F_f & \hookrightarrow & \text{Map}_*([0, 1], Y) \\ \downarrow \pi_1 & & \downarrow e \\ X & \xrightarrow{f} & Y \end{array}$$

Note-se que  $\pi_1$  é uma fibração, sendo o pull-back de uma fibração. A fibra de  $\pi_1$  sobre o ponto de base é claramente homeomorfa a  $\Omega Y$ . Consideremos a factorização

$$\begin{array}{ccc} F_f & \xrightarrow{j} & F_f \times_X X^{[0,1]} \\ & \searrow \pi_1 & \swarrow e \\ & & X \end{array}$$

em que

$$F_f \times_X X^{[0,1]} = \{(x, \alpha, \beta) \in X \times Y^{[0,1]} \times X^{[0,1]} : \alpha(0) = *, \alpha(1) = f(x), \beta(1) = x\}$$

e  $e(x, \alpha, \beta) = \beta(0)$ . A menos de homeomorfismo trata-se exactamente da factorização (5) da aplicação  $\pi_1 : F_f \rightarrow Y$  como uma equivalência de homotopia seguida de uma fibração. A fibra de  $e$  sobre o ponto de base é exactamente  $F_{\pi_1}$ . Pela Proposição 3.36(a),  $j$  é uma equivalência de homotopia fibrada e portanto restringe-se a uma equivalência de homotopia

$$j|_{\Omega Y} : \Omega Y \rightarrow F_{\pi_1}.$$

**Exercício 3.54.** *Determine um inverso de homotopia explícito para  $j$ .*

O seguinte resultado é o dual do Lema 3.48. Dada uma aplicação  $f : (X, *) \rightarrow (Y, *)$  escrevemos  $-\Omega f : \Omega X \rightarrow \Omega Y$  para a aplicação definida por

$$-\Omega(f)(\alpha)(t) = f \circ \alpha(1 - t).$$

**Lema 3.55.** (1) *No diagrama seguinte*

$$\begin{array}{ccccc} \Omega X & \xrightarrow{-\Omega f} & \Omega Y & \hookrightarrow & F_f \\ \downarrow & & \downarrow j & \nearrow \bar{\pi}_1 & \\ F_{\pi_1} & \longrightarrow & F_{\pi} & & \end{array}$$

*as aplicações verticais são equivalências de homotopia, o quadrado comuta a menos de homotopia e o triângulo comuta estritamente.*

(2) *Há um homeomorfismo natural entre  $F_{\Omega f}$  e  $\Omega F_f$ .*

*Proof.* Exercício. □

**Definição 3.56.** *A sucessão de fibração associada a uma aplicação  $f : (X, *) \rightarrow (Y, *)$  é a sucessão*

$$\dots \rightarrow \Omega^2 X \xrightarrow{\Omega^2 f} \Omega^2 Y \xrightarrow{-\Omega i} \Omega F_f \xrightarrow{\Omega \pi_1} \Omega X \xrightarrow{-\Omega f} \Omega Y \xrightarrow{i} F_f \xrightarrow{\pi_1} X \xrightarrow{f} Y.$$

Notemos que se  $X$  é um espaço pontuado, existe uma multiplicação natural em  $\Omega X$

$$\Omega X \times \Omega X \rightarrow \Omega X$$

determinada pela concatenação de caminhos em  $X$ . Esta multiplicação determina uma operação nos conjuntos  $[A, \Omega X]_*$  que se verifica facilmente ser uma operação de grupo. É ainda imediato a partir das definições das operações que o isomorfismo natural dado pela adjunção

$$[\Sigma A, X]_* \rightarrow [A, \Omega X]_*$$

é um isomorfismo de grupos. Uma aplicação  $g : (A, *) \rightarrow (B, *)$  determina claramente, por pré-composição, um homomorfismo de grupos

$$[B, \Omega X]_* \xrightarrow{g^*} [A, \Omega X]_*$$

É ainda fácil verificar que dado  $f : (X, *) \rightarrow (Y, *)$

$$[A, \Omega X]_* \xrightarrow{(\Omega f)^*} [A, \Omega Y]_*$$

é um homomorfismo de grupos. Tal como no caso dual temos o seguinte resultado.

**Proposição 3.57.** *Dados  $f : (X, *) \rightarrow (Y, *)$  e  $(A, *)$ , a sucessão*

$$(8) \quad \cdots [A, \Omega^2 X]_* \xrightarrow{(\Omega^2 f)_*} [A, \Omega^2 Y]_* \rightarrow \cdots \rightarrow [A, F_f]_* \xrightarrow{\pi_{1*}} [A, X]_* \xrightarrow{j_*} [A, Y]_*$$

*é uma sucessão exacta de conjuntos pontuados, de grupos a partir do terceiro termo e de grupos abelianos a partir do sexto termo.*

Notemos ainda, que há uma acção natural

$$\Omega Y \times F_f \xrightarrow{a} \Omega Y$$

definida por

$$a(\alpha, x, \beta) = (x, \alpha * \beta).$$

Esta acção determina uma acção do grupo  $[A, \Omega Y]_*$  no conjunto pontuado  $[A, F_f]_*$  e a exactidão da sucessão de fibração em

$$[A, \Omega Y]_* \xrightarrow{j_*} [A, F_f]_* \xrightarrow{\pi_{1*}} [A, X]$$

tem o sentido mais forte

$$\pi_{1*}([f]) = \pi_{1*}([g]) \iff \exists [h] \in [A, \Omega Y]_* : a \circ (h, f) \simeq g.$$

Se  $p : E \rightarrow B$  é uma fibração então a inclusão

$$F = p^{-1}(*) \hookrightarrow F_p$$

da fibra sobre o ponto de base na fibra de homotopia é uma equivalência de homotopia pelo que podemos substituir  $F_p$  pela fibra na sucessão (8). Em termos geométricos a aplicação

$$[A, \Omega B]_* \rightarrow [A, F]_*$$

obtida compondo a aplicação da sucessão da fibração com a equivalência de homotopia  $F_f \rightarrow F$  pode ser descrita do seguinte modo: Dada uma aplicação

$$g : A \rightarrow \Omega B$$

seja  $G : A \times [0, 1] \rightarrow B$  a aplicação adjunta e  $\tilde{G} : A \times [0, 1] \rightarrow E$  um levantamento tal que  $\tilde{G}(a, 0) = * \in F \subset E$ . A aplicação

$$a \mapsto \tilde{G}(a, 1)$$

tem imagem contida na fibra  $F$ , e a sua classe de homotopia é a imagem de  $[g]$  em  $[A, F]_*$  (Exercício).

**Relação entre sucessões de fibração e cofibração.** Vamos agora discutir a functorialidade (ou mais precisamente a falta de functorialidade) das sucessões de cofibração e fibração. Os resultados desta secção são muito importantes tanto conceptualmente como do ponto de vista prático.

**Proposição 3.58.** *Dado um quadrado comutativo na categoria de homotopia*

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{i} & Y \\ f \downarrow & & \downarrow g \\ Z & \xrightarrow{j} & W \end{array}$$

existe uma aplicação  $h$  tal que o seguinte diagrama comuta

$$\begin{array}{ccccccc} X & \xrightarrow{i} & Y & \longrightarrow & C_i & \longrightarrow & \Sigma X \\ f \downarrow & & \downarrow g & & \downarrow h & & \Sigma f \downarrow \\ Z & \xrightarrow{j} & W & \longrightarrow & C_j & \longrightarrow & \Sigma W. \end{array}$$

e, dualmente, uma aplicação  $l$  que faz seguinte diagrama comutar

$$\begin{array}{ccccccc} \Omega Y & \longrightarrow & F_i & \longrightarrow & X & \xrightarrow{i} & Y \\ \downarrow \Omega g & & \downarrow l & & \downarrow f & & \downarrow g \\ \Omega W & \longrightarrow & F_j & \longrightarrow & Z & \xrightarrow{j} & W \end{array}$$

*Proof.* Seja  $H : X \times [0, 1] \rightarrow W$  uma homotopia entre  $j \circ f$  e  $i \circ g$ . É fácil ver que a aplicação  $h : C_i \rightarrow C_j$  definida por

$$h(a) = \begin{cases} f(x) \wedge (2t) & \text{se } a = x \wedge t, 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ H(x, 2t - 1) & \text{se } a = x \wedge t, \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \\ g(y) & \text{se } a = y \in Y. \end{cases}$$

faz o diagrama comutar. O caso dual é análogo.  $\square$

Note-se que a aplicação  $h$  na demonstração anterior depende da escolha da homotopia  $H$  entre  $j \circ f$  e  $i \circ g$ . Estas homotopias formam um torsor<sup>15</sup> sobre o grupo  $[\Sigma X, W]$ . Não há geralmente uma escolha única para a aplicação  $h$  como mostra o seguinte exemplo.

**Exemplo 3.59.** No seguinte diagrama, em que as linhas são equivalentes a sucessões de cofibração,

$$\begin{array}{ccccccc} S^{n-1} \hookrightarrow & D^n & \longrightarrow & S^n & \xrightarrow{=} & S^n \\ \downarrow & \downarrow & & \downarrow h & & \downarrow \\ * & \longrightarrow & S^n & \xrightarrow{=} & S^n & \longrightarrow & *. \end{array}$$

qualquer aplicação  $h$  faz o diagrama comutar na categoria de homotopia.

Esta falha de functorialidade das sucessões de cofibração e fibração é um fenómeno típico em Teoria de Homotopia e a fonte de uma grande parte da subtilidade da teoria. A falha de functorialidade é tornada mais precisa pelo seguinte exercício.

**Exercício 3.60** (Haynes Miller). *Seja  $\mathcal{C}$  a categoria de homotopia e  $\mathcal{A}$  a categoria dos morfismos em  $\mathcal{C}$ . Mostre que não existe um functor  $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{C}$  que associe a  $[f]$  um espaço com o tipo de homotopia de  $C_f$ .*

<sup>15</sup>Um conjunto diz-se um torsor sobre um grupo se o grupo age livremente nele com uma única órbita. Por exemplo, as bases ortonormais orientadas de  $\mathbb{R}^n$  são um torsor sobre o grupo das rotações  $SO(n)$  e as classes de homotopia de caminhos entre  $x_0$  e  $x_1 \in X$  são um torsor sobre  $\pi_1(X, x_0)$ .

Aplicando a proposição anterior ao quadrado formado por duas aplicações consecutivas numa sucessão de fibração ou cofibração obtemos aplicações que comparam a fibra e a cofibra de uma aplicação:

$$\begin{array}{ccccccc} F_f & \longrightarrow & * & \longrightarrow & \Sigma F_f & \xrightarrow{=} & \Sigma F_f \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \epsilon & & \downarrow \\ X & \xrightarrow{f} & Y & \longrightarrow & C_f & \longrightarrow & \Sigma X \end{array}$$

e

$$\begin{array}{ccccccc} \Omega Y & \longrightarrow & F_f & \longrightarrow & X & \xrightarrow{f} & Y \\ \downarrow & & \downarrow \eta & & \downarrow & & \downarrow \\ \Omega C_f & \xrightarrow{=} & \Omega C_f & \longrightarrow & * & \longrightarrow & C_f. \end{array}$$

É fácil verificar que podemos escolher para  $\epsilon : \Sigma F_f \rightarrow C_f$  a aplicação

$$\epsilon(\alpha \wedge t) = \begin{cases} \alpha(2t) & \text{se } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \alpha(1) \wedge (2t - 1) & \text{se } \frac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

e para  $\eta : F_f \rightarrow \Omega C_f$  a aplicação adjunta. Estas aplicações estão relacionadas com a unidade e a counidade<sup>16</sup> da adjunção  $(\Sigma, \Omega)$

$$\eta : X \rightarrow \Omega \Sigma X \quad \epsilon(x)(t) = x \wedge t$$

e

$$\epsilon : \Sigma \Omega X \rightarrow X \quad \eta(\alpha \wedge t) = \alpha(t).$$

da seguinte maneira:

**Proposição 3.61.** *O seguinte diagrama comuta na categoria de homotopia*

$$\begin{array}{ccccccccc} \Sigma \Omega F_f & \longrightarrow & \Sigma \Omega X & \longrightarrow & \Sigma \Omega Y & \longrightarrow & \Sigma F_f & \longrightarrow & \Sigma X \\ \downarrow \epsilon & & \downarrow \epsilon & & \downarrow \epsilon & & \downarrow \epsilon & & \downarrow \\ \Omega Y & \longrightarrow & F_f & \longrightarrow & X & \xrightarrow{f} & Y & \longrightarrow & C_f & \longrightarrow & \Sigma X \\ \downarrow = & & \downarrow \eta & & \downarrow \eta & & \downarrow \eta & & \downarrow \eta & & \\ \Omega Y & \longrightarrow & \Omega C_f & \longrightarrow & \Omega \Sigma X & \longrightarrow & \Omega \Sigma Y & \longrightarrow & \Omega \Sigma C_f \end{array}$$

*Proof.* Exercício. □

As aplicações de comparação entre a cofibra e a fibra nunca são equivalências de homotopia (a não ser que os espaços em questão sejam contrácteis) mas veremos em breve que são de facto equivalências "até uma certa dimensão", no que se chama o "domínio estável". Em algumas situações, no entanto, estas aplicações são de facto equivalências não havendo portanto diferença essencial entre a estrutura de cofibração e fibração. Nesse caso está-se no âmbito daquilo a que se chama a Teoria de Homotopia Estável. Um exemplo importante é indicado no seguinte exercício.

**Exercício 3.62.** *Recorde as definições da secção 2.*

<sup>16</sup>A unidade e counidade de uma adjunção  $(F, G)$  são as transformações naturais que a cada objecto associam a aplicação adjunta de  $\text{id}_{F(X)}$  e  $\text{id}_{G(X)}$  respectivamente.

- (a) Defina por analogia com as definições para espaços topológicos<sup>17</sup>, o cilindro  $M_f$ , o objecto  $P_f$ , a cofibra e a fibra de homotopia de uma aplicação  $f : C_* \rightarrow D_*$  entre complexos em cadeia.
- (b) Mostre que os funtores de suspensão  $\Sigma$  e laços  $\Omega$  (respectivamente a cofibra de homotopia da aplicação para o objecto terminal e a fibra de homotopia da aplicação a partir do objecto inicial) são funtores inversos e que  $(\Sigma C_*)_n = C_{n-1}$ .
- (c) Mostre que as aplicações de comparação

$$F_f \rightarrow \Omega C_f \quad e \quad \Sigma F_f \rightarrow C_f$$

são equivalências de homotopia.

O seguinte resultado é usado muitas vezes na prática. Intuitivamente diz que num quadrado comutativo a "diferença" entre os "núcleos" das duas linhas é igual à diferença entre o núcleo das duas colunas, e o análogo para os co-núcleos.

**Proposição 3.63.** *Seja*

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{i} & B \\ \downarrow f & & \downarrow g \\ C & \xrightarrow{j} & D \end{array}$$

um diagrama comutativo na categoria de homotopia. Então é possível construir diagramas<sup>18</sup>

$$\begin{array}{ccccc} F & \longrightarrow & G & \longrightarrow & H \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ I & \longrightarrow & A & \xrightarrow{i} & B \\ \downarrow & & \downarrow f & & \downarrow g \\ J & \longrightarrow & C & \xrightarrow{j} & D \end{array}$$

em que cada linha e coluna é equivalente na categoria de homotopia a uma porção de uma sucessão de fibração, e

$$\begin{array}{ccccc} A & \xrightarrow{i} & B & \longrightarrow & X \\ \downarrow f & & \downarrow g & & \downarrow \\ C & \xrightarrow{j} & D & \longrightarrow & Y \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ W & \longrightarrow & V & \longrightarrow & Z \end{array}$$

em que cada linha e coluna é equivalente na categoria de homotopia a uma porção de uma sucessão de cofibração.

<sup>17</sup>Isto é, substituindo o intervalo  $[0, 1]$  pelo complexo  $I_*$ , o produto pelo produto tensorial e o espaço de caminhos pelo complexo de morfismos a partir de  $I_*$  e calculando os limites e colimites relevantes na categoria dos complexos em cadeia.

<sup>18</sup>Que estão longe de ser únicos, claro.

*Proof.* Provamos apenas a afirmação relativa a sucessões de fibração. Começamos por notar que podemos substituir  $j$  e  $g$  por fibrações da maneira usual. Pela propriedade do levantamento das homotopia podemos então substituir  $i$  e  $f$  por aplicações homotópicas que fazem o quadrado comutar estritamente. Seja  $P$  o pullback das fibrações  $j, g$  e

$$\phi : A \rightarrow P$$

a aplicação canónica. Podemos novamente substituir esta aplicação por uma fibração equivalente  $\psi$ . Obtemos assim um quadrado equivalente em que as quatro aplicações são fibrações pelo que as fibras de homotopia podem ser calculadas simplesmente tomando a fibra. Tome-se para  $I, J, G, H$  as fibras das aplicações relevantes e para  $F$  a fibra da aplicação  $\psi$ . É agora fácil ver que as aplicações  $G \rightarrow H$  e  $I \rightarrow J$  são fibrações. Por exemplo, a aplicação  $G \rightarrow H$  é a restrição à fibra da aplicação entre fibrações sobre  $C$

$$\begin{array}{ccc} G & \longrightarrow & H \\ \downarrow & & \downarrow \\ A & \xrightarrow{\psi} & P \\ \downarrow & & \downarrow \\ C & \xrightarrow{=} & C \end{array}$$

Note-se agora que  $F$  é a fibra comum de  $G \rightarrow H$  e  $I \rightarrow J$ .

O caso dual é análogo e deixa-se como exercício.  $\square$

**Nota 3.64.** Vale a pena observar que a demonstração anterior identifica o canto superior esquerdo do primeiro diagrama  $3 \times 3$  com a fibra de homotopia da aplicação canónica de  $A$  para o pullback de homotopia (ver Exercício 4.9 para a definição) de  $C \leftarrow D \rightarrow B$ , e dualmente, o canto inferior direito do segundo diagrama  $3 \times 3$  com a cofibra de homotopia da aplicação canónica do pushout de homotopia (ver Definição 5.28) de  $C \leftarrow A \rightarrow B$  para  $D$ .

#### 4. GRUPOS DE HOMOTOPIA

Tomando  $A = S^0$  na sucessão exacta (8) obtemos o seguinte resultado fundamental:

**Corolário 4.1.** *Seja  $p : E \rightarrow B$  é uma fibração,  $F = p^{-1}(*)$  a fibra sobre o ponto de base de  $B$  e  $i : F \hookrightarrow E$  a inclusão da. Temos a seguinte sucessão exacta<sup>19</sup> de grupos de homotopia*

$$\cdots \rightarrow \pi_n(F, *) \xrightarrow{i_*} \pi_n(E, *) \xrightarrow{p_*} \pi_n(B, *) \xrightarrow{\partial} \pi_{n-1}(F, *) \rightarrow \cdots$$

Note-se que a discussão anterior dá uma interpretação geométrica para o homomorfismo  $\partial$  (tomar  $A = S^{n-1}$ ).

O corolário anterior é um dos resultados fundamentais para o cálculo dos grupos de homotopia e joga um papel semelhante ao da sucessão de Mayer-Vietoris para o cálculo da homologia (num sentido tornado mais claro pelo Exercício 4.9).

**Corolário 4.2.** *Se  $p : E \rightarrow B$  é um revestimento,  $p_* : \pi_k(E, *) \rightarrow \pi_k(B, *)$  é um isomorfismo para  $k \geq 2$ .*

<sup>19</sup>No sentido habitual.

*Proof.* Um revestimento é uma fibração e a fibra é discreta pelo que na sucessão do Corolário 4.1, a aplicação  $p_*$  é um isomorfismo para  $k \geq 2$ .  $\square$

**Exemplo 4.3.** (i)  $\pi_k(S^1) = 0$  para todo o  $k \geq 2$ .  
(ii)  $\pi_k(\mathbb{R}P^n) = \pi_k(S^n)$  para todo o  $k \geq 2$ .

Para um outro exemplo, consideremos a fibração de Hopf

$$S^1 \rightarrow S^3 \xrightarrow{p} S^2$$

$p$  é o quociente da acção diagonal de  $S^1 \subset \mathbb{C}^*$  em

$$S^3 = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 : |z_1|^2 + |z_2|^2 = 1\}$$

O espaço das órbitas é por definição a linha projectiva complexa, ou seja a esfera de Riemann  $S^2$ . É um exercício verificar que  $p$  é localmente trivial sobre  $S^2$  e portanto  $p$  é uma fibração. A sucessão exacta longa da fibração é

$$\cdots \rightarrow \pi_k(S^1) \rightarrow \pi_k(S^3) \rightarrow \pi_k(S^2) \rightarrow \pi_{k-1}(S^1) \rightarrow \cdots$$

Concluimos do cálculo anterior dos grupos de homotopia de  $S^1$  que

$$\pi_k(S^3) \xrightarrow{p_*} \pi_k(S^2)$$

é um isomorfismo para  $k \geq 3$ . Por aproximação simplicial, temos que  $\pi_2 S^3 = 0$  (e mais geralmente  $\pi_k(S^n) = 0$  para  $k < n$ ) pelo que esta sucessão exacta permite-nos ainda concluir que

$$(9) \quad \pi_2(S^2) \simeq \pi_1(S^1) \simeq \mathbb{Z}.$$

Análogamente temos a fibração de Hopf correspondente à linha projectiva quaterniónica

$$S^3 \rightarrow S^7 \rightarrow S^4$$

e obtemos a sucessão exacta

$$\cdots \rightarrow \pi_k(S^3) \rightarrow \pi_k(S^7) \rightarrow \pi_k(S^4) \rightarrow \pi_{k-1}S^3 \rightarrow \cdots$$

Uma vez que a inclusão  $S^3 \rightarrow S^7$  é nulhomotópica e portanto induz o homomorfismo 0 nos grupos de homotopia podemos separar a sucessão acima em sucessões exactas curtas

$$0 \rightarrow \pi_k S^7 \rightarrow \pi_k S^4 \rightarrow \pi_{k-1} S^3 \rightarrow 0$$

que na verdade cindem pelo seguinte argumento: Como a aplicação

$$i : S^3 \rightarrow S^7$$

é nulhomotópica, a sua fibra de homotopia é homotopicamente equivalente à fibra de uma aplicação constante. Da definição de fibra de homotopia é imediato que esta última é  $S^3 \times \Omega S^7$  e portanto

$$\Omega S^4 \simeq F_i \simeq S^3 \times \Omega S^7$$

mostrando que

$$\pi_k(S^4) \simeq \pi_k(S^7) \oplus \pi_{k-1}S^3$$

para  $k \geq 1$ .

O argumento anterior ilustra bem a vantagem em trabalhar com espaços e não apenas os seus invariantes mesmo que estejamos apenas interessados em calcular os invariantes em causa (neste caso os grupos de homotopia).



**Exercício 4.4.** *Mostre que*

$$\pi_k(S^8) \simeq \pi_k(S^{15}) \oplus \pi_{k-1}S^7$$

para  $k \geq 1$ .

Como última aplicação notemos que a aplicação

$$SO(n+1) \xrightarrow{p} S^n$$

dada pela acção do grupo das rotações em  $(0, \dots, 0, 1) \in S^n$  é um fibrado com fibra homeomorfa a  $SO(n)$ . A sucessão exacta

$$\pi_{k+1}(S^n) \rightarrow \pi_k(SO(n)) \rightarrow \pi_k(SO(n+1)) \rightarrow \pi_k(S^n)$$

e o facto de  $\pi_k S^n \simeq 0$  para  $k < n$ , pelo teorema de aproximação simplicial, mostra que a inclusão induz um isomorfismo

$$\pi_k SO(n) \rightarrow \pi_k SO(n+1)$$

para  $k \leq n-2$ . Estes grupos de homotopia são conhecidos como consequência do Teorema de Periodicidade de Bott.  $\pi_k SO(N)$  para  $N \gg k$  é dado em função de  $k$  pela sucessão

$$\mathbb{Z}/2 \quad 0 \quad \mathbb{Z} \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad \mathbb{Z} \quad \mathbb{Z}/2 \quad \mathbb{Z}/2 \quad 0 \quad 0 \quad \mathbb{Z} \dots$$

repetida com periodicidade 8.

**Grupos de homotopia relativos.** Tal como no caso estudado previamente dos grupos de homologia, é útil estender a definição dos grupos de homotopia a pares de espaços.

**Definição 4.5.** *Seja  $(X, A)$  um par de espaços pontuados, e  $i : A \rightarrow X$  a inclusão. Os grupos de homotopia relativos do par  $(X, A)$  definem-se para  $k \geq 1$  pela fórmula*

$$\pi_k(X, A) = \pi_{k-1}F_i.$$

Assim  $\pi_k(X, A)$  é um conjunto pontuado para  $k = 1$ , um grupo para  $k = 2$  e um grupo abeliano para  $k > 2$ . Interessa ter uma interpretação geométrica dos grupos de homotopia relativos. Para tal, consideremos a aplicação quociente

$$[0, 1]^n \rightarrow [0, 1]^n / \partial([0, 1]^n) \simeq S^n$$

Uma aplicação  $S^{k-1} \rightarrow F_i \subset A \times X^{[0,1]}$  é determinada pelo factor

$$S^{k-1} \rightarrow X^{[0,1]}$$

e compondo com a aplicação quociente  $[0, 1]^{k-1} \rightarrow S^{k-1}$  podemos usar a adjunção usual para interpretar um elemento de  $\pi_{k-1}(X, A)$  como uma aplicação

$$[0, 1]^k = [0, 1]^{k-1} \times [0, 1] \xrightarrow{g} X$$

tal que

$$g(x, t) = \begin{cases} * & \text{se } t = 0 \text{ ou } x \in \partial([0, 1]^{k-1}), \\ \in A & \text{se } t = 1, \\ \in X & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Uma vez que temos um homeomorfismo de pares

$$(D^k, S^{k-1}) \simeq ([0, 1]^k, [0, 1]^{k-1} \times \{1\}) / ([0, 1]^{k-1} \times \{0\} \cup \partial(I^{k-1}) \times [0, 1])$$

obtemos uma bijecção natural

$$(10) \quad \pi_k(X, A) = [(D_k, S^{k-1}), (X, A)]_*$$

É ainda fácil ver (exercício) que a operação de composição em  $\pi_k(X, A)$  (quando definida) é dada por concatenação na última coordenada de  $[0, 1]^{k-1}$ .

Aplicando a Proposição 3.57 à inclusão  $A \rightarrow X$  obtemos imediatamente o seguinte resultado.

**Proposição 4.6.** *Seja  $(X, A)$  um par de espaços pontuados. A sucessão*

$$\cdots \rightarrow \pi_{k+1}(X, A) \xrightarrow{\partial} \pi_k(A) \xrightarrow{i_*} \pi_k(X) \xrightarrow{j_*} \pi_k(X, A) \rightarrow \cdots \rightarrow \pi_0(A) \rightarrow \pi_0(X)$$

*é exacta no sentido habitual.*

Deixamos como exercício a verificação que, em termos da interpretação geométrica explicada acima para os grupos de homotopia relativos, o homomorfismo  $\partial$  é dado por restrição da aplicação

$$(D^{k+1}, S^k) \rightarrow (X, A)$$

a  $S^k$  e que o homomorfismo  $j_*$  é o induzido pela inclusão do par  $(X, *)$  em  $(X, A)$ .

**Exercício 4.7.** *Mostre que se  $p : E \rightarrow B$  é uma fibração com fibra  $F$ , a projecção induz um isomorfismo*

$$\pi_k(E, F) \xrightarrow{p_*} \pi_k(B)$$

para  $k \geq 1$ .

**Exercício 4.8.** *Sejam  $(X, *)$ ,  $(Y, *)$  espaços pontuados e  $i : X \vee Y \rightarrow X \times Y$  a inclusão. Mostre que*

$$\pi_k(X \vee Y) \simeq \pi_{k+1}(X \times Y, X \vee Y) \oplus \pi_k(X) \oplus \pi_k(Y).$$

**Exercício 4.9.** *Dado um diagrama*

$$X \xrightarrow{f} Z \xleftarrow{g} Y$$

o pullback de homotopia de  $f$  e  $g$  define-se por

$$P = \{(x, \alpha, y) \in X \times Z^{[0,1]} \times Y : \alpha(0) = f(x), \alpha(1) = g(y)\}.$$

Sendo  $\pi_1 : P \rightarrow X$  e  $\pi_3 : P \rightarrow Y$  as projecções, mostre que existe uma sucessão exacta longa

$$\cdots \rightarrow \pi_k(P) \xrightarrow{\pi_{1*}, -\pi_{3*}} \pi_k(X) \oplus \pi_k(Y) \xrightarrow{f_*, g_*} \pi_k(Z) \xrightarrow{\partial} \cdots$$

Tal como no caso conhecido da homologia, temos também uma sucessão exacta de homotopia associada a um terno  $Z \subset Y \subset X$  de espaços pontuados.

**Lema 4.10.** *Se  $(X, Y, Z)$  é um terno de espaços, temos uma sucessão exacta longa (no sentido habitual)*

$$\cdots \longrightarrow \pi_k(Y, Z) \xrightarrow{i_*} \pi_k(X, Z) \xrightarrow{i_*} \pi_k(X, Y) \xrightarrow{\partial} \pi_{k-1}(Y, Z) \longrightarrow \cdots$$

onde  $i_*$  são os homomorfismos induzidos pelas inclusões de pares e  $\partial$  é a composição das aplicações

$$\pi_k(X, Y) \xrightarrow{\partial} \pi_{k-1}(Y) \xrightarrow{i_*} \pi_{k-1}(Y, Z).$$

*Proof.* A demonstração é um exercício de "diagram chasing" nas sucessões exactas dos pares  $(X, Y)$ ,  $(Y, Z)$  e  $(X, Z)$ .  $\square$

**Nota 4.11.** Considerando o quadrado de inclusões

$$\begin{array}{ccc} Z & \longrightarrow & Y \\ \downarrow & & \downarrow \\ X & \xrightarrow{=} & X \end{array}$$

a sucessão exacta do lema anterior identifica-se com a sucessão exacta longa de homotopia da sucessão de fibração na linha de cima do diagrama 3 por 3 dado pela Proposição 3.63.

Além da sucessão exacta de uma fibração, o seguinte resultado dá-nos mais dois métodos básicos de cálculo de grupos de homotopia. Antes recordemos o seguinte resultado de Topologia Geral

**Lema 4.12.** Sejam  $X_k \rightarrow X_{k+1}$  inclusões de espaços  $T_1$  e  $X = \text{colim}_k X_k$  a união com a topologia final. Se  $K$  é um espaço compacto, e  $f : K \rightarrow X$  é uma aplicação contínua, então existe  $N$  tal que  $f(K) \subset X_N$ .

*Proof.* Suponhamos que o resultado é falso. Então, passando se necessário a uma subsucessão de  $\{X_k : k \in \mathbb{N}\}$ , podemos supor que existe uma sucessão  $x_n \in K$  com  $f(x_n) \in X_n \setminus X_{n-1}$ . Vamos mostrar que o subconjunto  $D = \{f(x_n) : n \in \mathbb{N}\} \subset f(K)$  é um subconjunto infinito sem pontos de acumulação, o que contradiz a compacidade de  $f(K)$ . Por hipótese  $D$  é um conjunto infinito.

Designando por  $i_k : X_k \rightarrow X$  as aplicações canónicas, vemos que para todo o  $k$ ,  $i_k^{-1}(D)$  é um conjunto finito e logo um fechado de  $X_k$ . Por definição da topologia final,  $D$  é fechado em  $X$ .

Fixando  $n \in \mathbb{N}$ ,  $i_k^{-1}(D \setminus \{f(x_n)\}) = \{f(x_1), \dots, f(x_k)\} \setminus \{f(x_n)\} \subset X_k$  é também um conjunto finito e portanto fechado. Logo os conjuntos singulares  $\{f(x_k)\}$  são abertos relativos de  $D$ , e logo  $D$  é um conjunto discreto. Como também é fechado não tem pontos de acumulação o que conclui a demonstração.  $\square$

**Nota 4.13.** Note-se que só podemos garantir que as aplicações canónicas  $X_k \rightarrow X$  são mergulhos adicionando algumas hipóteses, como por exemplo a de as inclusões  $X_k \rightarrow X_{k+1}$  serem fechadas (nesse caso  $X_k \rightarrow X$  é também uma aplicação fechada). Nesse caso o lema anterior diz que a aplicação  $K \rightarrow X$  se factoriza através de uma das aplicações canónicas  $X_k \rightarrow X$ .

**Proposição 4.14.** (a) A aplicação canónica

$$\pi_k(\prod_{\alpha} X_{\alpha}) \rightarrow \prod_{\alpha} \pi_k(X_{\alpha})$$

é um isomorfismo.

(b) Se  $X_k \rightarrow X_{k+1}$  são inclusões fechadas de espaços  $T_1$  e  $X = \text{colim} X_k$  é a união com a topologia final, a aplicação canónica

$$\text{colim } \pi_n(X_k) \rightarrow \pi_n(X)$$

é um isomorfismo.

*Proof.* A afirmação (a) é clara. Mais geralmente tem-se  $[A, \prod_{\alpha} X_{\alpha}] = \prod_{\alpha} [A, X_{\alpha}]$  para qualquer  $A$  pela propriedade universal da topologia produto (o mesmo sendo verdade para espaços pontuados e classes de homotopia pontuadas).

Um modelo para o colimite de um diagrama de grupos (respectivamente grupos abelianos)

$$G_1 \xrightarrow{\phi_1} \dots \rightarrow G_n \xrightarrow{\phi_n} \dots$$

é dado por

$$\left(\coprod_n G_n\right)/R$$

onde  $\coprod$  designa o produto livre (respectivamente a soma directa) e  $R$  designa o subgrupo normal gerado pelos elementos  $g_n \phi_n(g_n)^{-1}$ , juntamente com as aplicações canónicas

$$G_n \rightarrow \coprod G_n \rightarrow \left(\coprod_n G_n\right)/R.$$

Seja

$$\psi: \text{colim } \pi_n(X_k) \rightarrow \pi_n(X)$$

a aplicação induzida pelas aplicações canónicas  $X_k \rightarrow X$  (que nas condições do enunciado são mergulhos). Pelo lema e nota anteriores, todo o representante  $f: S^k \rightarrow X$  de um elemento de  $\pi_k(X)$  se factoriza por uma inclusão  $X_N \rightarrow X$  o que mostra que  $\psi$  é um epimorfismo.

Um elemento  $\alpha \in \ker \psi$  é representado por uma palavra (ou uma soma finita) de elementos em  $\alpha_i \in \pi_n(X_{k_i})$ . Tomando  $N = \max\{k_i\}$  vemos que  $\alpha$  é a imagem de um elemento  $\beta \in \pi_n(X_N)$ . Seja  $g: S^k \rightarrow X_N$  um representante de  $\beta$ ,  $i_N: X_N \rightarrow X$  a inclusão e  $H: S^k \times [0, 1] \rightarrow X$  uma nulhomotopia de  $i_N \circ g$ . Novamente pelo lema e nota anteriores vemos que existe  $M$  tal que  $H$  se factoriza pela inclusão  $X_M \rightarrow X$ . Isto mostra que  $\beta$  está no núcleo do homomorfismo  $\pi_k(X_N) \rightarrow \pi_k(X_M)$  induzido pela inclusão e portanto representa o elemento trivial em  $\text{colim } \pi_k(X_N)$ .  $\square$

**Exercício 4.15.** Sendo  $\mathbb{R}P^\infty = \cup_{n=1}^\infty \mathbb{R}P^n$  e definindo análogamente os espaços projectivos complexo e quaterniónicos de dimensão infinita,  $\mathbb{C}P^\infty$  e  $\mathbb{H}P^\infty$ , mostre que

$$\pi_k(\mathbb{R}P^\infty) = \begin{cases} \mathbb{Z}/2 & \text{se } k = 1 \\ 0 & \text{se } k \neq 1 \end{cases}$$

$$\pi_k(\mathbb{C}P^\infty) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{se } k = 2 \\ 0 & \text{se } k \neq 2 \end{cases}$$

e

$$\pi_k(\mathbb{H}P^\infty) \simeq \pi_{k-1}(S^3)$$

para  $k \geq 1$ .

**Dependência do ponto de base.** Seja  $(A, *)$  um espaço bem pontuado e  $(X, *)$  um espaço pontuado. Se  $A$  é localmente compacto e Hausdorff, então pela Proposição 3.26, temos uma fibração

$$\text{Map}(A, X) \longrightarrow \text{Map}(*, X) = X$$

com fibra  $\text{Map}_*(A, X)$ . A sucessão exacta longa de homotopia inclui a secção

$$\pi_1(X) \longrightarrow \pi_0(\text{Map}_*(A, X)) = [A, X]_* \longrightarrow \pi_0(\text{Map}(A, X)) = [A, X]$$

Uma vez que a aplicação da direita é claramente sobrejectiva, a exactidão da sucessão de homotopia implica o seguinte resultado (no caso em que  $A$  é localmente compacto e Hausdorff).

**Proposição 4.16.** *Se  $(A, *)$  é um espaço bem pontuado e  $(X, *)$  é um espaço pontuado, o grupo fundamental de  $X$  age no conjunto de classes de homotopia pontuadas  $[A, X]$  tendo por quociente o conjunto das classes de homotopia. Isto é*

$$[A, X] = [A, X]_* / \pi_1(X)$$

*Proof.* O caso geral demonstra-se por aplicação da propriedade de extensão das homotopias ao par  $(A, *)$  (exercício).  $\square$

**Exercício 4.17.** *Se  $\Sigma$  uma superfície fechada (isto é, compacta e sem bordo), estabeleça uma bijecção entre o conjunto das classes de homotopia  $[\Sigma, S^2]$  e os números inteiros.*

Como a fibra sobre  $x \in X$  da aplicação  $\text{Map}(A, X) \rightarrow X$  é o espaço das aplicações pontuadas  $(A, *) \rightarrow (X, x)$ , o Corolário 3.42 (ou a propriedade de extensão das homotopias no caso em que  $A$  não é localmente compacto e Hausdorff) dá-nos uma representação do grupóide fundamental de  $X$  nas classes de homotopia pontuadas  $[A, X]_*$  para as várias escolhas de ponto de base em  $X$ . Em particular, um caminho  $\alpha : [0, 1] \rightarrow X$  com  $\alpha(0) = x_0$  e  $\alpha(1) = x_1$  determina uma bijecção

$$\tau_\alpha : [(A, *), (X, x_0)]_* \rightarrow [(A, *), (X, x_1)]_*$$

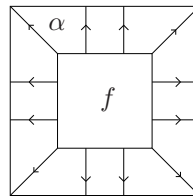
Interessa ter uma descrição geométrica desta acção do grupo fundamental nos grupos de homotopia. Se  $f : [0, 1]^k \rightarrow X$  representa um elemento  $\beta \in \pi_k(X, x_0)$  e  $\alpha : [0, 1] \rightarrow X$  é um caminho que une  $x_0$  a  $x_1$ , então

$$\tau_\alpha(\beta) \in \pi_k(X, x_1)$$

é de acordo com a definição da acção de monodromia representado por um elemento  $g : [0, 1]^k \rightarrow X$  que se obtém aplicando a propriedade de extensão das homotopias a  $f$  e à homotopia  $H : \partial([0, 1]^k) \times [0, 1]$  dada por

$$H(x, t) = \alpha(t).$$

Claramente uma escolha possível para a aplicação  $g(y) = \tilde{H}(y, 1)$  é a representada na seguinte figura:



De facto, podemos estender a homotopia retraindo  $[0, 1]^k \times [0, 1]$  em  $[0, 1]^k \times 0 \cup \partial([0, 1]^k) \times [0, 1]$  por meio da projecção radial a partir do ponto  $(\frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{2}, 2)$  e nesse caso a restrição à face  $[0, 1]^k \times 1$  é a descrita pela figura acima.

**Nota 4.18.** *Note-se que a acção do grupo fundamental nele próprio é simplesmente a acção de conjugação.*

**Proposição 4.19.** *Se  $\alpha$  é um caminho que une  $x_0$  a  $x_1$ ,  $\tau_\alpha : \pi_k(X, x_0) \rightarrow \pi_k(X, x_1)$  é um isomorfismo de grupos.*

*Proof.* Usando a descrição geométrica anterior é fácil descrever uma homotopia entre  $\tau_\alpha(\beta_1 + \beta_2)$  e  $\tau_\alpha(\beta_1) + \tau_\alpha(\beta_2)$ .  $\square$

Outro resultado imediato é a naturalidade desta acção dos caminhos.

**Proposição 4.20.** *Se  $f : X \rightarrow Y$  é uma aplicação e  $\alpha : [0, 1] \rightarrow X$  é um caminho com  $\alpha(0) = x_0$  e  $\alpha(1) = x_1$ , o seguinte diagrama comuta*

$$\begin{array}{ccc} \pi_k(X, x_0) & \xrightarrow{f_*} & \pi_k(Y, f(x_0)) \\ \tau_\alpha \downarrow & & \downarrow \tau_{f_*\alpha} \\ \pi_k(X, x_1) & \xrightarrow{f_*} & \pi_k(Y, f(x_1)) \end{array}$$

**Definição 4.21.** *Um espaço  $X$  diz-se  $n$ -simples se  $\pi_1(X, x_0)$  age trivialmente em  $\pi_n(X, x_0)$  para toda a escolha de ponto de base  $x_0 \in X$ . Um espaço diz-se simples ou abeliano se é  $n$ -simples para todo o  $n$ .*

Uma fonte importante de espaços simples é a dos espaços que dispõem de uma multiplicação. Estes espaços chamam-se  $H$ -espaços ou espaços de Hopf.

**Definição 4.22.** *Um espaço pontuado  $(X, *)$  diz-se um  $H$ -espaço se existe uma aplicação  $\mu : X \times X \rightarrow X$  tal que o diagrama*

$$\begin{array}{ccccc} * \times X & \longrightarrow & X \times X & \longleftarrow & X \times * \\ & \searrow \text{id}_X & \downarrow \mu & \swarrow \text{id}_X & \\ & & X & & \end{array}$$

*comuta na categoria de homotopia.*

**Nota 4.23.** *Por vezes, na definição de  $H$ -espaço exige-se que o ponto de base seja uma unidade estrita para a multiplicação. Na prática não se trata de uma diferença importante pois se o espaço em questão é bem pontuado, a propriedade da extensão das homotopias permite substituir qualquer multiplicação no sentido da definição anterior por uma multiplicação homotópica que admite o ponto de base como unidade estrita.*

Os grupos topológicos são exemplos de  $H$ -espaços, assim como os espaços de laços  $\Omega A$  com o produto dado pela concatenação de caminhos. Todos estes são na realidade  $H$ -espaços *associativos* no sentido em que os diagramas

$$\begin{array}{ccccc} (X \times X) \times X & \xrightarrow{\mu \times \text{id}_X} & X \times X & \xleftarrow{\text{id}_X \times \mu} & X \times (X \times X) \\ & \searrow & \downarrow \mu & \swarrow & \\ & & X & & \end{array}$$

comutam na categoria de homotopia. Um exemplo de um  $H$ -espaço não associativo é a esfera  $S^7$  com o produto dado pela multiplicação dos octonionês.

**Exercício 4.24.** *Mostre que um  $H$ -espaço é um espaço simples.*

**Exercício 4.25.** *Seja  $X$  um  $H$ -espaço associativo com multiplicação  $\mu$ . Um inverso para a multiplicação  $\mu$  é uma aplicação  $\iota : X \rightarrow X$  tal que*

$$x \mapsto \mu(\iota(x), x) \quad e \quad x \mapsto \mu(x, \iota(x))$$

*são homotópicas à aplicação constante no ponto de base. A aplicação de corte é a aplicação*

$$X \times X \rightarrow X \times X$$

definida por

$$(x, y) \mapsto (x, \mu(x, y)).$$

Mostre que  $(X, \mu)$  admite um inverso para a multiplicação sse a aplicação de corte é uma equivalência de homotopia.

**Exemplo 4.26.** Seja  $X = S^1 \vee S^2$ , e  $\alpha$  um gerador de  $\pi_1(X)$  (representado pela inclusão  $S^1 \rightarrow S^1 \vee S^2$ ). Seja  $\beta \in \pi_2(X)$  o elemento representado pela inclusão  $S^2 \rightarrow S^1 \vee S^2$ . Note-se que  $\beta$  é um elemento não trivial de  $\pi_2(X)$  uma vez que o homomorfismo induzido em homologia por  $S^2 \rightarrow S^1 \vee S^2$  é não nulo. Vejamos que  $\tau_\alpha(\beta) \neq \beta$ .

O revestimento universal de  $X$  é o "colar infinito"

$$\tilde{X} = \mathbb{R} \cup (S^2 \times \mathbb{Z}) / \sim$$

onde  $\sim$  é a relação de equivalência gerada por

$$\mathbb{R} \ni n \sim (*, n) \in S^2 \times \mathbb{Z}$$

com a projecção  $p : \tilde{X} \rightarrow X$  definida por

$$p(x) = \begin{cases} e^{ix} & \text{se } x \in \mathbb{R} \\ y & \text{se } x = (y, n) \in S^2 \times \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Pelo Corolário 4.2  $p_* : \pi_2(\tilde{X}) \rightarrow \pi_2(X)$  é um isomorfismo.

Seja  $\tilde{\beta}_k \in \pi_2(\tilde{X}, k)$  o elemento representado pela inclusão  $S^2 = S^2 \times \{k\} \rightarrow \tilde{X}$ , e  $\tilde{\alpha}$  o levantamento de  $\alpha$  a partir de  $-1 \in \tilde{X}$ . Pela Proposição 4.20 temos

$$p_*(\tau_{\tilde{\alpha}}(\tilde{\beta}_{-1})) = \tau_\alpha(\beta)$$

e claramente

$$p_*(\beta_0) = \alpha.$$

Notemos agora que a imagem de um gerador de  $H_2(S^2)$  pela classe de homotopia de  $\tau_{\tilde{\alpha}}(\tilde{\beta}_{-1})$  é igual à imagem do gerador por  $\beta_{-1}$  (uma vez que as duas aplicações são livremente homotópicas). Conclui-se que  $\tilde{\beta}$  e  $\tau_{\tilde{\alpha}}(\tilde{\beta}_{-1})$  são elementos distintos de  $\pi_2(\tilde{X}, 0)$  pois levam um gerador de  $H_2(S^2)$  em geradores distintos de

$$H_2(\tilde{X}) = \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} \mathbb{Z}.$$

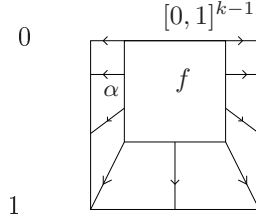
Uma vez que  $p_*$  é um isomorfismo conclui-se que  $\tau_\alpha(\beta) \neq \beta$ , e portanto a acção de  $\pi_1(X)$  em  $\pi_2(X)$  é não trivial. Na realidade não é difícil estender este argumento de forma a mostrar que a acção no elemento  $\beta$  é de facto livre e que os elementos  $\{\tau_{k\alpha}(\beta) : k \in \mathbb{Z}\}$  são linearmente independentes em  $\pi_2(X)$ .

Vemos assim, que contrariamente ao que sucede com os grupos de homologia, os grupos de homotopia de um complexo celular finito não são necessariamente finitamente gerados. Veremos mais tarde que tal não pode acontecer se o complexo finito em questão for simplesmente conexo. Note-se finalmente que o exercício anterior garante que  $X = S^1 \vee S^2$  não admite uma estrutura de  $H$ -espaço.

De forma semelhante, um caminho  $\alpha : [0, 1] \rightarrow A$  entre  $a_0$  e  $a_1 \in A$  determina uma bijecção  $\tau_\alpha : \pi_k(X, A, a_0) \rightarrow \pi_k(X, A, a_1)$  induzida pela aplicação de monodromia da fibração

$$\text{Map}((D^k, S^{k-1}), (X, A)) \rightarrow A$$

determinada por avaliação no ponto de base. É fácil verificar que geometricamente esta acção pode ser descrita pela Figura 1.

FIGURE 1. Acção de  $\pi_1(A, *)$  em  $\pi_k(X, A)$ .

O seguinte resultado é de verificação imediata.

**Proposição 4.27.** *Seja  $\alpha : [0, 1] \rightarrow A$  um caminho com  $\alpha(0) = a_0$  e  $\alpha(1) = a_1$ , e  $(X, A)$  é um par de espaços pontuados.*

(a) A aplicação

$$\tau_\alpha : \pi_k(X, A, a_0) \rightarrow \pi_k(X, A, a_1)$$

é um isomorfismo de grupos para  $k \geq 2$ .

(b) Os homomorfismos de bordo

$$\partial : \pi_k(X, A) \xrightarrow{\partial} \pi_{k-1}(A)$$

comutam com a acção de  $\pi_1(A)$ .

**Nota 4.28.** *Note-se que há ainda uma acção de  $\pi_1(X)$  em  $\pi_n(X, A)$  determinada pela aplicação de monodromia da fibração*

$$A \times_X X^{[0,1]} \rightarrow X$$

cuja fibra é a fibra de homotopia da inclusão  $A \rightarrow X$ . Uma escolha para a aplicação de monodromia

$$A \times_X \text{Map}_*([0, 1], X) \xrightarrow{\tau_\delta} A \times_X \text{Map}_*([0, 1], X)$$

desta fibração determinada por um caminho  $\delta : [0, 1] \rightarrow X$  é

$$\tau_\delta(a, \gamma) = (a, \delta * \gamma).$$

Daqui se reconhece facilmente (conforme a Figura 1) que, escrevendo  $i : A \rightarrow X$  para a inclusão, se  $\delta = i_*(\beta)$  então a acção de  $\delta$  em  $\pi_n(X, A)$  coincide com a acção de  $\beta$  definida acima.

Finalmente, a acção dos caminhos nos grupos de homotopia permite-nos descrever o efeito de uma homotopia livre no homomorfismo induzido por uma aplicação em grupos de homotopia.

**Proposição 4.29.** *Seja  $H : X \times [0, 1] \rightarrow Y$  uma homotopia entre  $f, g : X \rightarrow Y$ ,  $x_0 \in X$  e defina-se  $\alpha : [0, 1] \rightarrow X$  por  $\alpha(t) = H(x_0, t)$ . Então o seguinte diagrama é comutativo:*

$$\begin{array}{ccc} \pi_k(X, x_0) & \xrightarrow{f_*} & \pi_k(Y, f(x_0)) \\ & \searrow g_* & \swarrow \tau_\alpha \\ & \pi_k(Y, g(x_0)) & \end{array}$$



*Proof.* Se  $u : [0, 1]^k \rightarrow X$  é um representante de  $\gamma \in \pi_k(X, x_0)$ , a aplicação  $K : [0, 1]^k \times [0, 1] \rightarrow Y$  definida por

$$K(z, t) = H(u(z), t)$$

determina uma homotopia entre  $\tau_\alpha(f_*(\gamma))$  representado (mediante o homeomorfismo usual) pela restrição de  $K$  a  $[0, 1]^k \times \{0\} \cup (\partial[0, 1]^k) \times [0, 1]$  e  $g_*(\gamma)$  que é representado pela restrição de  $K$  a  $[0, 1]^k \times \{1\}$ .  $\square$

O resultado anterior tem como consequência a (não muito surpreendente) invariância de homotopia dos grupos de homotopia.

**Corolário 4.30.** *Se  $f : X \rightarrow Y$  é uma equivalência de homotopia,  $f_* : \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(Y, f(x_0))$  é um isomorfismo para todo o  $x_0 \in X$ .*

*Proof.* Seja  $g : Y \rightarrow X$  um inverso de homotopia para  $f$ . O diagrama

$$\begin{array}{ccc} \pi_k(X, x_0) & \xrightarrow{g_* \circ f_*} & \pi_k(X, gf(x_0)) \\ & \searrow \text{id} & \swarrow \simeq \\ & \pi_k(X, x_0) & \end{array}$$

mostra que  $g_* \circ f_*$  é um isomorfismo, pelo que  $f_*$  é um monomorfismo e  $g_*$  é um epimorfismo. Aplicando o mesmo argumento a  $g \circ f : (Y, f(x_0)) \rightarrow (Y, gf(x_0))$  vemos que  $g_*$  é também um monomorfismo e portanto um isomorfismo. Conclui-se que  $f_*$  é um isomorfismo.  $\square$

**Definição 4.31.** *Uma aplicação  $f : X \rightarrow Y$  diz-se uma equivalência de homotopia fraca se  $f(X)$  intersecta todas as componentes conexas por arcos de  $Y$  (isto é, é um isomorfismo em  $\pi_0$ ) e induz um isomorfismo*

$$\pi_k(X, x_0) \xrightarrow{f_*} \pi_k(Y, f(x_0))$$

para todos os pontos  $x_0 \in X$ .

O corolário anterior torna claro que uma equivalência de homotopia é uma equivalência de homotopia fraca. Vamos agora estudar uma classe importante de espaços onde o recíproco é verdade.

### 5. TEORIA DE HOMOTOPIA DE COMPLEXOS CELULARES

Recorde-se que um *complexo celular* ou *complexo CW* é um espaço  $X = \text{colim } X^n$  com  $X^0$  um espaço discreto e cada espaço  $X_{n+1}$  obtido de  $X_n$  através de um pushout<sup>20</sup>

$$\begin{array}{ccc} \coprod_\alpha S^n & \hookrightarrow & \coprod_\alpha D^{n+1} \\ \coprod f_\alpha \downarrow & & \downarrow \\ X^n & \longrightarrow & X^{n+1} \end{array}$$

O subespaço  $X^n$  chama-se o *esqueleto de dimensão n* de  $X$ . Uma aplicação  $f : X \rightarrow Y$  entre complexos celulares diz-se uma *aplicação celular* se  $f(X^n) \subset Y^n$ .

<sup>20</sup>Alternativamente  $X^{n+1}$  é a cofibra (não pontuada) da aplicação  $\coprod f_\alpha$ .

Mais geralmente, dado um espaço topológico  $A$  qualquer, um *complexo celular relativo*  $(X, A)$  é um espaço

$$X = \text{colim}(X, A)^n$$

onde  $(X, A)^0$  é a união disjunta de  $A$  com um conjunto discreto (as células-0) e os espaços  $(X, A)^n$  obtêm-se indutivamente por meio de pushouts

$$\begin{array}{ccc} \coprod_{\alpha} S^n & \hookrightarrow & \coprod_{\alpha} D^{n+1} \\ \Pi f_{\alpha} \downarrow & & \downarrow \\ (X, A)^n & \longrightarrow & (X, A)^{n+1}. \end{array}$$

Uma aplicação de pares  $f : (X, A) \rightarrow (Y, B)$  diz-se *celular* se preserva os esqueletos.

Vamos assumir alguma familiariedade com a topologia de complexos celulares. Uma boa referência é [Ha, Appendix A].

**Teoremas de Aproximação.** Começamos por ver vários resultados que nos permitem reduzir afirmações sobre espaços topológicos gerais ao caso de complexos celulares.

**Definição 5.1.** Um espaço  $X$  diz-se  $n$ -conexo para  $n \geq 0$  se  $\pi_k(X, x_0) = 0$  para todo o  $k \leq n$  e  $x_0 \in X$ . Um par  $(X, A)$  diz-se  $n$ -conexo para  $n \geq 1$  se  $A$  intersecta todas as componentes conexas por arcos de  $X$  e  $\pi_k(X, A, a) = 0$  para todo o  $k \leq n$  e  $a \in A$  (equivalentemente, se todas as fibras de homotopia da inclusão  $A \rightarrow X$  são  $(n-1)$ -conexas).

**Exemplo 5.2.**  $S^n$  é  $(n-1)$ -conexo pelo teorema da aproximação simplicial. A sucessão exacta longa de homotopia do par  $(D^{n+1}, S^n)$  mostra que este é  $n$ -conexo.

**Definição 5.3.** Uma aplicação  $f : X \rightarrow Y$  diz-se uma  $n$ -equivalência para  $n \geq 0$  se para todo o  $x_0 \in X$ , o homomorfismo

$$f_* : \pi_k(X, x_0) \rightarrow \pi_k(Y, f(x_0))$$

é sobrejectivo para  $0 \leq k \leq n$  e injectivo para  $k < n$ .

Assim, uma equivalência de homotopia fraca é simplesmente uma aplicação que é uma  $n$ -equivalência para todo o  $n$ . Note-se ainda que a sucessão exacta longa de uma fibração mostra que  $f$  é uma  $n$ -equivalência sse todas as fibras de homotopia de  $f$  são  $(n-1)$ -conexas (convencionando que o conjunto vazio é  $(-\infty)$ -conexo).

**Nota 5.4.** A noção de conexidade de uma aplicação pode ser encarada como uma "avaliação" ou "norma" nos tipos de homotopia. Dois tipos de homotopia estão "próximos" se existe uma  $n$ -equivalência entre dois representantes com  $n$  grande. Em particular um tipo de homotopia é pequeno, ou está próximo de ser contráctil, se é representado por um espaço  $n$ -conexo com  $n$  grande. Esta situação é remanescente da avaliação  $p$ -ádica em  $\mathbb{Z}$ . Surpreendentemente, é possível desenvolver uma teoria de "cálculo" de funtores da categoria de homotopia nela própria usando esta noção de proximidade. Esta teoria tem paralelos espantosos com o cálculo usual em  $\mathbb{R}$ . A teoria deve-se a Thomas Goodwillie e é neste momento uma das áreas de grande actividade em teoria de homotopia. Ver [Go1, Go2, Go3].

**Lema 5.5.** (a) Uma aplicação  $f : S^n \rightarrow X$  representa a classe nula em  $\pi_n(X, f(*))$  sse se factoriza pela inclusão de  $S^n$  em  $D^{n+1}$ .

$$\begin{array}{ccc} S^n & \xrightarrow{f} & X \\ \downarrow & \nearrow & \\ D^{n+1} & & \end{array}$$

(b) Uma aplicação  $f : (D^n, S^{n-1}) \rightarrow (X, A)$  representa a classe nula em  $\pi_n(X, A, f(*))$  sse existe uma homotopia entre  $f$  e uma aplicação  $g : (D^n, S^{n-1}) \rightarrow (X, A)$  com  $g(D^n) \subset A$ .

*Proof.* Demonstramos apenas (b). A demonstração de (a) é semelhante e fica como exercício. Claramente se  $f$  representa a classe trivial existe uma aplicação  $g$  nas condições do enunciado (na realidade com  $g(D^n) = *$ ). Reciprocamente, dada  $g : D^n \rightarrow X$  e  $H : (D^n, S^{n-1}) \times [0, 1] \rightarrow X$  uma homotopia relativa entre  $f$  e  $g$  podemos construir uma homotopia relativa pontuada entre  $f$  e a aplicação constante compondo  $H$  com uma aplicação

$$\pi : D^n \times [0, 1] \rightarrow D^n \times [0, 1]$$

satisfazendo as seguintes condições

- $\pi(S^{n-1} \times [0, 1]) \subset S^{n-1} \times [0, 1] \cup D^n \times 1$ ,
- $\pi(D^n \times 1 \cup * \times [0, 1]) = * \times 0$ .

Fica como exercício a construção de uma tal aplicação. □

**Lema 5.6** (de Aproximação Regular). *Sejam  $U \subset \mathbb{R}^n$  e  $V \subset \mathbb{R}^m$  abertos limitados e  $f : U \rightarrow V$  uma aplicação contínua. Dados abertos  $W, Z$  com*

$$W \subset \overline{W} \subset Z \subset \overline{Z} \subset U$$

*e  $\delta > 0$ , existe uma aplicação  $g : U \rightarrow V$  chamada uma aproximação regular para  $f$  tal que*

- $f|_{U-Z} = g|_{U-Z}$ ,
- $g|_W$  é  $C^\infty$ ,
- $g \simeq f$  relativamente a  $U - Z$  através de uma homotopia  $H : U \times [0, 1] \rightarrow V$  tal que  $|H(x, t) - f(x)| < \delta$  para todo o  $x \in U$  e  $t \in [0, 1]$ .

*Proof.* Seja  $\epsilon' > 0$  tal que  $B_{\epsilon'}(f(x)) \subset V$  para todo o  $x \in \overline{Z}$  e tome-se  $\epsilon = \min\{\epsilon', \delta\}$ .

É fácil ver (coordenada a coordenada) que existe uma função  $g : U \rightarrow \mathbb{R}^m$  satisfazendo as primeiras duas condições do enunciado e ainda  $|g(x) - f(x)| < \epsilon$  para todo o  $x \in U$ . Como  $B_\epsilon(f(x)) \subset V$ , o segmento de recta que une  $g(x)$  a  $f(x)$  está contido em  $V$  pelo que a homotopia

$$H(x, t) = (1 - t)g(x) + tf(x), \quad t \in [0, 1]$$

satisfaz as condições do enunciado. □

Para uma versão simplicial (de uma generalização) deste resultado, ver [Ha, Lemma 4.10].

**Lema 5.7.** *Se  $(X, A)$  é um complexo celular relativo,  $K$  é compacto e  $f : K \rightarrow X$  é contínua,  $f(K)$  intersecta apenas um número finito de células de  $(X, A)$ .*

*Proof.* A demonstração é muito semelhante à do Lema 4.12 e fica como exercício (ou ver [Ha, Proposition A.1]). □

**Lema 5.8.** *Se  $(X, A)$  é um complexo celular relativo, o par  $(X, (X, A)^n)$  é  $n$ -conexo.*

*Proof.* Seja  $k \leq n$ , e  $f : (D^k, S^{k-1}) \rightarrow (X, (X, A)^n)$  uma aplicação. De acordo com o Lema 5.5 temos a mostrar que  $f$  se deforma numa aplicação  $g$  com  $g(D^k) \subset (X, A)^n$ .

Pelo Lema 5.7,  $f(D^k)$  intersecta apenas um número finito de células de  $(X, A)$ . Pelo mesmo lema, o fecho de cada uma destas intersecta apenas um número finito de células de dimensão inferior. Por indução concluímos que  $f(D^k)$  está contido num complexo celular relativo finito  $(Y, A)$ . Por indução (começando com as células de dimensão mais alta de  $Y$ ), basta considerar o caso em que  $X$  se obtém de  $A$  colando uma única célula  $e^m$  de dimensão  $m > n$ .

Para  $0 < r < 1$  escrevemos  $e_r^m = \{x \in e^m : |x| < r\}$ . Por definição  $e^m = e_1^m \subset \mathbb{R}^m$ . Vamos usar o Lema 5.6 com  $U = \text{Int } D^k$ ,  $V = e^m$ ,  $W = f^{-1}(e_{\frac{1}{4}}^m)$ ,  $Z = f^{-1}(e_{\frac{1}{2}}^m)$  e  $\delta = \frac{1}{4}$ .

O lema produz uma aplicação  $g : D^k \rightarrow X$  homotópica a  $f$  relativamente a  $S^{k-1}$  tal que o centro da célula  $e^m$ ,  $0 \in e^m$  não pertence a  $g(D^k \setminus W)$ . Existe portanto uma vizinhança de  $0$ ,  $N \subset e^m$  tal que  $g(D^k \setminus W) \cap N = \emptyset$ . Como  $g|_W$  é  $C^\infty$ , existe um ponto  $y \in N$  tal que  $y \notin g(D^k)$ .

Seja  $R : (Y \setminus \{y\}) \times [0, 1] \rightarrow Y \setminus \{y\}$  uma deformação de  $Y \setminus \{y\}$  com  $R((Y \setminus \{y\}) \times 1) \subset Y \setminus e^m$ . Então  $R \circ g$  deforma  $g$  numa aplicação  $h$  com  $h(D^k) \subset A$  o que conclui a demonstração.  $\square$

**Exemplo 5.9.** Se  $X$  é um complexo celular com uma 0-célula e todas as outras células de dimensão  $> n$ , então  $X$  é  $n$ -conexo (uma vez que isto é equivalente a dizer que  $(X, *)$  é  $n$ -conexo). Em particular, se  $A$  é um complexo celular qualquer

$$\Sigma^n A = A \wedge S^n$$

é  $(n-1)$ -conexo, uma vez que a estrutura celular natural de  $A \wedge S^n$  tem uma única célula de dimensão 0 e uma célula em dimensão  $n+k$  para cada célula de dimensão  $k$  de  $A$ .

O seguinte resultado, chamado propriedade do levantamento e extensão das homotopias, resume o passo fundamental em muitos argumentos de teoria de homotopia de complexos celulares como veremos nas demonstrações dos resultados que se seguem.

**Teorema 5.10 (HELP).** *Seja  $(X, A)$  um complexo celular relativo de dimensão  $\leq n$ ,  $f : Y \rightarrow Z$  uma  $n$ -equivalência,  $u : A \rightarrow Y$ ,  $v : X \rightarrow Z$  e  $H : A \times [0, 1] \rightarrow Z$  uma homotopia entre  $v|_A$  e  $f \circ u$ . Então existem  $w : X \rightarrow Y$  com  $w|_A = u$  e  $\tilde{H} : X \times [0, 1] \rightarrow Z$  uma homotopia entre  $w$  e  $v$  que estende  $H$ . Isto é, dado um quadrado que comuta a menos de uma homotopia  $H$*

$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & X \\ \downarrow u & \nearrow w & \downarrow v \\ Y & \xrightarrow{f} & Z \end{array}$$

*existe uma aplicação  $w$  que faz o triângulo superior comutar e o triângulo inferior comutar a menos de uma homotopia  $\tilde{H}$  que estende  $H$ .*

*Proof.* Consideremos primeiro o caso  $(X, A) = (D^k, S^{k-1})$  com  $0 \leq k \leq n$ . Os dados da hipótese do teorema correspondem então precisamente a uma aplicação

$$F : S^{k-1} \times [0, 1] \cup D^k \times \{1\} \rightarrow Z$$

tal que  $F|_{S^{k-1} \times [0, 1]}$  se factoriza por  $f$ . A correspondência é estabelecida pela fórmula

$$F(x) = \begin{cases} H(y, t) & \text{se } x = (y, t) \in S^{k-1} \times [0, 1] \\ g(x) & \text{se } x \in D^k \times \{1\}. \end{cases}$$

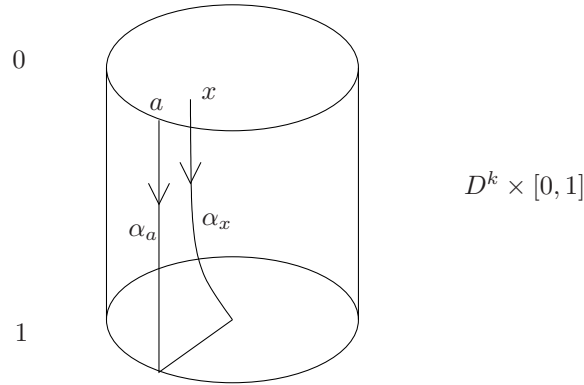
O que pretendemos demonstrar é a existência de uma extensão  $\bar{F}$  de  $F$  a  $D^k \times [0, 1]$  de tal forma que  $F|_{D^k \times \{0\}} \rightarrow Z$  se factorize por  $f : Y \rightarrow Z$ .

Seja  $z = v(0) \in Z$ . A Figura 2 explica como identificar uma tal aplicação  $F$  com uma aplicação

$$\phi : S^{k-1} \rightarrow F_f = \{(y, \alpha) \in Y \times Z^{[0,1]} : \alpha(0) = f(y), \alpha(1) = z\}$$

onde  $F_f$  designa a fibra de homotopia de  $f$  sobre  $z$ , e  $\bar{F}$  com uma extensão  $\bar{\phi}$  de  $\phi$  a  $D^k$ . A correspondência é dada pelas fórmulas  $\phi(a) = (u(a), F \circ \alpha_a)$  para  $a \in S^{k-1}$  e  $\bar{\phi}(x) = (w(x), \bar{F} \circ \alpha_x)$  para  $x \in D^k$ .

FIGURE 2.



Uma vez que  $f : Y \rightarrow Z$  é uma  $n$ -equivalência sse a fibra de homotopia  $F_f$  sobre cada  $z \in Z$  é  $(n-1)$ -conexa, o Lema 5.5 garante a existência da extensão  $\bar{\phi}$ .

Vamos agora tratar o caso de um complexo celular relativo  $(X, A)$  construindo  $w$  e  $\tilde{H}$  indutivamente nos esqueletos  $(X, A)^k$ . Para  $k = 0$  escolhemos para cada  $x \in (X, A)^0 \setminus A$  um ponto  $y \in Y$  com  $f(y)$  na componente conexa por arcos de  $w(x)$  e um caminho  $\alpha : [0, 1] \rightarrow Z$  entre  $f(y)$  e  $w(x)$  e definimos  $v(x) = y$ ,  $\tilde{H}(x, t) = \alpha(t)$ .

Suponhamos indutivamente que temos uma aplicação  $w_{k-1} : (X, A)^{k-1} \rightarrow Y$  com  $w_{k-1}|_A = u$  e uma homotopia  $\tilde{H}_{k-1} : (X, A)^{k-1} \times [0, 1] \rightarrow Z$  entre  $f \circ w_{k-1}$  e

$v$  estendendo  $H$ . Consideremos o diagrama

$$\begin{array}{ccc}
 \coprod S^{k-1} & \hookrightarrow & \coprod D^k \\
 \downarrow & \nearrow & \downarrow \\
 (X, A)^{k-1} & \xrightarrow{\quad} & (X, A)^k \\
 \downarrow w_{k-1} & \nearrow & \downarrow v|_{(X, A)^k} \\
 Y & \xrightarrow{f} & Z
 \end{array}$$

onde o quadrado superior é um pushout. A propriedade universal do pushout e o caso particular provado anteriormente garantem-nos a existência de  $w_k : (X, A)^k \rightarrow Y$  com  $w_k|_{(X, A)^{k-1}} = w_{k-1}$  e uma homotopia  $\tilde{H}_k : (X, A)^k \times [0, 1] \rightarrow Z$  entre  $v|_{(X, A)^k}$  e  $f \circ w_k$ , o que conclui a demonstração.  $\square$

**Nota 5.11.** *Note-se que se  $n = \infty$ , isto é, se  $f$  é uma equivalência fraca, podemos aplicar o Teorema anterior a um complexo celular relativo arbitrário  $(X, A)$ .*

**Nota 5.12.** *O caso  $Z = Y$ , e  $f = \text{id}_Y$  no Teorema 5.10 é precisamente a propriedade da extensão das homotopias para o par  $(X, A)$ .*

**Teorema 5.13.** *Seja  $X$  um complexo celular e  $f : Y \rightarrow Z$  uma  $n$ -equivalência. Então*

- (i) *Se  $\dim X \leq n$ ,  $f_* : [X, Y]_{(*)} \rightarrow [X, Z]_{(*)}$  é uma aplicação sobrejectiva.*
- (ii) *Se  $\dim X < n$ ,  $f_* : [X, Y]_{(*)} \rightarrow [X, Z]_{(*)}$  é uma aplicação injectiva.*

*Proof.* A sobrejectividade é uma consequência imediata do Teorema 5.10 aplicado a  $X$  e a  $A = \emptyset$  no caso não pontuado, e a  $A = \{*\}$  no caso pontuado.

Para verificar a segunda afirmação no caso não pontuado, sejam  $v, v' : X \rightarrow Y$  e  $H : X \times [0, 1] \rightarrow Z$  uma homotopia entre  $f \circ v$  e  $f \circ v'$ . Uma aplicação do Teorema 5.10 ao diagrama

$$\begin{array}{ccc}
 X \times \{0, 1\} & \hookrightarrow & X \times [0, 1] \\
 v \amalg v' \downarrow & \nearrow H' & \downarrow H \\
 Y & \xrightarrow{f} & Z
 \end{array}$$

produz uma homotopia  $H'$  entre  $v$  e  $v'$ . No caso pontuado basta substituir  $X \times \{0, 1\}$  no diagrama acima por  $X \times \{0, 1\} \cup \{*\} \times [0, 1] \subset X \times [0, 1]$ .  $\square$

Note-se novamente que no caso  $n = \infty$  o teorema anterior garante que uma equivalência fraca  $f$  induz uma bijecção

$$[X, Y]_{(*)} \xrightarrow{f_*} [X, Z]_{(*)}$$

para todo o complexo celular  $X$ . Uma consequência formal deste facto é o seguinte resultado fundamental.

**Teorema 5.14** (J. H. C. Whitehead). *Se  $f : Y \rightarrow Z$  é uma equivalência fraca entre complexos celulares, então  $f$  é uma equivalência de homotopia.*

*Proof.* Pelo teorema anterior existe  $g : Y \rightarrow X$  tal que  $f_*([g]) = [\text{id}_Y] \in [Y, Y]$ , isto é tal que  $f \circ g \simeq \text{id}_Y$ . Por outro lado  $f_*([g \circ f]) = [f \circ g \circ f] = [f] \in [X, Y]$ . Uma vez que  $f_*([\text{id}_X]) = [f]$  e  $f_*$  é injectiva temos portanto que  $[f \circ g] = [\text{id}_X]$  logo  $g$  é um inverso de homotopia para  $f$ .  $\square$

**Nota 5.15.** *A demonstração do teorema anterior mostra mais precisamente que uma  $n$ -equivalência entre complexos celulares de dimensão  $< n$  é uma equivalência de homotopia.*

Note-se que a conclusão do Teorema de Whitehead é ainda válida para espaços com o tipo de homotopia de complexos celulares. De facto se  $f : X \rightarrow Y$  é uma equivalência fraca e  $g : C \rightarrow X$ ,  $h : Y \rightarrow D$  são equivalências de homotopia com complexos celulares, então  $h \circ f \circ g : C \rightarrow D$  é uma equivalência de homotopia fraca (pelo Corolário 4.30) e portanto pelo Teorema de Whitehead, uma equivalência de homotopia. Uma vez que  $g$  e  $h$  são equivalências de homotopia conclui-se que  $f$  é também uma equivalência de homotopia.

A classe dos espaços com o tipo de homotopia dos complexos celulares é bastante mais geral e contém por exemplo, por um teorema de Milnor, os espaços  $\text{Map}(K, X)$  se  $X$  é um complexo celular e  $K$  é compacto (ver [Mln] ou [RF, Corollary 5.3.6]).

Eis uma consequência interessante do Teorema de Whitehead.

**Corolário 5.16.** *Seja  $(X, \mu)$  um  $H$ -espaço associativo do tipo de homotopia de um complexo celular. Se para cada  $x \in X$ , a aplicação  $y \mapsto \mu(x, y)$  é uma equivalência de homotopia fraca (isto acontece por exemplo, se  $X$  é conexo por arcos) então  $\mu$  dispõe de um inverso.*

*Proof.* Uma vez que  $\mu$  induz a multiplicação nos grupos de homotopia, a condição do enunciado implica que a aplicação de corte  $X \times X \rightarrow X \times X$  dada por

$$(x, y) \mapsto (x, \mu(x, y))$$

é uma equivalência fraca, e portanto uma equivalência de homotopia. O resultado segue então do Exercício 4.25.  $\square$

Um outro resultado fundamental que é uma consequência simples do Teorema 5.10 é o seguinte

**Teorema 5.17** (da Aproximação Celular). *Sejam  $(X, A)$  e  $(Y, B)$  complexos celulares relativos e  $f : (X, A) \rightarrow (Y, B)$ . Existe uma aplicação celular  $g : (X, A) \rightarrow (Y, B)$  tal que  $g \simeq_A f$ .*

*Proof.* Construimos  $g$  indutivamente nos esqueletos. Convencionamos que  $(X, A)^{-1} = A$  e  $g_{-1} = f|_A$  e  $H_{-1} : A \times [0, 1] \rightarrow Y$  é a homotopia constante entre  $g_{-1}$  e  $f|_A$ . Uma vez que o par  $(Y, B)^{n+1} \hookrightarrow Y$  é uma  $(n+1)$ -equivalência (pelo Lema 5.8), para cada  $n \geq -1$ , o Teorema 5.10 aplicado ao diagrama

$$\begin{array}{ccc} (X, A)^n & \longrightarrow & (X, A)^{n+1} \\ \downarrow g_n & \nearrow g_{n+1} & \downarrow f|_{(X, A)^{n+1}} \\ (Y, B)^{n+1} & \hookrightarrow & Y \end{array}$$

garante a existência de  $g_{n+1}$  estendendo  $g_n$  e de uma homotopia  $H_{n+1}$  entre  $g_{n+1}$  e  $f|_{(X, A)^{n+1}}$  estendendo  $H_n$ . A aplicação  $g : (X, A) \rightarrow (Y, B)$  tal que  $g|_{(X, A)^n} = g_n$  é portanto a aplicação celular pretendida.  $\square$

O teorema anterior é um resultado algo semelhante ao teorema da aproximação simplicial. Por um lado aplica-se a espaços mais gerais, mas por outro garante apenas a possibilidade de substituir uma aplicação arbitrária por uma aplicação

celular. As aplicações celulares evitam patologias como as evidenciadas por curvas de Peano mas são muito menos rígidas que as aplicações simpliciais.

Um outro resultado fundamental em Topologia Algébrica é o Teorema de Aproximação CW que enunciamos a seguir. A ideia de aniquilar elementos de grupos de homotopia colando células, usada na demonstração da primeira parte do teorema é uma das técnicas básicas em teoria de homotopia e veremos em breve outras aplicações.

**Teorema 5.18** (da Aproximação CW). *Sejam  $X, Y$  espaços topológicos e  $f : X \rightarrow Y$  uma aplicação.*

- (1) *Existe um complexo celular  $CW(X)$  e uma equivalência de homotopia fraca  $\epsilon_X : CW(X) \rightarrow X$ .*
- (2) *Existe uma aplicação celular  $CW(f)$ , única a menos de homotopia, que faz o seguinte diagrama comutar a menos de homotopia*

$$\begin{array}{ccc} CW(X) & \xrightarrow{CW(f)} & CW(Y) \\ \epsilon_X \downarrow & & \epsilon_Y \downarrow \\ X & \xrightarrow{f} & Y \end{array}$$

*Proof.* (a) Sem perda de generalidade podemos supôr que  $X$  é conexo por arcos. Vamos construir indutivamente  $C^n$  e uma  $n$ -equivalência  $e_n : C^n \rightarrow X$  tais que  $C_{n-1}$  é um subcomplexo de  $C^n$  e  $e_n|_{C_{n-1}} = e_{n-1}$ . Podemos então tomar  $CW(X) = \text{colim } C^n$  e definir  $\epsilon_X$  pela equação  $\epsilon_X|_{C^n} = e_n$ . Sejam  $\{f_\alpha : S^1 \rightarrow X\}$  representantes de um conjunto de geradores de  $\pi_1(X, *)$ . Definimos

$$C_1 = \vee_\alpha S^1 \quad e_1 = \vee_\alpha f_\alpha.$$

É imediato da definição que  $e_1$  é sobrejectiva em  $\pi_1$  e um isomorfismo em  $\pi_0$  logo é uma 1-equivalência.

Suponhamos indutivamente que construímos já  $C^n$  e uma  $n$ -equivalência  $e_n$ . Sejam  $\{g_\beta : S^n \rightarrow C^n\}$  representantes de um conjunto de geradores de  $\ker e_{n*} \subset \pi_n(C^n)$  e  $\{f_\alpha : S^{n+1} \rightarrow X\}$  representantes de um conjunto de geradores de  $\pi_{n+1}X$ .

Seja  $C^{n+\frac{1}{2}}$  a cofibra de  $\vee_\beta g_\beta$  (isto é, o espaço que se obtém colando  $(n+1)$ -células a  $C^n$  pelas aplicações  $g_\beta$ ). Pela propriedade universal da cofibra de homotopia existe uma extensão  $e_{n+\frac{1}{2}}$  de  $e_n$  a  $C^{n+\frac{1}{2}}$ . Definimos

$$C^{n+1} = C^{n+\frac{1}{2}} \vee \vee_\alpha S^{n+1}$$

e

$$e_{n+1} = e_{n+\frac{1}{2}} \vee \vee_\alpha f_\alpha.$$

Temos portanto o diagrama

$$\begin{array}{ccccc} \vee_\alpha S^n & \xrightarrow{\vee g_\beta} & C^n & \xrightarrow{e_n} & X \\ & & \downarrow e_{n+\frac{1}{2}} & & \uparrow \\ & & C^{n+\frac{1}{2}} & & \\ & \searrow \phi & \downarrow j & \nearrow e_{n+1} & \\ & & C^{n+1} & & \end{array}$$



Uma vez que  $C^{n+1}$  se obtém de  $C^n$  colando  $(n+1)$ -células, a inclusão  $\phi : C^n \hookrightarrow C^{n+1}$  é uma  $n$ -equivalência. Por hipótese,  $e_n$  é também uma  $n$ -equivalência pelo que  $e_{n+1}$  é necessariamente uma  $n$ -equivalência. É ainda claro da definição que  $e_{n+1}$  induz um epimorfismo em  $\pi_{n+1}$ . Resta portanto demonstrar que  $e_{n+1}$  é injectiva em  $\pi_n$ . Seja  $\gamma \in \pi_n(C^{n+1})$  um elemento no núcleo de  $e_{n+1*}$ . Uma vez que  $\phi : C^n \hookrightarrow C^{n+1}$  é uma  $n$ -equivalência, existe  $\delta \in \pi_n C^n$  tal que  $\phi_*(\delta) = \gamma$ . A comutatividade do diagrama acima mostra que  $\delta \in \ker e_{n*}$  pelo que existem  $n_\beta \in \mathbb{Z}$  quase todos zero tais que

$$\delta = \sum_{\beta} n_{\beta} [g_{\beta}].$$

Conclui-se que

$$\gamma = \phi_*(\delta) = \sum_{\beta} n_{\beta} \phi_*([g_{\beta}]) = 0,$$

(uma vez que  $e_{n+\frac{1}{2}*}([g_{\beta}]) = 0$ ) e portanto  $e_{n+1}$  é uma  $(n+1)$ -equivalência.

(b) Uma vez que  $\epsilon_Y$  é uma equivalência de homotopia fraca, pelo Teorema 5.13 existe uma única classe de homotopia  $[CW(f)]$  tal que  $\epsilon_{Y*}([CW(f)]) = [f \circ \epsilon_X]$ . Pelo Teorema de Aproximação Celular existe um representante desta classe de homotopia que é uma aplicação celular.  $\square$

**Nota 5.19.** *A segunda afirmação no teorema anterior garante que uma escolha de  $CW(X)$  para cada espaço  $X$  determina um functor  $CW$  da categoria de homotopia nela própria, e uma transformação natural  $\epsilon : CW \rightarrow \text{Id}$ .*

O seguinte exercício dá duas propriedades universais da aplicação  $\epsilon_X$  na categoria da homotopia (que garante a unicidade na categoria de homotopia da aproximação  $\epsilon_X : CW(X) \rightarrow X$ ).

**Exercício 5.20.** *Mostre que  $\epsilon_X : CW(X) \rightarrow X$  é a aplicação final de um complexo celular para  $X$  e a equivalência fraca inicial a partir de um espaço para  $X$  (na categoria de homotopia).*

Modificando ligeiramente a demonstração do Teorema 5.17 é possível obter um functor  $CW : \text{Top} \rightarrow \text{Top}$  e uma transformação natural  $\epsilon_X : CW \rightarrow \text{Id}$ . De facto a razão porque não podemos garantir a functorialidade da construção de  $CW(X)$  e de  $\epsilon_X$  acima reside na escolha arbitrária de geradores de (sub)grupos de homotopia. Há no entanto uma escolha canónica para os geradores: em cada estágio podemos colar a  $C^n$  uma célula de dimensão  $n$  por cada par  $(g, H)$  com  $g : S^n \rightarrow C^n$  tal que  $e_n \circ g$  é nulhomotópica e  $H$  nulhomotopia de  $e_n \circ g$ , fazendo depois a soma wedge com uma cópia de  $S^{n+1}$  para cada aplicação contínua  $f : S^{n+1} \rightarrow X$ . No estágio inicial tomamos uma 0-célula para cada ponto de  $X$ . Existe então uma escolha canónica para a aplicação  $\epsilon_X$  e a construção é claramente functorial em  $\text{Top}$ .

A aproximação  $CW$  construída no parágrafo anterior é gigantesca mas esse é muitas vezes o preço a pagar pela functorialidade em Matemática. Pode ainda perguntar-se se existe uma aproximação celular "mínima". Veremos mais tarde que a resposta é afirmativa para espaços simplesmente conexos com grupos de homologia finitamente gerados (mas este modelo mínimo - chamado uma aproximação de homologia - está longe de ser functorial).

**Exemplo 5.21.** O espaço  $X = \{0\} \cup \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$  não tem o tipo de homotopia de um complexo celular. De facto, a aplicação

$$f : \mathbb{N}_0 \rightarrow X$$

definida por

$$f(n) = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{se } n \in \mathbb{N} \\ 0 & \text{se } n = 0 \end{cases}$$

é uma aproximação CW mas não existe nenhuma aplicação contínua  $g : X \rightarrow \mathbb{N}_0$  que induza uma inversa para  $f$  em  $\pi_0(-)$  (ou  $\{0\} = g^{-1}(0)$  teria de ser um aberto de  $X$ ). Temos assim também um exemplo de dois espaços  $A, B$  tais que existe uma equivalência de homotopia fraca  $f : A \rightarrow B$  mas não uma no sentido  $B \rightarrow A$ .

**Exercício 5.22.** *Mostre que a aplicação da "circunferência polaca"*

$$X = \{0\} \times [-2, 1] \cup [0, \frac{1}{2\pi}] \times \{-2\} \cup \{\frac{1}{2\pi}\} \times [-2, 0] \cup \{(x, \sin \frac{1}{x}) : x \in ]0, \frac{1}{2\pi}]\}$$

num ponto é uma equivalência de homotopia fraca<sup>21</sup> mas não uma equivalência de homotopia (portanto  $X$  é outro exemplo de um espaço que não tem o tipo de homotopia de um complexo celular).

**Definição 5.23.** *A relação de equivalência de homotopia fraca entre espaços topológicos é a relação de equivalência gerada por  $X \sim Y$  se existe uma equivalência de homotopia fraca  $f : X \rightarrow Y$ .*

Assim,  $X$  e  $Y$  são fracamente equivalentes sse existe um conjunto finito de espaços  $Z_i$  e equivalências de homotopia fracas

$$X \xleftarrow{\sim} Z_1 \xrightarrow{\sim} Z_2 \xleftarrow{\sim} \dots \xrightarrow{\sim} Y.$$

Este zig-zag pode no entanto ser simplificado como indica o seguinte exercício.

**Exercício 5.24.** *Mostre que  $X$  é fracamente equivalente a  $Y$  sse existe um complexo celular  $A$  e equivalências de homotopia fracas  $f, g$*

$$X \xleftarrow{f} A \xrightarrow{g} Y.$$

*Mostre ainda que este resultado não pode ser melhorado dando um exemplo de espaços  $X$  e  $Y$  que são fracamente equivalentes mas para os quais não existe nenhuma equivalência de homotopia fraca entre  $X$  e  $Y$ .*

**Nota 5.25.** *Uma vez que a maior parte dos espaços de interesse em Matemática são do tipo de homotopia de complexos celulares, o que interessa estudar é o tipo de homotopia fraco de um espaço. Aquilo que usualmente se chama a categoria de homotopia em Topologia Algébrica é a categoria que se obtém da categoria dos espaços topológicos invertendo formalmente<sup>22</sup> as equivalências de homotopia fracas. As "classes de homotopia" entre  $X$  e  $Y$  são então as setas nesta categoria localizada e um argumento semelhante ao do exercício anterior mostra que qualquer "classe de homotopia" é representada por um zig-zag  $X \xleftarrow{f} A \xrightarrow{g} Y$  em que  $f$  é uma equivalência fraca. O Teorema de Aproximação CW garante que esta categoria de homotopia é equivalente (mas não igual) à categoria cujos objectos são complexos celulares e cujos morfismos são classes de homotopia (no sentido usual do termo) de aplicações contínuas entre complexos celulares.*

É ainda válida a seguinte versão relativa do Teorema de Aproximação CW cuja demonstração é muito semelhante à do Teorema 5.18

<sup>21</sup>Diz-se que  $X$  é fracamente contráctil.

<sup>22</sup>Trata-se de um processo análogo à localização de um anel com respeito a um subconjunto multiplicativo familiar de Álgebra Comutativa.

**Teorema 5.26** (de Aproximação CW Relativa). *Dado um par de espaços  $(X, A)$  existe um par de complexos celulares  $(X', A')$  e uma aplicação de pares  $e : (X, A) \rightarrow (X', A')$  tal que  $e$  e  $e|_A$  são equivalências de homotopia fracas. Se  $(X, A)$  é  $n$ -conexo, podemos escolher  $X'$  de forma a que  $X' - A'$  consiste de células de dimensão  $> n$ .*

*Proof.* Começamos por escolher uma aproximação CW  $A' \rightarrow A$ .  $X'$  é o espaço que se obtém colando células a  $A'$  de forma a obter um isomorfismo  $\pi_k(X', A') \rightarrow \pi_k(X, A)$  como na demonstração do Teorema 5.18 (exercício). Claramente se  $(X, A)$  é  $n$ -conexo basta colar células de dimensão  $> n$ .  $\square$

**Exemplo 5.27.** Se  $X$  é um espaço  $n$ -conexo com  $n \geq 0$ , aplicando o teorema anterior ao par  $(X, x_0)$  com  $x_0 \in X$  vemos que  $X$  é fracamente equivalente a um complexo celular com uma única 0-célula e com todas as restantes células de dimensão  $> n$ . Pelo Lema 5.8 a existência de um tal complexo celular é uma caracterização dos espaços  $n$ -conexos.

### Excisão para grupos de homotopia.

**Definição 5.28.** *O pushout de homotopia ou cilindro duplo do diagrama*

$$B \xleftarrow{j} C \xrightarrow{i} A$$

é o espaço

$$M(i, j) = (B \amalg C \times [0, 1] \amalg A) / \sim$$

onde  $\sim$  é a relação de equivalência gerada por  $(c, 0) \sim j(c)$  e  $(c, 1) \sim i(c)$ .

Note-se que  $M(i, j)$  tem uma propriedade universal: dar uma aplicação contínua  $M(i, j) \rightarrow Y$  equivale a dar aplicações contínuas  $u : B \rightarrow Y$ ,  $v : C \rightarrow Y$  juntamente com uma homotopia  $H : C \times [0, 1] \rightarrow Y$  entre  $u \circ j$  e  $v \circ i$ .

**Lema 5.29.** *Se  $i$  é uma cofibração a aplicação canónica  $M(i, j) \rightarrow B \amalg_C A$  é uma equivalência de homotopia.*

*Proof.* Este resultado é uma consequência simples da Proposição 3.14 e fica portanto como exercício.  $\square$

**Definição 5.30.** *Um diagrama comutativo*

$$\begin{array}{ccc} C & \xrightarrow{i} & B \\ \downarrow j & & \downarrow \\ A & \longrightarrow & X \end{array}$$

diz-se um pushout de homotopia (fraco) se a aplicação canónica

$$M(i, j) \rightarrow X$$

é uma equivalência de homotopia (fraca)<sup>23</sup>.

**Definição 5.31.** *Uma tríade de espaços  $(X; A, B)$  consiste num espaço  $X$  e dois subespaços  $A \subset X$  e  $B \subset X$ . Uma tríade diz-se excisiva se  $X = \text{Int } A \cup \text{Int } B$ . Uma tríade CW é uma tríade  $(X; A, B)$  em que  $X$  é um complexo celular,  $A, B$  são subcomplexos e  $X = A \cup B$ .*

<sup>23</sup>Se o quadrado comuta apenas a menos de uma homotopia  $H$ , a homotopia determina uma aplicação canónica  $M(i, j) \rightarrow X$  e podemos fazer a definição análoga.

A palavra "excisiva" refere-se a excisão em homologia. Se  $(X; A, B)$  é uma tríade excisiva podemos aplicar o teorema de excisão para homologia ao subconjunto  $U = B \cap A^c$  para obter um isomorfismo

$$H_*(B, A \cap B) \xrightarrow{\sim} H_*(X, A),$$

e temos ainda a sucessão de Mayer-Vietoris

$$\cdots \rightarrow H_*(A \cap B) \rightarrow H_*(A) \oplus H_*(B) \rightarrow H_*(X) \rightarrow H_{*-1}(A \cap B) \rightarrow \cdots$$

**Exemplo 5.32.** Dado um diagrama

$$B \xleftarrow{j} C \xrightarrow{i} A$$

sejam  $U \subset M(i, j)$  a imagem de  $B \cup C \times [0, \frac{2}{3}[$  e  $V \subset M(i, j)$  a imagem de  $C \times ]\frac{1}{3}, 1] \cup A$ . Claramente a tríade  $(M(i, j); U, V)$  é excisiva e temos  $U \simeq A$ ,  $V \simeq B$  e  $C \simeq U \cap V$ .

Note-se que uma tríade CW não é excisiva. É no entanto equivalente a uma tríade excisiva uma vez que existem necessariamente abertos  $U \supset A$  e  $V \supset B$  de  $X$  que se retratam por deformação em  $A$  e  $B$  respectivamente e tais que  $U \cap V$  se retrata por deformação em  $A \cap B$ .

**Exemplo 5.33.** Pelo Lema 5.29, se  $(X; A, B)$  é uma tríade CW, então o diagrama

$$\begin{array}{ccc} A \cap B & \xrightarrow{i} & B \\ \downarrow j & & \downarrow \\ A & \longrightarrow & X \end{array}$$

é um pushout de homotopia (uma vez que as inclusões de subcomplexos são cofibrações).

**Teorema 5.34.** Se  $f : (X; A, B) \rightarrow (X'; A', B')$  é uma aplicação de tríades excisivas e  $f|_A : A \rightarrow A'$ ,  $f|_B : B \rightarrow B'$  e  $f|_{A \cap B} : A \cap B \rightarrow A' \cap B'$  são equivalências de homotopia fracas, então  $f : X \rightarrow X'$  é uma equivalência de homotopia fraca.

*Proof.* Para já ver [Ma, p. 80]. Incluo a demonstração mais tarde...  $\square$

O Teorema anterior pode ser encarado como uma "propriedade de Mayer-Vietoris" para os grupos de homotopia. A conclusão análoga para homologia (se as restrições a  $A, B, A \cap B$  são isomorfismos em homologia,  $f$  é uma equivalência de homologia) é uma consequência da sucessão de Mayer-Vietoris em homologia e o Lema dos 5. Apesar de não haver uma sucessão de Mayer-Vietoris para os grupos de homotopia<sup>24</sup> o Teorema anterior garante que a consequência de Mayer-Vietoris é ainda válida.

**Corolário 5.35.** (i) O pushout de homotopia é um invariante de homotopia fraco. Isto é, se

$$\begin{array}{ccccc} A & \xleftarrow{j} & C & \xrightarrow{i} & B \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ A' & \xleftarrow{j'} & C' & \xrightarrow{i'} & B' \end{array}$$

<sup>24</sup>Mas veja o Teorema 5.38.

é um diagrama comutativo em que todas as aplicações verticais são equivalências de homotopia fracas, então a aplicação induzida

$$M(i, j) \rightarrow M(i', j')$$

é uma equivalência de homotopia fraca.

(ii) Se  $(X; A, B)$  é uma tríade excisiva, o diagrama

$$\begin{array}{ccc} A \cap B & \xrightarrow{i} & B \\ \downarrow j & & \downarrow \\ A & \longrightarrow & X \end{array}$$

é um pushout de homotopia fraco.

(iii) Se  $(X, A, B)$  é uma tríade excisiva, existe uma tríade CW  $(X'; A', B')$  e uma aplicação  $e : (X'; A', B') \rightarrow (X; A, B)$  tal que  $e|_{A'}, e|_{B'}, e|_{A' \cap B'}$  e  $e$  são aproximações CW.

*Proof.* (i) As tríades associadas no Exemplo 5.32 aos espaços  $M(i, j)$  e  $M(i', j')$  são excisivas pelo que a afirmação é uma consequência do Teorema 5.34.

(ii) Se  $X' = M(i, j)$  e  $A', B' \subset M(i', j')$  for a tríade do Exemplo 5.32, podemos aplicar o Teorema 5.34 à aplicação canônica

$$(M(i', j'); A', B') \longrightarrow (X; A, B)$$

para concluir que  $M(i', j') \rightarrow X$  é uma equivalência fraca.

(iii) Seja  $C = A \cap B$ . Começamos por escolher uma aproximação CW  $f : C' \rightarrow C$ . Pelo Teorema 5.26 podemos estender  $f$  a uma aproximação CW relativa  $g : (A', C') \rightarrow (A, C)$  e também a uma aproximação CW relativa  $h : (B', C') \rightarrow (B, C)$ . Seja  $X'$  o complexo celular  $A' \amalg_{C'} B'$  e  $e : X' \rightarrow X$  a aplicação induzida por  $g, h$ . Denotando por  $i' : C' \rightarrow B'$  e  $j' : C' \rightarrow A'$  as inclusões, temos o seguinte diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccc} M(i', j') & \xrightarrow{\phi} & M(i, j) \\ \downarrow \xi & & \downarrow \pi \\ X' & \xrightarrow{e} & X \end{array}$$

em que  $\pi$  e  $\xi$  são as aplicações canônicas. Por (i),  $\phi$  é uma equivalência fraca.  $\xi$  é uma equivalência fraca pelo Exemplo 5.33 e  $\pi$  é uma equivalência fraca por (ii) logo  $e$  é uma equivalência fraca. □

**Nota 5.36.** Note-se que como consequência da demonstração da afirmação (iii) do Corolário anterior, se o par  $(A, A \cap B)$  é  $n$ -conexo e o par  $(B, A \cap B)$  é  $m$ -conexo, podemos assumir que  $A'$  se obtém de  $C' = A' \cap B'$  colando células de dimensão  $> n$  e  $B'$  se obtém de  $A' \cap B'$  colando células de dimensão  $> m$ .

**Exemplo 5.37.** Se  $(X, *)$  e  $(Y, *)$  são espaços bem pontuados e  $e_1 : (X', *) \rightarrow (X, *)$ ,  $e_2 : (Y', *) \rightarrow (Y, *)$  são aproximações CW, a aplicação

$$X' \vee Y' \xrightarrow{e_1 \vee e_2} X \vee Y$$

é uma aproximação CW por (i) do Corolário anterior uma vez que os diagramas de pushout que definem  $X \vee Y$  e  $X' \vee Y'$  são ambos pushouts de homotopia.

Se  $X$  é  $m$ -conexo e  $Y$  é  $n$ -conexo, podemos escolher  $X'$  com uma única 0-célula e todas as outras células de dimensão  $> n$  e  $Y'$  com uma única 0-célula e todas as outras células em dimensão  $> m$ . Uma vez que (dando a  $X' \times Y'$  a topologia CW)

$$X' \times Y' \longrightarrow X \times Y$$

é obviamente uma aproximação celular, e  $X' \times Y'$  se obtém de  $X' \times Y'$  colando células de dimensão  $\geq n + m + 2$ , conclui-se do Lema 5.8 que o par  $(X \times Y, X \vee Y)$  é  $n + m + 1$ -conexo.

De forma semelhante, pelo Lema 5.29  $X \wedge Y$  é equivalente ao pushout de homotopia de

$$* \leftarrow X \vee Y \rightarrow X \times Y$$

e  $X' \wedge Y'$  é equivalente ao pushout de homotopia de

$$* \leftarrow X' \vee Y' \rightarrow X' \times Y'.$$

donde se conclui que

$$X' \wedge Y' \rightarrow X \wedge Y$$

é uma aproximação CW, e portanto,  $X \wedge Y$  é um espaço  $(n + m + 1)$ -conexo.

Como recordámos anteriormente, se  $(X; A, B)$  é uma tríade excisiva e  $C = A \cap B$ , o Teorema de Excisão para homologia garante que o homomorfismo induzido pela inclusão

$$H_k(A, C) \rightarrow H_k(X, B)$$

é um isomorfismo para todo o  $k$ . Um dos resultados fundamentais em teoria de homotopia garante que o mesmo sucede com grupos de homotopia para um certo domínio de variação de  $k$  (chamado o *domínio estável*) dependente da conexidade dos pares  $(A, C)$  e  $(B, C)$ .

**Teorema 5.38** (de Excisão de Homotopia de Blakers-Massey.). *Seja  $(X; A, B)$  uma tríade excisiva ou CW e  $C = A \cap B$ . Se  $(A, C)$  é  $m$ -conexo e  $(B, C)$  é  $n$ -conexo com  $m \geq 0$  e  $n \geq 0$ , então*

$$\pi_k(A, C) \rightarrow \pi_k(X, B)$$

*é um isomorfismo para  $k < m + n$  e um epimorfismo para  $k \leq m + n$ .*

*Proof.* Pelo Corolário 5.35 (iii) podemos substituir  $(X; A, B)$  por uma tríade CW equivalente, em que  $A$  se obtém de  $C = A \cap B$  colando células de dimensão  $> m$  e  $B$  se obtém de  $C$  colando células de dimensão  $> n$ . Vamos fazer a demonstração considerando vários casos de generalidade crescente. O primeiro caso é o ponto fundamental da demonstração.

**Caso (i):**  $B = C \cup e^{n+1}$  e  $A = C \cup \cup_{\alpha} e_{\alpha}^{m+1}$ . Neste caso, para quaisquer  $x \in e^{n+1}$  e  $y_{\alpha} \in e_{\alpha}^{m+1}$ , as inclusões

$$(A, C) \longrightarrow (X \setminus \{x\}, X \setminus \{x, y_{\alpha}\})$$

e

$$(X, B) \longrightarrow (X, X \setminus \{y_{\alpha}\})$$

são equivalências de homotopia e portanto basta-nos mostrar que, existem  $x, y_{\alpha}$  tais que o homomorfismo

$$(11) \quad \pi_k(X \setminus \{x\}, X \setminus \{x, y_{\alpha}\}) \rightarrow \pi_k(X, X \setminus \{y_{\alpha}\}) \simeq \pi_k(X, B)$$

é sobrejectivo para  $k \leq n + m$  e injectivo para  $k \leq n + m - 1$ .

Começamos por considerar a sobrejectividade. Seja  $J^{k-1} = \partial([0, 1]^{k-1}) \times [0, 1] \cup [0, 1]^{k-1} \times \{1\}$  e seja

$$f: ([0, 1]^k, \partial[0, 1]^k, J^{k-1}) \rightarrow (X, B, *)$$

um representante de um elemento de  $\pi_k(X, B)$ . Pelo Lema 5.7, a imagem de  $f$  intersecta apenas um número finito de células  $e_\alpha^{m+1}$ . Sendo  $\epsilon > 0$  e

$$e_\epsilon^k = \{x \in e^k : \|x\| < \epsilon\},$$

usando o Lema de Aproximação Regular 5.6 como na demonstração do Lema 5.8 vemos que  $f$  é homotópica como aplicação de triplos a uma aplicação  $g$  que é  $C^\infty$  no aberto  $g^{-1}(e_\epsilon^{n+1}) \cup g^{-1}(\cup_\alpha e_\alpha^{m+1})$ .

Seja  $x \in e_\epsilon^{n+1}$  um valor regular de  $g$ . Então  $g^{-1}(x)$  é uma variedade (provavelmente com bordo, bordo esse que está contido em  $[0, 1]^{k-1} \times \{0\}$ ) de dimensão  $k - (n + 1)$ . Seja

$$\pi: [0, 1]^k \rightarrow [0, 1]^{k-1}$$

a projecção nas primeiras  $(k - 1)$  coordenadas. O conjunto  $G = \pi^{-1}(\pi(g^{-1}(x)))$  dos elementos que se projectam na projecção de  $g^{-1}(x)$  pode ser parametrizado localmente por  $k - m$  funções  $C^\infty$ . Conclui-se que se

$$k - m < n + 1$$

a aplicação

$$g: G \cap g^{-1}(e_\alpha^{m+1}) \rightarrow e_\alpha^{m+1}$$

não é sobrejectiva. Podemos portanto escolher pontos  $y_\alpha \in e_\alpha^{m+1}$  tais que  $g^{-1}(y_\alpha) \cap G = \emptyset$ . Os conjuntos  $K_1 = \pi(g^{-1}(x))$  e  $K_2 = \pi(\cup_\alpha g^{-1}(y_\alpha))$  são subconjuntos compactos disjuntos de  $]0, 1[^{k-1}$  e portanto existe uma função contínua

$$\phi: [0, 1]^{k-1} \rightarrow [0, 1[$$

tal que  $\phi(x) = 0$  num aberto contendo  $K_2$  e

$$g^{-1}(x) \subset \{(x, t) \in [0, 1]^k : t < \phi(x)\}.$$

Ou seja, tal que o gráfico de  $\phi$  separa os conjuntos  $g^{-1}(x)$  e  $\cup_\alpha g^{-1}(y_\alpha)$  (ver Figura 3). A homotopia

$$H: ([0, 1]^k, \partial[0, 1]^k, J^{k-1}) \times [0, 1] \rightarrow (X, X \setminus \{y_\alpha\}, *)$$

definida pela expressão

$$H(z, t, s) = g(z, s\phi(t) + t(1 - s\phi(t)))$$

deforma  $g$  numa aplicação  $h$  (a "restrição de  $g$  à região acima do gráfico de  $\phi$ ") que aplica o triplo  $([0, 1]^k, \partial[0, 1]^k, J^{k-1})$  em  $(X \setminus \{x\}, X \setminus \{x, y_\alpha\}, *)$ . Conclui-se que a aplicação (11) é sobrejectiva.

A injectividade demonstra-se exactamente da mesma forma: Sejam

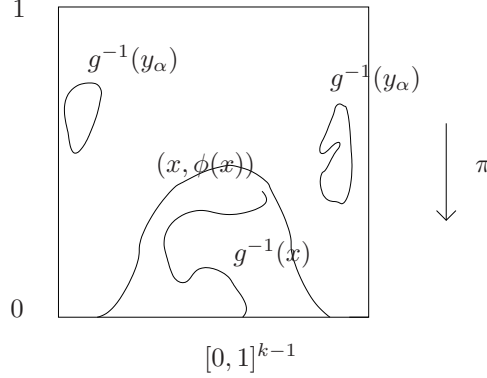
$$f_0, f_1: ([0, 1]^k, \partial[0, 1]^k, J^{k-1}) \rightarrow (A, C, *)$$

e

$$H: ([0, 1]^k, \partial[0, 1]^k, J^{k-1}) \times [0, 1] \rightarrow (X, B, *)$$

uma homotopia entre  $f_0$  e  $f_1$ . Pelo Lema de Aproximação Regular podemos assumir que  $H$  é  $C^\infty$  em  $H^{-1}(e_\epsilon^{m+1} \cup \cup_\alpha e_\alpha^{n+1})$  para algum  $\epsilon$  (esta deformação substituirá possivelmente  $f_0$  e  $f_1$  por outros representantes dos mesmos elementos de  $\pi_k(A, C)$ ).

FIGURE 3.



Seendo  $x \in e_\epsilon^{m+1}$  um valor regular de  $H$ , e sendo  $\pi : [0, 1]^k \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]^{k-1} \times [0, 1]$  a projecção, o conjunto

$$G = \pi^{-1}(\pi(H^{-1}(x)))$$

pode ser localmente parametrizado por  $k + 1 - (m + 1) + 1 = k + 1 - m$  funções  $C^\infty$ , e portanto desde que

$$k + 1 - m < n + 1 \Leftrightarrow k < n + m$$

existem pontos  $y_\alpha \in e_{\alpha\epsilon}^{n+1}$  que não estão na imagem de  $G$ . Isto permite-nos achar uma função contínua

$$\phi : [0, 1]^{k-1} \times 0 \times [0, 1] \rightarrow [0, 1[$$

tal que  $H^{-1}(x)$  está abaixo do gráfico de  $\phi$  e  $H^{-1}(\{y_\alpha\})$  está acima do gráfico de  $\phi$ . Tal como antes podemos então construir uma homotopia

$$L : ([0, 1]^k, \partial[0, 1]^k, J^{k-1}) \times [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow (X, X \setminus \{y_\alpha\}, *)$$

com  $L(x, 0, t) = f_0(x)$ ,  $L(x, 1, t) = f_1(x)$ , e tal que  $K(x, t) = L(x, t, 1)$  é uma aplicação

$$K : ([0, 1]^k, \partial[0, 1]^k, J^{k-1}) \times [0, 1] \rightarrow (X \setminus \{x\}, X \setminus \{x, y_\alpha\}, *)$$

mostrando que  $[f_0] = [f_1]$  em  $\pi_k(X \setminus \{x\}, X \setminus \{x, y_\alpha\}) \simeq \pi_k(A, C)$ .

**Caso (ii):**  $A = C \cup \cup_\alpha e_\alpha^{m+1}$ , e  $B$  obtém-se colando a  $C$  células de dimensão  $> n$ . Uma vez que a imagem de um representante de uma classe em  $\pi_k$  ou uma homotopia entre dois representantes intersecta apenas um número finito de células de  $B$  podemos assumir que  $B$  se obtém de  $C$  colando um número finito de células. Seja  $e^l$  (com  $l > m$ ) uma célula de dimensão máxima em  $B \setminus C$ . Tome-se

$$C' = B \setminus e^l, \quad A' = C' \cup A, \quad B' = B.$$

Aplicando o caso anterior vemos que

$$\pi_k(A', C') \rightarrow \pi_k(X, B)$$

é um isomorfismo para  $k < n + m$  e um epimorfismo para  $k \leq n + m$ . Tomando  $X = A'$ ,  $B = C'$  e  $A = A$  e aplicando indutivamente este argumento às células de  $B \setminus C$  por ordem decrescente de dimensão concluímos que

$$\pi_k(A, C) \rightarrow \pi_k(X, B)$$



é um isomorfismo para  $k < n + m$  e um epimorfismo para  $k \leq n + m$ .

**Caso (iii):** Consideremos agora o caso geral. Seja  $A_i$  o esqueleto- $i$  relativo de  $(A, C)$  e  $X_i = A_i \cup B$  e consideremos o diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccccccccc} \pi_{k+1}(A_{i+1}, A_i) & \xrightarrow{\partial} & \pi_k(A_i, C) & \longrightarrow & \pi_k(A_{i+1}, C) & \longrightarrow & \pi_k(A_{i+1}, A_i) & \xrightarrow{\partial} & \pi_{k-1}(A_i, C) \\ \downarrow \phi_1 & & \downarrow \phi_2 & & \downarrow \phi_3 & & \downarrow \phi_4 & & \downarrow \phi_5 \\ \pi_{k+1}(X_{i+1}, X_i) & \xrightarrow{\partial} & \pi_k(X_i, C) & \longrightarrow & \pi_k(X_{i+1}, C) & \longrightarrow & \pi_k(X_{i+1}, X_i) & \xrightarrow{\partial} & \pi_{k-1}(X_i, C) \end{array}$$

determinado pela inclusão dos triplos  $(A_{i+1}, A_i, C) \rightarrow (X_{i+1}, X_i, X)$  (conforme o Lema 4.10). Tomando primeiro  $i = m + 1$  temos  $A_{m+1} = C \cup \cup_{\alpha} e_{\alpha}^{m+1}$  e portanto o caso (ii) implica que  $\phi_2$  e  $\phi_5$  são isomorfismos para  $k < n + m$ . Uma vez que  $X_i$  se obtém de  $A_i$  colando células de dimensão  $> m$  o caso (ii) implica também que  $\phi_1$  e  $\phi_4$  são isomorfismos para  $k < n + m$ . Pelo Lema dos 5, conclui-se<sup>25</sup> que  $\phi_3$  é um isomorfismo para  $k < n + m$ . A sobrejectividade para  $k = n + m$  verifica-se pelo mesmo argumento.

Por indução conclui-se que, para todo o  $i$ ,

$$\pi_k(A, C) \rightarrow \pi_k(X_i, C)$$

é um isomorfismo para  $k < n + m$  e um epimorfismo para  $k \leq n + m$ . Uma vez que

$$\pi_k(X_{k+1}, C) \rightarrow \pi_k(X, C)$$

é um isomorfismo pelo Teorema de Aproximação Celular, isto conclui a demonstração.  $\square$

**Nota 5.39.** (i) Aplicando a Proposição 3.63 ao diagrama de inclusões

$$\begin{array}{ccc} C = A \cap B & \longrightarrow & A \\ \downarrow & & \downarrow \\ B & \longrightarrow & X \end{array}$$

obtemos um diagrama na categoria de homotopia

$$\begin{array}{ccccc} G & \longrightarrow & F_1 & \longrightarrow & H_1 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ F_2 & \longrightarrow & C & \longrightarrow & A \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ H_2 & \longrightarrow & B & \longrightarrow & X \end{array}$$

onde todas as linhas e colunas são equivalentes a sucessões de fibração. O homomorfismo  $\pi_k(A, C) \rightarrow \pi_k(X, B)$  identifica-se com o homomorfismo  $\pi_{k-1}F_2 \rightarrow \pi_{k-1}H_2$  logo o Teorema de Blakers-Massey é equivalente à afirmação que o espaço  $G$  é  $(n + m - 2)$ -conexo. Isto é, se a fibra  $F_2$  da inclusão  $C \rightarrow A$  é  $(m - 1)$ -conexa e a fibra  $F_1$  da inclusão  $C \rightarrow B$  é  $(n - 1)$ -conexa então  $G$  é  $(n + m - 2)$ -conexo.

<sup>25</sup>É um exercício verificar que o Lema dos 5 permanece válido para sucessões exactas cujos últimos seis termos não são necessariamente grupos abelianos, mas verificam a noção de exactidão usual nas sucessões exactas longas de homotopia.

Recorde-se da demonstração da Proposição 3.63 que  $G$  é a fibra de homotopia da aplicação  $C \rightarrow P$  onde  $P$  é o pullback de homotopia de

$$B \longrightarrow X \longleftarrow A$$

logo o Teorema de Blakers-Massey diz até que ponto um quadrado que é um pushout de homotopia fraco é também um pullback de homotopia fraco<sup>26</sup>: até dimensão  $n+m-1$ . Este domínio estável é o conjunto das dimensões em que as estruturas de cofibração e fibração na categoria de homotopia coincidem.

- (ii) O Teorema de Blakers-Massey [BM] é um resultado mais forte que o indicado acima, no sentido em que identifica o primeiro grupo de homotopia não nulo do espaço  $G$ . Definem-se para  $k \geq 2$  os grupos de homotopia de uma triade pela fórmula

$$\pi_k(X; A, B) = \pi_{k-2}G$$

e o Teorema de Blakers-Massey diz então que

$$\pi_{n+m+1}(X; A, B) \simeq \pi_{m+1}(A, C) \otimes \pi_{n+1}(B, C)$$

para  $n, m \geq 2$  de forma a que os grupos envolvidos sejam todos abelianos (o enunciado para valores menores de  $m$  e  $n$  é mais complicado).

**Corolário 5.40.** Se  $(X, A)$  é um par NDR  $n$ -conexo e  $A$  é  $m$ -conexo, a aplicação

$$\pi_k(X, A) \rightarrow \pi_k(X/A, *)$$

é um isomorfismo para  $k \leq n+m$  e um epimorfismo para  $k = n+m+1$ .

*Proof.* Pelo Teorema 5.26 e Corolário 5.35 podemos assumir que  $(X, A)$  é um par CW. Sendo  $CA$  o cone em  $A$ , o par  $(CA, A)$  é  $(m+1)$ -conexo. Aplicando o Teorema 5.38 à triade  $(X \coprod_A CA; X, CA)$  concluímos que

$$\pi_k(X, A) \rightarrow \pi_k(X \coprod_A CA, CA)$$

é um isomorfismo para  $k \leq n+m$  e um epimorfismo para  $k = n+m+1$ . Consideremos o diagrama

$$\begin{array}{ccccc} \pi_k(X, A) & \xrightarrow{\iota} & \pi_k((X \coprod_A CA, CA)) & \xrightarrow{\xi} & \pi_k(X/A, *) \\ & & \uparrow \phi & \nearrow \psi & \\ & & \pi_k(X \coprod_A CA) & & \end{array}$$

O homomorfismo  $\phi$  é parte da sucessão exacta do par  $(X \coprod_A CA, CA)$  e uma vez que  $CA$  é contráctil é um isomorfismo. O homomorfismo  $\psi$  é induzido por uma equivalência de homotopia logo é um isomorfismo. Conclui-se que  $\xi$  é um isomorfismo e portanto o homomorfismo  $\xi \circ \iota$  do enunciado é um isomorfismo para  $k \leq n+m$  e um epimorfismo para  $k = n+m+1$ .  $\square$

Recordemos o functor de suspensão  $\Sigma : Top_* \rightarrow Top_*$  associa a um espaço pontuado  $(X, *)$  a suspensão reduzida  $\Sigma X = X \wedge S^1$ , e a uma aplicação pontuada  $f : (X, *) \rightarrow (Y, *)$  a sua suspensão  $\Sigma f = f \wedge id_{S^1}$ . Recorde-se ainda que se  $X = \Sigma A$  então  $\Sigma$  induz um homomorfismo de grupos nos conjuntos de classes de

<sup>26</sup>Um quadrado diz-se um pullback de homotopia fraco se a aplicação canónica do espaço no canto superior esquerdo para o pullback de homotopia dos restantes (ver Exercício 4.9 para a definição) é uma equivalência fraca.

homotopia pontuadas. Sendo  $\eta : Y \rightarrow \Omega\Sigma Y$  a unidade da adjunção  $(\Sigma, \Omega)$  (definida por  $\eta(y)(t) = y \wedge t$ ), é fácil verificar que a suspensão se factoriza da seguinte forma

$$(12) \quad [X, Y]_* \xrightarrow{\eta_*} [X, \Omega\Sigma Y]_* \xrightarrow{\cong} [\Sigma X, \Sigma Y]_*$$

onde a aplicação da direita é o isomorfismo definido pela adjunção. Esta afirmação é na realidade válida para qualquer par de funtores adjuntos  $(L, R)$  (exercício).

**Corolário 5.41** (Teorema da Suspensão de Freudenthal). *Seja  $(Y, *)$  um espaço  $n$ -conexo bem pontuado e  $(X, *)$  um complexo CW pontuado. A suspensão*

$$[X, Y]_* \xrightarrow{\Sigma} [\Sigma X, \Sigma Y]_*$$

é uma bijecção se  $\dim X \leq 2n$  e uma sobrejecção se  $\dim X \leq 2n + 1$ .

*Proof.* Tendo em conta a factorização (12) temos a demonstrar que a aplicação  $\eta : Y \rightarrow \Omega\Sigma Y$  é uma  $(2n + 1)$ -equivalência. Como habitual podemos assumir que  $Y$  é um complexo celular. Seja  $CY = Y \wedge [0, 1]$  o cone reduzido e consideremos o diagrama de inclusões correspondente à tríade CW  $(\Sigma Y; CY, CY)$ :

$$\begin{array}{ccc} Y & \longrightarrow & CY \\ \downarrow & & \downarrow \\ CY & \longrightarrow & \Sigma Y. \end{array}$$

Uma vez que o par  $(CY, Y)$  é  $(n + 1)$ -conexo, de acordo com a Nota 5.39 a aplicação canónica de  $Y$  para o pullback de homotopia das inclusões  $CY \rightarrow \Sigma Y$ ,

$$Y \xrightarrow{\phi} \text{holim}(CY \rightarrow \Sigma Y \leftarrow CY)$$

é uma  $(2n + 1)$ -equivalência. O diagrama

$$\begin{array}{ccccc} * & \longrightarrow & \Sigma Y & \longleftarrow & * \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ CY & \longrightarrow & \Sigma Y & \longleftarrow & CY \end{array}$$

induz uma equivalência fraca nos pullbacks de homotopia (pelo Exercício 4.9 e o Lema dos 5) e é fácil verificar que o diagrama

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{\eta} & \Omega\Sigma Y = \text{holim}(* \rightarrow \Sigma Y \leftarrow *) \\ & \searrow \phi & \downarrow \\ & & \text{holim}(CY \rightarrow \Sigma Y \leftarrow CY) \end{array}$$

comuta a menos de homotopia, o que conclui a demonstração.  $\square$

Para  $X$  um complexo CW e  $Y$  um espaço bem pontuado definem-se os grupos de *classes de homotopia estáveis* pela fórmula

$$\{X, Y\} = \lim_{k \rightarrow \infty} [\Sigma^k X, \Sigma^k Y]_*.$$

Pelo Teorema de Freudenthal, se  $X$  é de dimensão finita, o colimite da direita estabiliza para  $k$  suficientemente grande. O estudo dos conjuntos de classes de homotopia estável chama-se Teoria de Homotopia Estável e é um dos ramos principais da Teoria de Homotopia, evidenciando relações fascinantes com outras áreas

da Matemática, notavelmente com a Teoria dos Números e Geometria Algébrica Aritmética (ver por exemplo [Hop]).

**Exercício 5.42.** *Se  $X$  é um complexo celular, e  $k \geq 0$ , o  $k$ -ésimo grupo de homotopia estável de  $X$  é*

$$\pi_k^s(X) = \{S^k, X\}.$$

*Use o Teorema de Excisão de Homotopia para mostrar que os funtores*

$$X \rightarrow \pi_*^s(X)$$

*determinam uma Teoria de Homologia Generalizada na categoria dos complexos celulares pontuados (ver [Ha, p.161] e [Sw, Chapter 7]). Isto é verdade mais geralmente se substituirmos  $S^k$  por  $\Sigma^k A$  para qualquer complexo celular finito  $A$ .*

**Nota 5.43.** *Note-se que se  $Y$  é  $n$ -conexo e  $\dim X \leq 2n$ , o Teorema de Freudenthal implica a existência de uma estrutura canônica de grupo abeliano no conjunto  $[X, Y]_*$  (uma vez que este é canonicamente isomorfo a  $[\Sigma^2 X, \Sigma^2 Y]$ ). Por exemplo se  $S$  é uma superfície,  $[S, S^2]_*$  tem uma estrutura de grupo abeliano (chamado o segundo grupo de cohomotopia de  $S$ ).*

**Exercício 5.44.** *Mostre que a bijecção entre  $[S, S^2]_* \simeq \mathbb{Z}$  estabelecida no Exercício 4.17 pode ser escolhida de forma a ser um isomorfismo de grupos.*

**Corolário 5.45.**  $\pi_n(S^n) \simeq \mathbb{Z}$  para todo o  $n \geq 1$  e  $\pi_{n+1}(S^n)$  é um grupo cíclico para todo o  $n \geq 2$ .

*Proof.* Recorde-se de (9) que  $\pi_2(S^2) \simeq \mathbb{Z}$ . Pelo Teorema de Freudenthal, a aplicação de suspensão

$$\pi_k(S^k) \rightarrow \pi_{k+1}S^{k+1}$$

é um isomorfismo desde que  $k \geq 2(k-1)$ , isto é, se  $k \geq 2$ . Da mesma maneira,

$$\pi_{k+1}S^k \rightarrow \pi_{k+2}S^{k+1}$$

é um epimorfismo para  $k+1 \leq 2(k-1)+1$ , isto é para  $k \geq 2$ . Uma vez que  $\pi_3(S^2) \simeq (\pi_3 S^3) \simeq \mathbb{Z}$  temos que  $\pi_{n+1}(S^n)$  é cíclico para  $n \geq 2$ .  $\square$

É importante notar que o isomorfismo  $\pi_k(S^k) \simeq \mathbb{Z}$  do corolário anterior associa a uma aplicação  $f : S^k \rightarrow S^k$  o seu grau. Isto é óbvio para  $k = 1$ . O Teorema de Freudenthal garante que a suspensão induz um epimorfismo

$$\pi_1(S^1) \xrightarrow{\Sigma} \pi_2(S^2)$$

que é na realidade um isomorfismo uma vez que ambos os grupos são isomorfos a  $\mathbb{Z}$ . O seguinte diagrama

$$\begin{array}{ccccccc} H_k(X) & \xleftarrow{\partial} & H_{k+1}(CX, X) & \xrightarrow{\text{exc}} & H_{k+1}(\Sigma X, CX) & \xleftarrow{\quad} & H_{k+1}(\Sigma X) \\ \downarrow f_* & & \downarrow Cf_* & & \downarrow \Sigma f_* & & \downarrow \Sigma f_* \\ H_k(Y) & \xleftarrow{\partial} & H_{k+1}(CY, Y) & \xrightarrow{\text{exc}} & H_{k+1}(\Sigma Y, CY) & \xleftarrow{\quad} & H_{k+1}(\Sigma Y) \end{array}$$

cujas linhas explicitam o isomorfismo de suspensão em homologia mostra que o grau de  $\Sigma f$  e de  $f$  coincidem.

**Exercício 5.46.** Mostre que para  $n \geq 2$  temos

$$\pi_n(\vee_\alpha S^n) = \oplus_\alpha \mathbb{Z}$$

e que a aplicação  $f \mapsto f_*$  determina um isomorfismo de grupos abelianos

$$[\vee_\alpha S^n, \vee_\beta S^n]_* \rightarrow \text{Hom}(\oplus_\alpha \mathbb{Z}, \oplus_\beta \mathbb{Z}).$$

Para  $n = 1$  é necessário substituir a soma directa pelo coproduto na categoria dos grupos (ou produto livre).

O seguinte exercício dá um exemplo em que a afirmação do Corolário 5.40 não pode ser melhorada.

**Exercício 5.47.** Calcule  $\pi_n(\mathbb{R}P^n, \mathbb{R}P^{n-1})$ . Mostre directamente que este grupo se aplica sobrejectivamente em  $\pi_n(\mathbb{R}P^n/\mathbb{R}P^{n-1})$  (conforme predito pelo Corolário 5.40) mas a aplicação não é um isomorfismo.

**Exercício 5.48.** Mostre que  $\mathbb{R}P^n$  é simples sse  $n$  é ímpar.

**Exercício 5.49.** Calcule (em função das conexidades de  $X$  e de  $f : X \rightarrow Y$ ) a conexidade das aplicações de comparação entre a fibra e a cofibra de homotopia da aplicação  $f$ .

**Exemplo 5.50** (Espaços de Moore). Seja  $n \geq 2$  e  $G$  um grupo abeliano com apresentação

$$0 \longrightarrow \oplus_\alpha \mathbb{Z} \xrightarrow{\phi} \oplus_\beta \mathbb{Z} \longrightarrow G \longrightarrow 0.$$

Seja

$$f : \vee_\alpha S^n \longrightarrow \vee_\beta S^n$$

uma aplicação contínua induzindo o homomorfismo  $\phi$  em  $\pi_n$  (mediante a identificação do Exercício 5.46). Seja  $X$  a cofibra de homotopia de  $f$ ,  $j : \vee_\beta S^n \rightarrow X$  a inclusão canónica e consideremos o diagrama

$$\begin{array}{ccccc} \pi_{n+1}(X, \vee_\beta S^n) & \xrightarrow{\partial} & \pi_n(\vee_\beta S^n) & \xrightarrow{j} & \pi_n(X) \longrightarrow 0 \\ \downarrow \pi & \nearrow \psi & & & \\ \pi_{n+1}(\vee_\alpha S^{n+1}) & & & & \end{array}$$

em que a primeira linha é formada pelos últimos termos não nulos da sucessão exacta do par  $(X, \vee_\beta S^n)$ . Para  $n \geq 2$ , a aplicação  $\pi$  é um isomorfismo pelo Corolário 5.40 e portanto existe um único homomorfismo  $\psi$  fazendo o diagrama comutar. Por definição do operador de bordo  $\partial$  (restrição ao bordo da bola),  $\psi$  leva um gerador

$$S^{n+1} \xrightarrow{i_\alpha} \vee_\alpha S^{n+1}$$

na imagem por  $f$  da aplicação de colagem da célula correspondente, isto é, em  $[f \circ (\Sigma^{-1}(i_\alpha))]$ . Mediante a identificação do Exercício 5.46  $\psi$  identifica-se portanto com  $\phi$ , donde se conclui que

$$\pi_n(X) \simeq G.$$

O espaço  $X$  chama-se um *espaço de Moore* e denota-se por  $M(G, n)$ . Veremos em breve que a menos de equivalência de homotopia fraca, este espaço é caracterizado pelas propriedades de ser simplesmente conexo e ter homologia

$$\overline{H}_k(M(G, n)) = \begin{cases} G & \text{se } k = n \\ 0 & \text{se } k \neq n. \end{cases}$$

É ainda claro da definição que  $\Sigma M(G, n) \simeq M(G, n+1)$ .

Para  $n = 1$  e  $G$  não necessariamente abeliano é ainda possível definir da mesma forma, usando uma apresentação para  $G$  na categoria dos grupos e o Teorema de Seifert-Van Kampen, um complexo CW  $X$  de dimensão 2 com  $\pi_1(X) = G$ . Note-se no entanto que, mesmo sendo  $G$  abeliano, não é em geral verdade que  $\Sigma X \simeq M(G, 2)$  uma vez que a homologia de  $X$  não estará em geral concentrada em dimensão 1.

É no entanto fácil verificar que  $M(G, 2)$  é a suspensão de um complexo celular de dimensão 2 com homologia concentrada em dimensão 1 e  $H_1 = G$ , e é um tal complexo que se designa por vezes por  $M(G, 1)$ . O grupo fundamental de um tal complexo (e consequentemente o seu tipo de homotopia) depende em geral da escolha da apresentação para  $G$ .

**Definição 5.51.** Para  $n \geq 3$ ,  $G$  um grupo abeliano, e  $X$  um espaço pontuado, definem-se os grupos de homotopia de  $X$  com coeficientes em  $G$  pela fórmula

$$\pi_n(X; G) = [M(G, n-1), X]_*.$$

Estes conjuntos são grupos para  $n \geq 3$  (uma vez que  $M(G, 2)$  é uma suspensão) e grupos abelianos para  $n \geq 4$  (uma vez que então  $M(G, n-1)$  é uma dupla suspensão)

**Exercício 5.52.** Mostre que para  $G$  um grupo abeliano e  $k \geq 3$  temos uma sucessão exacta curta de grupos

$$0 \longrightarrow \text{Ext}(G, \pi_k(Y)) \longrightarrow \pi_k(X; G) \longrightarrow \text{Hom}(G, \pi_{k-1}(Y)) \longrightarrow 0.$$

Note ainda que para  $G = \mathbb{Z}/l$  um grupo cíclico, a sucessão exacta anterior pode escrever-se

$$0 \longrightarrow \pi_k(Y) \otimes \mathbb{Z}/l \longrightarrow \pi_k(X; \mathbb{Z}/l) \longrightarrow \text{Tor}(\mathbb{Z}/l, \pi_{k-1}(Y)) \longrightarrow 0.$$

**Proposição 5.53** (Secções de Postnikov). Seja  $(X, *)$  um espaço pontuado e  $n \geq 0$ . Existe um espaço  $X^n$  e uma aplicação  $p_n : X \rightarrow X^n$  tais que

$$\pi_k(X^n) = \begin{cases} \pi_k(X) & \text{se } k \leq n \\ 0 & \text{se } k > n. \end{cases}$$

e  $p_{n*} : \pi_k(X) \rightarrow \pi_k(X^n)$  é um isomorfismo para  $k \leq n$ .

*Proof.* O espaço  $X^n$  e a aplicação  $p_n$  constroem-se indutivamente aniquilando os grupos de homotopia de  $X$  em dimensões maiores que  $n$ . Seja  $Y_0 = X$  e  $f_\alpha : S^{n+1} \rightarrow Y_0$  representantes de geradores de  $\pi_{n+1}Y_0$ . Tomamos para  $Y_1$  a cofibra de homotopia da aplicação

$$\vee_\alpha S^{n+1} \xrightarrow{\vee f_\alpha} Y_0$$

O par  $(Y_1, Y_0)$  é  $(n+1)$ -conexo pelo Lema 5.8. Consideremos o diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccccccc} \pi_{n+2}(Y_1, Y_0) & \xrightarrow{\partial} & \pi_{n+1}(Y_0) & \longrightarrow & \pi_{n+1}(Y_1) & \longrightarrow & 0 \\ & & \searrow \phi & & & & \\ & \downarrow \psi & & & & & \\ & \pi_{n+2}(\vee_\alpha S^{n+2}) & & & & & \end{array}$$

em que a linha de cima é a sucessão exacta do par  $(Y_1, Y_0)$  e  $\phi$  leva os geradores canónicos  $[i_\alpha]$  em  $[f_\alpha]$ . Como  $\psi$  é sobrejectivo pelo Teorema 5.38,  $\partial$  é também

sobrejectivo e portanto  $\pi_{n+1}Y_1 = 0$ . Obtemos assim um espaço  $Y_1$  tal que

$$\pi_k(Y_1) = \begin{cases} \pi_k(X) & \text{se } k \leq n \\ 0 & \text{se } k = n + 1. \end{cases}$$

e uma  $(n+1)$ -equivalência  $X = Y_0 \rightarrow Y_1$ . Proseguindo da mesma maneira obtemos espaços  $Y_l$  com

$$\pi_k(Y_l) = \begin{cases} \pi_k(X) & \text{se } k \leq n \\ 0 & \text{se } n + 1 \leq k \leq n + l. \end{cases}$$

e  $(n+1)$ -equivalências

$$X = Y_0 \rightarrow Y_1 \rightarrow \cdots \rightarrow Y_l$$

Tomamos  $X^n = \text{colim } Y_l$  e  $p_n : X \rightarrow X^n$  a aplicação canónica.  $\square$

As aplicações

$$p_n : X \rightarrow X^n$$

chamam-se as *secções de Postnikov* de  $X$ . Veremos mais tarde que as aplicações  $p_n$  são únicas a menos de equivalência fraca e que  $X^n$  é a  $n$ -ésima secção de Postnikov de  $X^k$  para todo o  $k > n$ . Não é difícil verificar desde já que as secções de Postnikov podem ser escolhidas functorialmente e de forma a serem compatíveis.

**Exercício 5.54.** *Mostre que é possível efectuar a construção de  $p_n$  acima de forma functorial e tal que se obtenham diagramas comutativos*

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{p_{n+1}} & X^{n+1} \\ & \searrow p_n & \downarrow \\ & & X^n. \end{array}$$

O diagrama formado por todas as secções  $p_n$  chama-se a torre de Postnikov do espaço  $X$ .

Dado  $n \geq 1$  e um grupo  $G$  (abeliano se  $n \geq 1$ ), vimos no Exemplo 5.50 como construir complexos celulares  $(n-1)$ -conexos  $X$  com  $\pi_n(X) = G$ . A  $n$ -ésima secção de Postnikov de um tal espaço é um espaço que tem  $G$  como único grupo de homotopia não nulo em dimensão  $n$ . Estes espaços desempenham um papel importante em Teoria de Homotopia.

**Definição 5.55.** *Um complexo celular conexo  $X$  com*

$$\pi_k(X) \simeq \begin{cases} G & \text{se } k = n \\ 0 & \text{se } k \neq n \end{cases}$$

*chama-se um espaço de Eilenberg-MacLane e denota-se  $K(G, n)$ .*

Veremos em seguida que espaços de Eilenberg-MacLane são únicos a menos de equivalência de homotopia.

**Lema 5.56.** *Seja  $n \geq 1$  e  $X$  a cofibra de homotopia de uma aplicação*

$$\vee_{\alpha} S^n \xrightarrow{\vee f_{\alpha}} \vee_{\beta} S^n.$$

*Dado  $(Y, *)$  e um homomorfismo de grupos  $\phi : \pi_n(X) \rightarrow \pi_n(Y)$  existe uma aplicação contínua  $g : X \rightarrow Y$  induzindo o homomorfismo  $\phi$  em  $\pi_n$ .*

*Proof.* Seja

$$j : \vee_{\beta} S^n \rightarrow X$$

a inclusão canônica, que é também a inclusão do esqueleto de dimensão  $n$  de  $X$ , e sejam  $[i_{\beta}] \in \pi_n(\vee_{\beta} S^n)$  os geradores canônicos. Seja

$$\tilde{g} : \vee_{\alpha} S^n \rightarrow Y$$

uma aplicação tal que  $\tilde{g}_*([i_{\beta}]) = \phi(j_*([i_{\beta}]))$ . Então, uma vez que  $[f_{\alpha}] = \sum n_{\alpha\beta}[i_{\beta}]$  para certos  $n_{\alpha\beta} \in \mathbb{Z}$ ,

$$j_*([f_{\alpha}]) = 0 \Rightarrow \phi(j_*([f_{\alpha}])) = 0 \Rightarrow \tilde{g}_*([f_{\alpha}]) = 0.$$

Pela propriedade universal da cofibra de homotopia conclui-se que  $\tilde{g}$  se estende a uma aplicação  $g : X \rightarrow Y$ . Pelo Teorema de Aproximação Celular 5.17  $j_*$  é sobrejectivo em  $\pi_n$ . O homomorfismo

$$g_* : \pi_n(X) \rightarrow \pi_n(Y)$$

coincide com  $\phi$  nos geradores  $j_*([i_{\beta}])$  e portanto coincide com  $\phi$ .  $\square$

**Proposição 5.57.** *Se  $X$  é um espaço cujo único grupo de homotopia não nulo é  $G$  em dimensão  $n$ , existe uma equivalência de homotopia fraca  $K(G, n) \rightarrow X$ .*

*Proof.* Seja  $A$  um complexo celular com apenas uma 0-célula em dimensões  $< n$  e com  $\pi_n(A) = G$  (conforme o Exemplo 5.50). Pelo Lema 5.56 existe uma aplicação contínua  $f : A \rightarrow X$  induzindo um isomorfismo em  $\pi_n$ . Consideremos o diagrama

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & X \\ \downarrow p_n & \searrow \bar{f} & \nearrow \\ & & K(G, n) \end{array}$$

Uma vez que  $K(G, n)$  se obtém de  $A$  colando células de dimensão  $> n+1$  e  $\pi_k(X) = 0$  para  $k \geq n+1$ , pela propriedade universal da cofibra de homotopia existe uma extensão  $\bar{f}$  de  $f$  fazendo o diagrama comutar.  $\bar{f}$  induz um isomorfismo em  $\pi_n$  e é portanto uma equivalência de homotopia fraca.  $\square$

**Exemplo 5.58.** Pelo Exercício 4.15 temos

$$K(\mathbb{Z}/2, 1) \simeq \mathbb{R}P^{\infty}$$

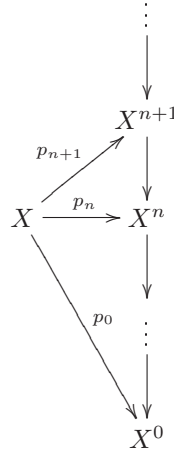
e

$$K(\mathbb{Z}, 2) \simeq \mathbb{C}P^{\infty}.$$

Claramente  $K(\mathbb{Z}, 1) \simeq S^1$  e é fácil ver que um modelo geométrico para os espaços  $K(\mathbb{Z}/l, 1)$  se obtém tomando o colimite de espaços lenticulares apropriados. Estes exemplos constituem a lista completa de espaços de Eilenberg-MacLane correspondentes a grupos abelianos não triviais que dispõem de modelos geométricos familiares (até à data). Por outro lado, para  $G$  não abeliano, os espaços  $K(G, 1)$  são muito comuns em Matemática. Por exemplo todas as superfícies  $\Sigma$  de género  $\geq 1$  são espaços de Eilenberg-MacLane (uma vez que os revestimentos universais são contrácteis), o mesmo sucedendo com uma classe importante de variedades Riemannianas - as variedades hiperbólicas - entre as quais se contam a "maioria" das variedades de dimensão 3.



Note-se que na torre de Postnikov



as fibras de homotopia das aplicações  $X^{n+1} \rightarrow X^n$  têm (pela sucessão exacta longa de homotopia de uma fibração) um único grupo de homotopia em dimensão  $n + 1$  que é isomorfo a  $\pi_{n+1}(X)$ . Isto é, a menos de equivalência de homotopia fraca, temos sucessões de fibração

$$K(\pi_{n+1}(X), n + 1) \rightarrow X^{n+1} \rightarrow X^n$$

pelo que podemos pensar na torre de Postnikov como uma decomposição de  $X$  em espaços mais simples (com um único grupo de homotopia não nulo). Trata-se de uma decomposição "dual" à de um complexo celular  $X$  em termos dos seus esqueletos  $X_n$ , onde temos sucessões de cofibração

$$X_n \rightarrow X_{n+1} \rightarrow \vee_{\alpha} (S^{n+1}) = M(\oplus_{\alpha} \mathbb{Z}, n + 1),$$

que descrevem o espaço  $X$  em termos de espaços mais simples (com um único grupo de homologia). Este é mais um exemplo de uma dualidade informal em Teoria de Homotopia entre a estrutura de cofibração e fibração chamada *dualidade de Eckmann-Hilton*. Os conceitos de espaços de Moore e espaços de Eilenberg-MacLane são conceitos duais neste sentido.

**O homomorfismo de Hurewicz.** Vamos agora usar o Teorema de Excisão de Homotopia para comparar os grupos de homotopia com os grupos de homologia. Vimos já que os primeiros grupos não nulos estão de acordo para esferas e o teorema de excisão garante que num certo domínio os grupos de homotopia levam sucessões de cofibração em sucessões exactas de grupos de homotopia, tal como o fazem para homologia. Não é portanto uma grande surpresa que os primeiros grupos de homotopia e de homologia não nulos coincidam. É esse o conteúdo do Teorema de Hurewicz, um resultado fundamental em Topologia, que agora demonstramos.

Sejam  $[i_n] \in H_n(S^n)$  e  $[e_n] \in H_n(D^n, S^{n-1})$  geradores tais que

$$\partial([e_n]) = [i_{n-1}], \quad \text{e} \quad p_*([e_n]) = [i_n].$$

Claramente podemos escolher tais geradores indutivamente começando com um  $[i_1]$  arbitrário.

**Definição 5.59.** *Seja  $(X, *)$  um espaço pontuado. O homomorfismo de Hurewicz*

$$h : \pi_n(X) \rightarrow H_n(X)$$

*é definido pela expressão*

$$h([f]) = f_*([i_n]).$$

*Se  $(X, A)$  é um par de espaços, o homomorfismo de Hurewicz relativo*

$$h : \pi_n(X, A) \rightarrow H_n(X, A)$$

*é definido por*

$$h([f]) = f_*([e_n]).$$

Começamos por verificar que  $h$  é de facto um homomorfismo.

**Proposição 5.60.** *As aplicações de Hurewicz  $h$  são homomorfismos de grupos.*

*Proof.* Verificamos apenas o caso relativo. O caso absoluto é inteiramente análogo. Dados  $[f], [g] \in \pi_n(X, A)$ , a soma  $[f] + [g]$  é representada pela composta

$$(D^n, S^{n-1}) \xrightarrow{\Delta} (D^n \vee D^n, S^{n-1} \vee S^{n-1}) \xrightarrow{f \vee g} (X, A)$$

onde  $\Delta$  denota a aplicação que colapsa o "disco equatorial"  $(D^{n-1}, S^{n-2}) \subset (D^n, S^{n-1})$ . Para  $i = 0, 1$  sejam

$$\pi_i : (D^n \vee D^n, S^{n-1} \vee S^{n-1}) \rightarrow (D^n, S^{n-1})$$

a aplicação que colapsa o  $i$ -ésimo somando e

$$j_i : (D^n, S^{n-1}) \rightarrow (D^n \vee D^n, S^{n-1} \vee S^{n-1})$$

a inclusão do respectivo somando. Usando a sucessão de Mayer-Vietoris é fácil ver que  $\pi_{0*}, \pi_{1*}$  descrevem  $H_n(D^n \vee D^n, S^{n-1} \vee S^{n-1})$  como um produto e  $j_{0*}, j_{1*}$  descrevem como um coproduto na categoria dos grupos abelianos. Em particular  $j_{0*}([e_n])$  e  $j_{1*}([e_n])$  são geradores de

$$H_n(D^n \vee D^n, S^{n-1} \vee S^{n-1}) \simeq \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}.$$

Uma vez que  $\pi_i \circ \Delta \simeq \text{id}$  temos

$$\Delta_*([e_n]) = j_{0*}([e_n]) + j_{1*}([e_n])$$

e portanto

$$\begin{aligned} h([f] + [g]) &= (f \vee g)_* \Delta_*([e_n]) \\ &= (f \vee g)_*(j_{0*}([e_n]) + j_{1*}([e_n])) \\ &= f_*([e_n]) + g_*([e_n]) \\ &= h([f]) + h([g]). \end{aligned}$$

□

O argumento da demonstração pode facilmente ser adaptado de forma a produzir o homomorfismo de Hurewicz generalizado descrito no exercício seguinte.

**Exercício 5.61.** *Sejam  $X, Y$  espaços pontuados. A aplicação*

$$[\Sigma X, Y]_* \rightarrow \text{Hom}(H_*(X), H_*(Y))$$

*definida por*

$$[f] \mapsto f_*$$

*é um homomorfismo de grupos.*

**Proposição 5.62.** *O homomorfismo de Hurewicz tem as seguintes propriedades:*

- (a) *É uma transformação natural  $\pi_n \rightarrow H_n$ .*  
 (b) *Dado um par  $(X, A)$ , o seguinte diagrama comuta*

$$\begin{array}{ccccc} \pi_n(X) & \xrightarrow{j_*} & \pi_n(X, A) & \xrightarrow{\partial} & \pi_{n-1}(A) \\ \downarrow h & & \downarrow h & & \downarrow h \\ H_n(X) & \xrightarrow{j_*} & H_n(X, A) & \xrightarrow{\partial} & H_{n-1}(A) \end{array}$$

- (c) *Dado um par  $(X, A)$ , o seguinte quadrado comuta*

$$\begin{array}{ccc} \pi_n(X, A) & \longrightarrow & \pi_n(X/A) \\ \downarrow h & & \downarrow h \\ H_n(X, A) & \longrightarrow & H_n(X/A) \end{array}$$

- (d)  *$h$  comuta com os homomorfismos de suspensão.*  
 (e) *Se  $[\gamma] \in \pi_1(A)$  e  $[\gamma] \cdot [f]$  denota a acção de  $[\gamma]$  em  $[f] \in \pi_n(X, A)$ , temos*

$$h([\gamma] \cdot [f]) = h([f]).$$

- (f) *Se  $[\gamma] \in \pi_1(X)$  e  $[f] \in \pi_n(X)$ ,  $h([\gamma] \cdot [f]) = h([f])$ .*

*Proof.* A afirmação (a) é clara da definição de  $h$ . Para ver (b) recordemos que  $\partial[f] = [f]_{|S^{n-1}}$  e portanto

$$h(\partial([f])) = f_{|S^{n-1}*}([i_{n-1}]) = f_{|S^{n-1}*}(\partial([e_n])).$$

Pela naturalidade da sucessão exacta do par em homologia temos

$$f_{|S^{n-1}*}(\partial([e_n])) = \partial f_*([e_n]) = \partial(h([e_n]))$$

o que mostra a comutatividade do quadrado da direita. Para o quadrado da esquerda, escrevendo  $p : (D^n, S^{n-1}) \rightarrow (S^n, *)$  temos

$$h(j_*([f])) = (f \circ p)_*([e_n]) = f_*([i_n]) = j_*(h([f])).$$

A afirmação (c) demonstra-se de forma semelhante e fica como exercício. Atendendo à definição dos homomorfismos de suspensão, (d) é uma consequência imediata de (b) e (c).

Finalmente, para ver (e) e (f) basta notar que os representantes de  $[\gamma] \cdot [f]$  e  $[f]$  são livremente homotópicos e portanto induzem o mesmo homomorfismo em homologia.  $\square$

**Exercício 5.63.** *Recorde o Exercício 5.42. Mostre que o homomorfismo de Hurewicz define uma transformação natural entre teorias de homologia nos complexos celulares finitos pontuados.*

$$\pi_k^s(-) \xrightarrow{h} \overline{H}_k(-).$$

**Nota 5.64.** *Os resultados anteriores sobre o homomorfismo de Hurewicz são consequências formais dos axiomas para uma teoria de homologia generalizada  $E_*$ , desde que haja um elemento distinguido  $[i_0] \in E_0(S^0)$ . É esse o caso se  $E_*$  é uma teoria multiplicativa, por exemplo, e o resultado do exercício anterior é então válido substituindo  $E_*$  por  $H_*$ .*

**Exemplo 5.65.** Seja  $X = S^1 \vee S^n$ . O revestimento universal é  $\tilde{X} \simeq \vee_{m \in \mathbb{Z}} S^n$  pelo que  $\pi_n(X) \simeq \oplus_{m \in \mathbb{Z}} \mathbb{Z}$ . O núcleo do homomorfismo de Hurewicz

$$h : \pi_n(X) \rightarrow H_n(X)$$

é precisamente o subgrupo gerado pelos elementos da forma  $[\gamma][f] - [f]$  para  $[\gamma] \in \pi_1(X)$  e  $[f] \in \pi_n(X)$ .

O seguinte resultado permite-nos reduzir o estudo do homomorfismo de Hurewicz ao caso dos complexos celulares:

**Lema 5.66.** *Seja  $0 \leq n \leq \infty$ . Se  $f : X \rightarrow Y$  é uma  $n$ -equivalência então*

$$f_* : H_k(X) \rightarrow H_k(Y)$$

*é um epimorfismo para  $k \leq n$  e um isomorfismo para  $k < n$ .*

*Proof.* Substituindo  $Y$  pelo cilindro  $M_f$  da aplicação  $f$ , e considerando as sucessões exactas de homologia e homotopia do par  $(M_f, X)$  vemos que nos basta mostrar

$$\pi_k(M_f, X) = 0 \text{ para } k \leq n \Rightarrow H_k(M_f, X) = 0 \text{ para } k \leq n$$

Seja  $\alpha \in Z_k(M_f, X)$  um ciclo relativo. Então

$$\alpha = \sum_{j \in J} n_j \sigma_j$$

para alguns  $n_j \in \mathbb{Z}$  e  $k$ -simplexos singulares  $\sigma_j : \Delta^k \rightarrow X$ , e temos  $\partial(\alpha) \in C_{k-1}(X)$ . Seja

$$B = \coprod_{j \in J} \Delta_j^k / \sim$$

onde  $\sim$  é a relação de equivalência que identifica as faces  $\Delta_i^{k-1}$  de  $\Delta_i^k$  e  $\Delta_j^k$  em que  $\sigma_i$  e  $\sigma_j$  coincidem.  $B$  é um complexo celular e temos uma aplicação canónica

$$B \xrightarrow{a} M_f$$

definida por  $a|_{\Delta_j^k} = \sigma_j$ . É ainda claro que se  $\tilde{\sigma}_j : \Delta_j^k \rightarrow B$  forem os simplexos singulares definidos pelas inclusões canónicas e

$$\tilde{\alpha} = \sum_j n_j \tilde{\sigma}_j$$

temos

$$a_{\#}(\tilde{\alpha}) = \alpha.$$

Seja  $A \subset B$  o subcomplexo formado pelos  $(k-1)$ -simplices que correspondem ao suporte de  $\partial(\alpha) \in C_{k-1}(X)$ . Então  $a(A) \subset X$  e portanto temos um diagrama

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{a} & B \\ \downarrow & \swarrow a' & \downarrow a \\ X & \xrightarrow{i} & M_f \end{array}$$

em que  $i$  é uma  $n$ -equivalência, e  $B$  se obtém de  $A$  colando células de dimensão  $\leq k \leq n$ . Pelo Lema 5.10 existe  $a'$  tal que o triângulo superior comuta e o de baixo comuta a menos de uma homotopia constante em  $A$ . Segue-se que

$$i_{\#} \circ a'_{\#}(\tilde{\alpha}) \sim a_{\#}(\tilde{\alpha}) = \alpha$$

em  $Z_k(M_f, X)$ . Uma vez que  $i_{\#} \circ a'_{\#}(\tilde{\alpha}) \in Z_k(X, X) = 0$  conclui-se que  $\alpha$  representa a classe nula em  $H_k(M_f, X)$  o que conclui a demonstração.  $\square$

Tendo em conta a afirmação (e) da Proposição 5.62, o homomorfismo de Hurewicz relativo factoriza-se pelo grupo quociente

$$\tilde{\pi}_n(X, A) = \pi_n(X, A)/H$$

onde  $H$  é o subgrupo (normal se  $n = 2$ ) gerado pelos elementos da forma  $[\gamma][f] - [f]$  para  $[\gamma] \in \pi_1(A)$  e  $[f] \in \pi_n(X, A)$ .

**Teorema 5.67** (Teorema de Hurewicz). *Seja  $(X, A)$  um par  $(n - 1)$ -conexo com  $n \geq 2$ . O homomorfismo de Hurewicz*

$$h: \tilde{\pi}_n(X, A) \rightarrow H_n(X, A)$$

*é um isomorfismo. Se  $X$  é  $(n - 1)$ -conexo com  $n \geq 2$ , então*

$$h: \pi_n(X) \rightarrow H_n(X)$$

*é um isomorfismo.*

*Proof.* Começamos por considerar o caso absoluto. Pelo Lema 5.66 basta-nos considerar o caso em que  $X$  é um complexo celular, e pelo Teorema 5.26 podemos assumir que  $X$  tem uma única 0-célula e todas as restantes células de dimensão  $\geq n$ . Uma vez que a inclusão

$$X_{n+1} \rightarrow X$$

é uma  $(n+1)$ -equivalência, podemos assumir que  $X$  tem apenas células de dimensão  $n$  e  $n + 1$ . Finalmente, uma vez que o tipo de homotopia da cofibra de homotopia de uma aplicação  $f$  depende apenas da classe de homotopia de  $f$  (ver Exercício 3.21) podemos assumir que as células de dimensão  $n + 1$  são coladas por aplicações pontuadas. Estamos portanto reduzidos ao caso em que  $X$  é a cofibra de uma aplicação

$$\vee_{\alpha} S^n \longrightarrow X_n = \vee_{\beta} S^n.$$

Consideremos o diagrama

$$\begin{array}{ccccccccc} \pi_{n+1}(X/X_n) & \xleftarrow{\phi} & \pi_{n+1}(X, X_n) & \xrightarrow{\partial} & \pi_n(X_n) & \longrightarrow & \pi_n(X) & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow h & & \downarrow h & & \downarrow h & & \downarrow h & & \downarrow \\ H_{n+1}(X/X_n) & \xleftarrow{\psi} & H_{n+1}(X, X_n) & \xrightarrow{\partial} & H_n(X_n) & \longrightarrow & H_n(X) & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

que comuta tendo em conta a Proposição 5.62. As aplicações  $\phi$  e  $\psi$  são isomorfismos pelos Teoremas de excisão de homotopia e homologia respectivamente. Pelo Corolário 5.45 e Exercício 5.46, o homomorfismo de Hurewicz é um isomorfismo para wedges de esferas. Pelo Lema dos 5, conclui-se que

$$h: \pi_n(X) \rightarrow H_n(X)$$

é um isomorfismo.

Consideremos agora o caso relativo. Faremos a demonstração apenas no caso em que  $A$  é simplesmente conexo referindo o leitor a [Ha, Theorem 4.37] para a demonstração do caso geral. Neste caso, o resultado é uma consequência imediata

da Proposição 5.62, do Teorema de excisão de homotopia e do caso absoluto que acabámos de demonstrar uma vez que no quadrado comutativo

$$\begin{array}{ccc} \pi_n(X, A) & \longrightarrow & \pi_n(X/A) \\ \downarrow h & & \downarrow h \\ H_n(X, A) & \longrightarrow & H_n(X/A) \end{array}$$

todas as aplicações excepto possivelmente  $h : \pi_n(X, A) \rightarrow H_n(X, A)$  são isomorfismos.  $\square$

Uma consequência extremamente útil do Teorema de Hurewicz relativo é o seguinte recíproco do Lema 5.66 para espaços simplesmente conexos (que frequentemente se designa também por Teorema de Whitehead).

**Corolário 5.68** (Whitehead). *Se  $X$  e  $Y$  são simplesmente conexos e  $f : X \rightarrow Y$  induz um isomorfismo em homologia,  $f$  é uma equivalência de homotopia fraca. Em particular, se  $X$  e  $Y$  têm o tipo de homotopia de complexos celulares,  $f$  é uma equivalência de homotopia.*

*Proof.* Seja  $M_f$  o cilindro da aplicação  $f$ . Considerando as sucessões exactas de homologia e homotopia do par  $(M_f, X)$  vemos que o resultado a demonstrar é equivalente a  $H_*(M_f, X) = 0 \Rightarrow \pi_*(M_f, X) = 0$ . Se  $X$  e  $Y$  são simplesmente conexos isto é uma consequência imediata do teorema de Hurewicz relativo.  $\square$

**Nota 5.69.** *Se  $X$  é um espaço topológico, pode definir-se uma topologia em  $\mathbb{Z} \cdot X$  (o grupo abeliano livre gerado por  $X$ ) de modo a que  $x \mapsto 1 \cdot x$  seja um mergulho. O Teorema de Dold-Thom (ver [Ha, 4.K]) diz<sup>27</sup> que*

$$\pi_k(\mathbb{Z} \cdot X) = \overline{H}_k(X)$$

e o homomorfismo de Hurewicz corresponde ao homomorfismo induzido em homotopia pela aplicação  $X \hookrightarrow \mathbb{Z} \cdot X$ . Este ponto de vista é proveitoso por várias razões. Por um lado, tomando a fibra de homotopia obtemos uma fibração

$$F \rightarrow X \rightarrow \mathbb{Z} \cdot X$$

que produz uma sucessão exacta longa relacionando grupos de homotopia e grupos de homologia (conforme [JWh]). Por outro, pode ver-se que a fibra de homotopia  $F$  é  $n$ -conexa quando o espaço  $X$  é  $(n-1)$ -conexo, o que implica que para tais espaços, o homomorfismo de Hurewicz

$$\pi_{n+1}(X) \rightarrow H_{n+1}(X)$$

é sobrejectivo (ver o Exercício 5.75 para uma demonstração deste facto). Finalmente, recentemente estas ideias encontraram aplicações importantes em Geometria Algébrica: foram utilizadas para construir a cohomologia motivica de esquemas regulares por Voevodsky [Vo], o que lhe permitiu resolver vários problemas em aberto em  $K$ -teoria algébrica. Este trabalho foi premiado com a medalha Fields em 1998.

<sup>27</sup> O Teorema é geralmente enunciado em termos do monóide abeliano livre  $SP^\infty X$  gerado por  $X$  mas é possível ver que as duas formulações são equivalentes (ver [LF]).

**Exercício 5.70** (Unicidade dos espaços de Moore). *Mostre que se  $n \geq 2$ ,  $G$  é um grupo abeliano e  $X$  é um espaço  $(n-1)$ -conexo com*

$$\overline{H}_k(X) = \begin{cases} G & \text{se } k = n, \\ 0 & \text{se } k \neq n. \end{cases}$$

*então existe uma equivalência fraca*

$$M(G, n) \longrightarrow X.$$

**Exercício 5.71** (Aproximações CW minimais). *Seja  $X$  um espaço simplesmente conexo de tipo finito (isto é, tal que  $H_k(X)$  é um grupo abeliano finitamente gerado para cada  $k$ ). Se*

$$H_k(X) \simeq \mathbb{Z}^{l_k} \oplus \mathbb{Z}/n_1 \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}/n_{m_k}$$

*mostre que existe uma aproximação CW para  $X$  com  $l_k + m_k + m_{k-1}$  células em dimensão  $k$  e que se  $m_k$  é o menor número possível de factores cíclicos para  $H_k(X)$ , este é o menor número possível de células para uma aproximação CW em cada dimensão.*

**Exemplo 5.72.** *Seja  $M$  uma variedade topológica fechada simplesmente conexa de dimensão 4. Então  $M$  tem o tipo de homotopia de um complexo CW finito (ver [Ha, Corollary A.12]). Uma vez que  $H_1(M)$  é a abelianização de  $\pi_1(M)$  temos  $H_1(M) = 0$ . Como  $\pi_1(M) = 0$ ,  $M$  é orientável, e por dualidade de Poincaré,  $H^3(M) = 0$ . Pelo Teorema dos Coeficientes Universais conclui-se que  $H_3(M) = 0$ <sup>28</sup> e  $H_2(M)$  é um grupo livre finitamente gerado. Isto é temos*

$$H_k(M) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{se } k = 0, 4 \\ \mathbb{Z}^n & \text{se } k = 2 \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

O exercício anterior diz então que  $M$  é a cofibra de homotopia de uma aplicação

$$S^3 \xrightarrow{f} \bigvee_{i=1}^n S^2$$

e portanto o tipo de homotopia de  $M$  é completamente determinado por um elemento

$$[f] \in \pi_3(\bigvee_{i=1}^n S^2).$$

Não é difícil ver que a classe de homotopia de  $[f]$  é completamente determinada pela forma quadrática em  $H^2(X)$  definida pelo produto cup (ver [Ha, Proposition 4.C.3] ou o Exercício 6.87).

**Nota 5.73.** *O exemplo anterior mostra que a classificação dos tipos de homotopia de variedades de dimensão 4 simplesmente conexas é muito simples. A questão da classificação a menos de homeomorfismo das variedades 4 simplesmente conexas foi resolvida por Michael Freedman (ver [Fr]), trabalho que foi premiado com a medalha Fields em 1982 e que inclui como caso particular a demonstração da conjectura de Poincaré em dimensão 4<sup>29</sup>. Em cada tipo de homotopia há no máximo duas classes de homeomorfismo de variedades topológicas. A classificação a menos de difeomorfismo das variedades de dimensão 4 é um dos mais importantes problemas em aberto em Topologia Diferencial. Tem havido muito progresso nos últimos 20*

<sup>28</sup>Recorde que se  $M$  é uma variedade orientável o Teorema dos Coeficientes Universais implica que  $H_{n-1}(M)$  não tem torsão.

<sup>29</sup>Uma variedade de dimensão 4 com o tipo de homotopia de  $S^4$  é homeomorfa a  $S^4$ .

anos mas não se sabe ainda se será sequer possível obter uma classificação razoável. Note-se que a classificação em dimensão  $\geq 5$  é mais simples e está compreendida desde o início dos anos 70.

A razão porque a noção de complexo CW foi introduzida por J.H.C. Whitehead foi precisamente para obter uma classificação dos tipos de homotopia do gênero da exemplificada acima para variedades de dimensão 4. Whitehead levou a cabo esta classificação para todos os complexos  $(n-3)$ -conexos de dimensão  $n \geq 4$ .

**Exercício 5.74** (Aproximações de homologia). *Mostre que se  $X$  é simplesmente conexo existe uma torre de sucessões de cofibração* <sup>30</sup>

$$\begin{array}{ccccccc} M(H_3(X), 2) & & M(H_{k+1}(X), k) & & M(H_{k+2}(X), k+1) & & \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ X_2 & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & X_k & \longrightarrow & X_{k+1} \cdots \longrightarrow X = \operatorname{colim}_k X_k \end{array}$$

Uma tal torre chama-se uma aproximação de homologia para  $X$ . Esta noção é o dual de Eckmann-Hilton da torre de Postnikov (ver Exercício 5.54).

**Exercício 5.75** (Adaptado de [Sw, Theorem 10.25]). (a) *Mostre que se  $T_q(X) : h_q(X) \rightarrow h'_q(X)$  é uma transformação natural entre teorias de homologia generalizadas nos complexos celulares finitos pontuados e  $T_q(S^0)$  é um epimorfismo para  $q \leq n$  e um isomorfismo para  $q < n$ , então para todo o complexo celular finito  $m$ -conexo  $X$ , se tem que  $T_q(X)$  é um epimorfismo para  $q \leq n+m+1$  e um isomorfismo para  $q < n+m+1$ .*

(b) *Use o Exercício 5.63 para concluir que se  $X$  é um complexo celular  $n$ -conexo ( $n \geq 1$ ), o homomorfismo de Hurewicz induz um epimorfismo*

$$\pi_{n+2}(X) \rightarrow H_{n+2}(X).$$

## 6. (CO)HOMOLOGIA DE FIBRAÇÕES.

Nesta secção estudamos a homologia e cohomologia de fibrações por meio da sucessão espectral de Leray-Serre. Uma boa referência geral para a álgebra das sucessões espectrais é [We, Chapter 5]. O nosso tratamento da sucessão espectral de Serre seguirá [Ha3, Chapter 1]. Para mais informação o leitor pode consultar [ML]. Os artigos originais [Se1, Se2] são (como quaisquer outros artigos do autor) altamente recomendados, e finalmente recomendamos o artigo [Mi2] sobre a origem das sucessões espectrais.

### Sucessões espectrais.

**Definição 6.1.** *Uma sucessão espectral com início em  $a \geq 0$  consiste numa sucessão de módulos diferenciais*

$$(E_r, d_r) \quad r \geq a$$

*juntamente com isomorfismos*

$$\phi_r : E_{r+1} \xrightarrow{\cong} H(E_r, d_r).$$

<sup>30</sup>Isto significa que o espaço  $X_{k+1}$  é a cofibra de homotopia da aplicação  $M(H_{k+1}(X), k) \rightarrow X_k$ .



Geralmente os módulos  $E_r$  serão bigraduados e os diferenciais  $d_r$  são aplicações bigraduadas, mas por enquanto podemos ignorar esta estrutura adicional.

O grupo  $E_r$  chama-se o *estágio* (ou *página*)  $r$  da sucessão espectral. Designando por

$$\tilde{Z}_r = \ker d_r \subset E_r$$

e

$$\tilde{B}_r = \operatorname{im} d_r \subset E_r$$

os conjuntos dos ciclos e bordos em  $(E_r, d_r)$  respectivamente, os isomorfismos  $\phi_r$  determinam aplicações quociente

$$\pi_r : \tilde{Z}_r \rightarrow E_{r+1}$$

que nos permite identificar  $E_{r+2}$  com um subquociente de  $E_r$ :

$$E_{r+2} \simeq \pi_r^{-1}(\tilde{Z}_{r+1})/\pi_r^{-1}(\tilde{B}_{r+1}).$$

Procedendo da mesma maneira, para todo o  $k > r$  podemos identificar os grupos  $E_k$  com subquocientes de  $E_r$ .

Indutivamente obtemos assim uma sucessão de pares encaixados de sub-módulos do termo inicial  $E_a$

$$0 \subset B_a \subset B_{a+1} \subset \dots \subset B_r \subset \dots \subset Z_r \subset \dots \subset Z_{a+1} \subset Z_a \subset E_a$$

com

$$E_r \simeq Z_r/B_r.$$

Os elementos de  $Z_r$  chamam-se os  $r$ -*ciclos* e os elementos de  $B_r$  os  $r$ -*bordos* da sucessão espectral. Se  $x \in Z_r \setminus B_r$  diz-se que o elemento  $x$  *sobrevive até ao estágio*  $r$  da sucessão espectral. Definimos o *módulo dos ciclos infinitos* por

$$Z_\infty = \bigcap_{r=a}^{\infty} Z_r,$$

e o módulo dos elementos que são *bordos no limite* por

$$B_\infty = \bigcup_{r=a}^{\infty} B_r.$$

O termo  $E_\infty$  da sucessão espectral é o módulo

$$E_\infty = Z_\infty/B_\infty.$$

Diz-se que a sucessão espectral *colapsa no termo*  $k$  se  $E_\infty = E_r$  para  $r \geq k$ .

**Definição 6.2.** Um morfismo de sucessões espectrais *consiste numa sucessão de morfismos de grupos abelianos*

$$f_r : E_r \rightarrow E'_r$$

que comutam com os diferenciais.

Notemos a seguinte consequência imediata da definição.

**Proposição 6.3.** Se  $f_r : E_r \rightarrow E'_r$  é um isomorfismo, então  $f_s$  é um isomorfismo para  $s \geq r$ .

Todas as sucessões espectrais que ocorrem em Matemática têm origem num *par exacto*<sup>31</sup>, uma noção introduzida por Massey para unificar as várias construções de sucessões espectrais conhecidas.

<sup>31</sup>Em Inglês, *exact couple*.

**Definição 6.4.** Um par exacto consiste num par de grupos abelianos  $(A, E)$  e um triplo de homomorfismos

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{i} & A \\ & \swarrow k & \searrow j \\ & E & \end{array}$$

com  $\ker j = \operatorname{im} i$ ,  $\ker i = \operatorname{im} k$ ,  $\ker k = \operatorname{im} j$ .

Dado um par exacto, define-se o homomorfismo

$$d: E \rightarrow E \quad \text{por} \quad d = jk$$

e como  $kj = 0$  temos  $d^2 = jkjk = 0$ , ou seja  $d$  é um diferencial em  $E$ .

**Proposição 6.5.** Se  $(A, E, i, j, k)$  é um par exacto, e definirmos

$$\begin{aligned} A' &= i(A) \\ E' &= H(E, d) \\ i' &= i|_{A'} \\ j' &= j \circ i^{-1} \\ k' &= k \end{aligned}$$

então  $(A', E', i', j', k')$  é um par exacto, chamado o par derivado de  $(A, E, i, j, k)$ .

*Proof.* Temos de mostrar que as definições de  $j'$  e  $k'$  fazem sentido. Seja  $a = i(b) \in A'$ . Então

$$dj(b) = jk j(b) = 0$$

pelo que  $j(b)$  é um ciclo em  $E$ . Se  $i(b) = 0$  então  $b = k(e)$  e portanto  $j(b) = jk(e) = 0$  pelo que a classe de homologia de  $j \circ i^{-1}(a)$  está bem definida.

Por outro lado se  $e \in E$  é um ciclo então  $jk(e) = 0$  pelo que  $k(e) \in i(A) = A'$ . Se  $f = jk(e)$  é um bordo em  $E$  então  $kjk(e) = 0$  pelo que  $k$  está bem definido em  $E'$ . O resto da demonstração fica como exercício.  $\square$

Conclui-se da Proposição anterior que um par exacto dá azo a uma sucessão espectral  $\{(E_r, d_r)\}_{r \geq a}$ , chamada a *sucessão espectral associada* ao par exacto, que é definida indutivamente por<sup>32</sup>

$$(E_r, d_r) = \begin{cases} (E, d) & \text{se } r = a, \\ (E'_{r-1}, d'_{r-1}) & \text{se } r > a. \end{cases}$$

**Exercício 6.6.** Mostre que se  $(A, E, i, j, k)$  é um par exacto os módulo dos  $r$ -ciclos e  $r$ -bordos são dados pelas fórmulas  $Z_r = k^{-1}(i^r D) \subset E$  e  $B_r = j(\ker i^r)$ , respectivamente.

<sup>32</sup>A razão de deixar em aberto o termo inicial da sucessão espectral deve-se a convenções de gradação para os diferenciais no caso em que os grupos e as aplicações no par exacto são graduados.

**A sucessão espectral de um complexo filtrado.** Uma das maneiras mais comuns de obter um par exacto (e portanto uma sucessão espectral) é por meio de uma filtração crescente de um complexo em cadeia.

**Definição 6.7.** *Uma filtração de um complexo em cadeia  $C_*$ , é uma sucessão de subcomplexos*

$$\dots F_p C_* \subset F_{p+1} C_* \subset \dots C_* \quad p \in \mathbb{Z}.$$

Escrevemos

$$F_\infty C_* = \cup_{p \in \mathbb{Z}} F_p C_* \subset C_*$$

e

$$F_{-\infty} C_* = \cap_{p \in \mathbb{Z}} F_p C_* \subset C_*.$$

A filtração diz-se exaustiva se  $F_\infty C_* = C_*$  e  $F_{-\infty} C_* = 0$ .

**Exemplo 6.8.** Se

$$\dots \subset X_p \subset X_{p+1} \subset \dots \subset X$$

é uma filtração de um espaço  $X$ , obtemos uma filtração

$$\dots \subset C_*(X_p) \subset C_*(X_{p+1}) \subset \dots \subset C_*(X)$$

do complexo singular de  $X$ . Neste exemplo, os complexos em cadeia envolvidos estão concentrados em graus não negativos.

Uma filtração de um complexo dá azo a uma sucessão exacta curta de complexos em cadeia

$$0 \rightarrow F_p C_* \xrightarrow{i} F_{p+1} C_* \xrightarrow{j} F_{p+1} C_* / F_p C_* \rightarrow 0$$

para cada  $p \in \mathbb{Z}$ , e portanto a uma infinidade de sucessões exactas longas em homologia

(13)

$$\dots \rightarrow H_k(F_p C_*) \xrightarrow{i} H_k(F_{p+1} C_*) \xrightarrow{j} H_k(F_{p+1} C_* / F_p C_*) \xrightarrow{\partial} H_{k-1}(F_p C_*) \rightarrow \dots$$

Estas sucessões exactas longas podem ser aglomeradas num par exacto.

**Definição 6.9.** *Seja  $\{F_p C_*\}$  um complexo filtrado. A sucessão espectral de homologia associada ao complexo filtrado é a sucessão espectral determinada pelo par exacto*

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{i} & A \\ & \swarrow k & \searrow j \\ & E & \end{array}$$

onde

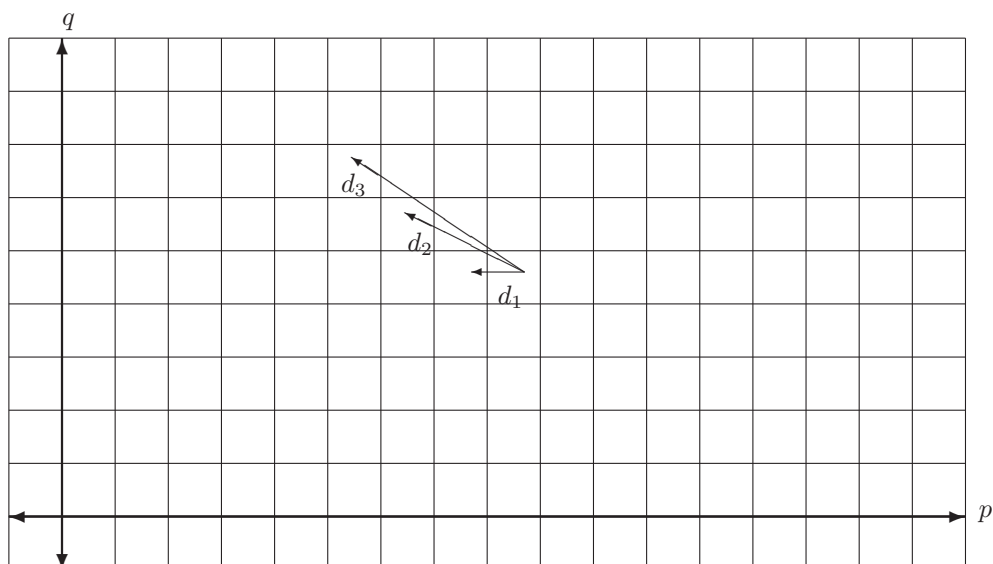
$$\begin{aligned} A &= \oplus_{p,q} A_{p,q}^1 & A_{p,q}^1 &= H_{p+q}(F_p C_*), \\ E &= \oplus_{p,q} E_{p,q}^1 & E_{p,q}^1 &= H_{p+q}(F_p C_* / F_{p-1} C_*), \end{aligned}$$

e os homomorfismos  $i, j$  são induzidos respectivamente, pelas inclusões  $F_p C_* \rightarrow F_{p+1} C_*$  e projecções  $F_p C_* \rightarrow F_p C_* / F_{p-1} C_*$ , enquanto que  $k$  é determinado pelos homomorfismo de bordo na sucessão exacta longa de homologia.

Note-se que com respeito à graduação de  $A$  e  $E$ ,  $i$  tem grau  $(1, -1)$ ,  $j$  tem grau  $(0, 0)$  e  $k$  tem grau  $(-1, 0)$ , pelo que o diferencial

$$d_r = j \circ i^{1-r} \circ k,$$

(definido num subquociente de  $E_{p,q}^1$  e com valores noutra subquociente), tem grau  $(-r, r-1)$ .<sup>33</sup> Se escrevermos, como é usual, os grupos  $E_{p,q}^r$  no plano  $pq$ , obtemos uma sucessão de páginas (uma para cada  $r$ ) em que os diferenciais aplicam cada entrada da página numa entrada desfazada conforme indicado na figura seguinte. A homologia de cada página com respeito a este diferencial é a página seguinte.



É importante observar que, sendo  $i$  e  $j$  a identidade ao nível dos representantes em  $E^1$ , todos os diferenciais  $d_r$  são dados ao nível dos representantes pelo operador de bordo  $\partial$ .

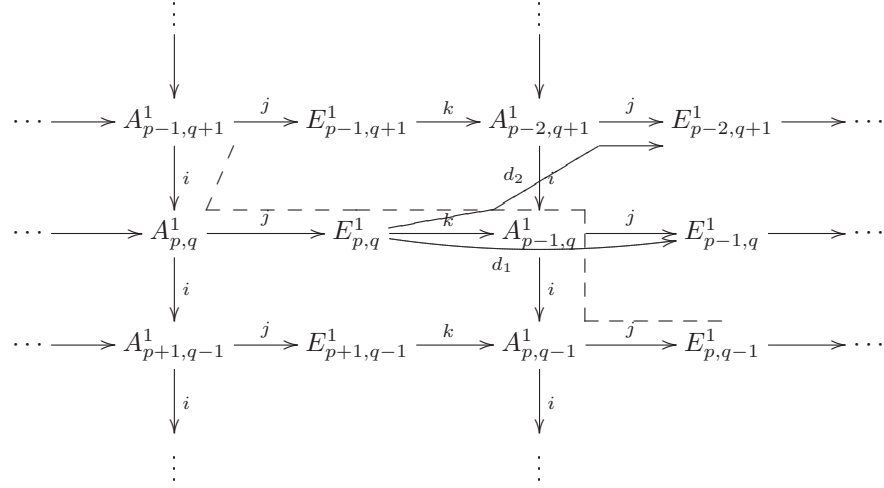
Notemos ainda que os grupos  $E_{p,q}^r$  estão relacionados com  $H_{p+q}(C_*)$ . Ou seja, a indexação é tal que  $p$  corresponde à filtração de uma classe, enquanto que a soma  $p+q$  corresponde à "dimensão geométrica" da classe.

A sucessão espectral de um complexo filtrado não é mais do que uma maneira de organizar convenientemente a informação contida na infinidade de sucessões exactas longas (13). A melhor maneira de pensar no funcionamento da sucessão espectral

<sup>33</sup>A sucessão espectral em que os termos  $E^r$  são bigraduados e os diferenciais  $d_r$  têm grau  $(-r, r-1)$  chama-se uma *sucessão espectral de homologia*.

é por meio do seguinte diagrama planar:

(14)



em que as sucessões exactas longas são paralelas à linha desenhada a tracejado. O diferencial  $d_1$  é dado pela composição  $j \circ k$ . Se  $d_1(x) = 0$  então  $k(x) \in \text{im } i$  e portanto  $d_2 = j \circ i^{-1} \circ k$  fica definido (em subquocientes de  $E_{*,*}^1$ ) como indicado na figura, etc.

A um par exacto bigraduado  $(A_{p,q}, E_{p,q}, i, j, k)$  que dê origem a uma sucessão espectral de homologia (isto é, no qual os graus dos homomorfismos  $i, j, k$  são  $(1, -1), (0, 0)$  e  $(-1, 0)$  respectivamente) associamos os grupos

$$H_n = \text{colim}_p A_{p,n-p} \quad n \in \mathbb{Z}.$$

e uma filtração crescente nestes definida por

$$F_p(H_n) = \text{im}(A_{p,n-p} \rightarrow \text{colim}_p A_{p,n-p}).$$

Escrevemos

$$F_\infty(H_n) = \cup_p F_p(H_n) \quad F_{-\infty}(H_n) = \cap_p F_p(H_n).$$

**Exemplo 6.10.** Se  $\{X_p\}_{p \geq 0}$ <sup>34</sup> é uma filtração de um espaço  $X$  com  $\cup X_p = X$ , na sucessão espectral determinada por esta filtração temos

$$H_n = \text{colim}_p H_n(X_p) = H_n(X)$$

e  $F_p(H_n) = \text{im}(H_n(X_p)) \subset H_n(X)$ ,  $F_\infty H_n = H_n$ ,  $F_{-\infty} H_n = 0$ .

**Proposição 6.11.** Há uma inclusão natural

$$F_p(H_n)/F_{p-1}(H_n) \longrightarrow E_{p,n-p}^\infty,$$

que é um isomorfismo sse  $Z_{p,q}^\infty = \cap_r Z_{p,q}^r \subset E_{p,q}^1$  coincide com  $\ker k : E_{p,q}^1 \rightarrow A_{p-1,q}^1$ .

<sup>34</sup>Esta notação significa que  $X_p = \emptyset$  para  $p < 0$ .

*Proof.* Consideremos o diagrama

$$\begin{array}{ccccc}
 & & K & \overset{j}{\dashrightarrow} & B_{p,n-p}^\infty \\
 & & \downarrow & & \downarrow \\
 A_{p-1,n-p+1}^1 & \xrightarrow{i} & A_{p,n-p}^1 & \xrightarrow{j} & Z_{p,n-p}^\infty \subset E_{p,n-p}^1 \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 F_{p-1}H_n & \longrightarrow & F_p(H_n) & \dashrightarrow & E_{p,n-p}^\infty
 \end{array}$$

onde as duas últimas colunas são sucessões exactas curtas, a linha do meio é exacta, e

$$K = \{a \in A_{p,n-p}^1 : i^s(a) = 0 \text{ para algum } s > 0\}.$$

Note-se que, por definição dos diferenciais, qualquer elemento na imagem de  $j$  é um ciclo infinito.

Dado  $a \in K \setminus 0$ , seja  $r = \min\{s : i^s(a) = 0\}$ . Então  $i^{r-1}(a) = k(x)$  para algum  $x \in E_{p+r,n-r+2}^1$  com  $x \neq 0$  um elemento que sobrevive até ao termo  $E^r$  e tal que  $j(a) = d_r(x)$  em  $E^r$ . Assim,  $j(a) \in B_{p,n-p}^\infty$  e portanto  $j$  determina uma aplicação

$$(15) \quad F_p(H_n)/F_{p-1}(H_n) \rightarrow E_{p,n-p}^\infty.$$

Suponhamos agora que  $j(a) \in B_{p,n-p}^\infty$ . Então  $j(a) = d_k(x)$  para algum  $k$  e então existe  $y \in A_{p,n-p}^1$  tal que  $j(y) = j(a)$  e  $y \in K$ . Tomando  $z \in A_{p-1,n-p+1}^1$  tal que  $i(z) = a - y$  temos

$$a = y + i(z)$$

o que mostra que

$$j^{-1}(B_{p,n-p}^\infty) = K + i(A_{p-1,n-p+1}^1)$$

pelo que a aplicação (15) é injectiva.

Esta aplicação é sobrejectiva sse todo o ciclo infinito está na imagem de  $j$ . Como  $\text{im } j = \ker k$ , isto conclui a demonstração.  $\square$

**Definição 6.12.** Diz-se que uma sucessão espectral de homologia  $(E_{p,q}^r, d_r)$  converge fracamente para um grupo graduado  $H_*$  se existe uma filtração crescente

$$F_p H_* \subset F_{p+1} H_* \subset H_*$$

e isomorfismos

$$E_{p,q}^\infty \simeq F_p(H_{p+q})/F_{p-1}(H_{p+q}).$$

Se uma sucessão espectral converge fracamente para  $H_*$ , apenas nos dá informação sobre

$$F_\infty(H_*)/F_{-\infty}(H_*)$$

pelo que na prática só estamos interessados em sucessões espectrais em que este quociente coincide com  $H_*$ . Note-se que, no caso da sucessão espectral associada a um complexo filtrado, mesmo que a filtração seja exaustiva pode acontecer que  $F_{-\infty}H_* \neq 0$ .

**Exercício 6.13.** (a) Dê um exemplo de um complexo filtrado com  $\cap_p F_p C_* = 0$  mas  $F_{-\infty}H_*(C_p) \neq 0$ .

(b) Mostre que se para cada  $n \in \mathbb{Z}$ , existe  $q(n)$  tal que  $H_n(F_p C_*) = 0$  para  $p < q(n)$ , então  $F_{-\infty}H_* = 0$ .

**Definição 6.14.** Diz-se que uma sucessão espectral de homologia  $E_{p,q}^r$  se aproxima<sup>35</sup> de  $H_*$ , se converge fracamente para  $H_*$  e  $F_{-\infty}H_* = 0$ ,  $F_{\infty}H_* = H_*$ . Nesse caso escrevemos

$$E_{p,q}^r \Rightarrow H_{p+q}.$$

Quando uma sucessão espectral se aproxima de  $H_*$ , obtemos no termo  $E_{\infty}$  uma sucessão de subquocientes de  $H_*$ . Para calcular os grupos de homologia há que determinar as extensões envolvidas. Em geral o problema é não trivial mesmo que haja apenas um número finito de extensões envolvidas. Por exemplo, se  $G$  é um grupo abeliano filtrado com

$$0 = F_{-1}G \subset F_0G \subset F_1(G) = G$$

e  $F_0G/F_{-1}G = F_1G/F_0G = \mathbb{Z}/2$ , tudo o que podemos concluir é que

$$G = \mathbb{Z}/4 \text{ ou } G = \mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/2.$$

O problema é ainda mais complicado se o número de extensões é infinito. Por exemplo, os grupos  $\mathbb{Z}/p^{\infty}$ ,  $\mathbb{Z}$  e  $\hat{\mathbb{Z}}_p$  todos possuem filtrações

$$\dots \subset F_kG \subset \dots \subset F_{-1}G \subset F_0(G) = G$$

com quocientes  $F_k/F_{k-1} \simeq \mathbb{Z}/p$ .

**Proposição 6.15.** Se  $F_pC_*$  é uma filtração exaustiva de  $C_*$  e para cada  $p, n$

$$(16) \quad \cap_q \text{im}(H_n(F_qC_*) \rightarrow H_n(F_pC_*)) = 0$$

então a sucessão espectral de homologia do complexo filtrado aproxima a homologia de  $C_*$ , isto é,

$$E_{p,q}^r \Rightarrow H_{p+q}(C_*).$$

*Proof.* A condição (16) garante que  $F_{-\infty}H_* = 0$  e que um ciclo infinito é uma classe no núcleo de  $k$  pelo que a afirmação é uma consequência da Proposição 6.11.  $\square$

Note-se que a Proposição 6.15 se aplica por exemplo se a filtração  $F_pC_*$  é limitada inferiormente ou mais geralmente se para cada  $n$  existe  $q(n)$  tal que  $H_n(F_{q(n)}C_*) = 0$ . Há uma situação ainda mais simples, que é comum na prática.

**Definição 6.16.** Uma sucessão espectral de homologia diz-se limitada se em cada sucessão

$$\dots \xrightarrow{i} A_{p-1,q+1}^1 \xrightarrow{i} A_{p,q}^1 \xrightarrow{i} A_{p+1,q-1}^1 \xrightarrow{i} \dots$$

apenas um número finito de  $i$ 's não é um isomorfismo, ou equivalentemente (pela exactidão de (14)) se para cada  $n$ , apenas um número finito de termos  $E_{p,q}^1$  com  $p+q=n$  é não nulo.

Se uma filtração exaustiva de um complexo  $F_p(C_*)$  dá azo a uma sucessão espectral limitada, então a condição da Proposição 6.15 verifica-se obviamente e temos portanto para cada  $n$  uma filtração finita

$$0 = F_{s(n)}(H_n(C_*)) \subset F_{s(n)+1}(H_n(C_*)) \subset \dots \subset F_{t(n)}(H_n(C_*)) = H_n(C_*)$$

com quocientes

$$F_pH_n/F_{p-1}H_n = E_{p,q}^{\infty}.$$

Assim, se conseguirmos calcular todos os diferenciais na sucessão espectral, precisamos apenas de resolver um número finito de extensões para calcular os grupos  $H_n(C_*)$ .

<sup>35</sup>Em Inglês, *abuts*.

**Exercício 6.17.** *Seja  $f : C_* \rightarrow D_*$  um morfismo de complexos em cadeia filtrados. Mostre que se as filtrações dão origem a sucessões espectrais limitadas e o morfismo de sucessões espectrais induzido por  $f$  é um isomorfismo em  $E_\infty$ , então  $f$  induz um isomorfismo em homologia.*

O seguinte exercício dá-nos a versão da sucessão espectral de Serre para complexos em cadeia.

**Exercício 6.18** (Sucessões espectrais de um complexo duplo). *Um complexo duplo é uma família  $\{C_{k,l}\}_{k,l \geq 0}$  de grupos abelianos e homomorfismos*

$$d^h : C_{k,l} \rightarrow C_{k-1,l} \quad d^v : C_{k,l} \rightarrow C_{k,l-1}$$

tais que  $(d^h)^2 = (d^v)^2 = d^h d^v + d^v d^h = 0$ . O complexo total associado ao complexo duplo  $C_{*,*}$  é o complexo definido por

$$\text{Tot}(C_{*,*})_n = \bigoplus_{k+l=n} C_{k,l}$$

com diferencial determinado pelos homomorfismos

$$d|_{C_{k,l}} = d^h + d^v : C_{k,l} \rightarrow C_{k-1,l} \oplus C_{k,l-1}.$$

- (a) *Verifique que  $(\text{Tot}(C_{*,*}), d)$  é um complexo em cadeia.*  
 (b) *Seja  $H_k^h(C_{*,l})$  a homologia do complexo  $(C_{*,l}, d^h)$ , e defina-se  $H_k^v(C_{l,*})$  analogamente. Mostre que  $d^v$  induz um diferencial em  $H_k^h(C_{*,l})$  para cada  $k$ -fixo, e analogamente para  $d^h$ .*  
 (c) *Mostre que existem sucessões espectrais limitadas*

$$E_{p,q}^2 = H_p^v(H_q^h(C_{*,*})) \Rightarrow H_{p+q}(\text{Tot}(C_{*,*}))$$

e

$$E_{p,q}^2 = H_p^h(H_q^v(C_{*,*})) \Rightarrow H_{p+q}(\text{Tot}(C_{*,*})).$$

- (d) *Seja  $R$  um anel comutativo e  $M, N$  módulos sobre  $R$ . Recorde que se  $P_* \rightarrow M$  é uma resolução projectiva de  $M$  se define*

$$\text{Tor}^k(M, N) = H_k(P_* \otimes N).$$

Use as sucessões espectrais da alínea anterior para mostrar que,

$$\text{Tor}_R^k(M, N) \simeq \text{Tor}_R^k(N, M).$$

**Exercício 6.19** (Sucessão espectral de Mayer-Vietoris). *Seja  $\{U_\alpha\}$  uma cobertura aberta de um espaço  $X$ . Escrevemos*

$$U_{\alpha_0 \alpha_1 \dots \alpha_n} = U_{\alpha_0} \cap U_{\alpha_1} \cap \dots \cap U_{\alpha_n}.$$

Escolha-se uma ordem total para o conjunto  $\{\alpha\}$  dos índices e seja

$$C_{m,n} = \bigoplus_{\alpha_0 < \alpha_1 < \dots < \alpha_m} C_n(U_{\alpha_0 \alpha_1 \dots \alpha_m})$$

o complexo duplo que tem por diferencial vertical o diferencial determinado da forma evidente pelos diferenciais dos complexos de cadeias singulares e diferencial horizontal determinado por

$$d|_{C_n(U_{\alpha_0 \alpha_1 \dots \alpha_m})} = \sum_{k=0}^n (-1)^k j_{k\#}$$

onde

$$j_k : U_{\alpha_0 \alpha_1 \dots \alpha_m} \longrightarrow U_{\alpha_0 \dots \widehat{\alpha_k} \dots \alpha_m}$$

é a inclusão.



(a) Mostre que a homologia horizontal  $H_m^h(C_{*,i})$  está concentrada em dimensão 0 e coincide com  $H_m(X)$ .

(b) Mostre que existe uma sucessão espectral de homologia limitada com

$$E_{p,q}^2 = H_p^h(\oplus_{\alpha_0 < \alpha_1 < \dots < \alpha_n} H_q(U_{\alpha_0 \dots \alpha_n})) \Rightarrow H_{p+q}(X).$$

(c) Identifique esta sucessão espectral com a sucessão de Mayer-Vietoris no caso de uma cobertura com apenas dois abertos.

**A sucessão espectral de Serre.**

**Definição 6.20.** Uma fibração  $p: E \rightarrow B$  diz-se orientável sobre um grupo abeliano  $G$ , se para todos os  $b, b' \in B$  e  $\alpha: [0, 1] \rightarrow B$  com  $\alpha(0) = b, \alpha(1) = b'$ , a aplicação de monodromia

$$\tau_\alpha: p^{-1}(b) \rightarrow p^{-1}(b')$$

induz a identidade em homologia com coeficientes em  $G$ .

**Lema 6.21.** Se  $p: E \rightarrow B$  é orientável sobre  $G$  e  $f: A \rightarrow B$  é uma aplicação contínua, o pullback  $f^*p: f^*E \rightarrow A$  é também orientável sobre  $G$ .

*Proof.* Seja  $\alpha: [0, 1] \rightarrow A$  um caminho com  $\alpha(0) = a$  e  $\alpha(1) = a'$ . A aplicação de monodromia da fibração é definida por um levantamento no seguinte diagrama

$$\begin{array}{ccccc} F & \xrightarrow{\quad} & f^*E & \xrightarrow{\cong} & E \\ \downarrow & \nearrow \text{---} & \downarrow f^*p & \nearrow \text{---} & \downarrow p \\ F \times [0, 1] & \xrightarrow{\cong \pi_1} & [0, 1] & \xrightarrow{\alpha} & A \xrightarrow{f} B \end{array}$$

Uma vez que o levantamento a  $f^*E$  pode ser obtido a partir do levantamento a  $E$  pela propriedade universal do pullback, conclui-se que o diagrama

$$\begin{array}{ccc} (f^*p)^{-1}(a) = p^{-1}(f(a)) & \xrightarrow{\cong} & p^{-1}(f(a)) \\ \downarrow \tau_\alpha & & \downarrow \tau_{f \circ \alpha} \\ (f^*p)^{-1}(a') = p^{-1}(f(a')) & \xrightarrow{\cong} & p^{-1}(f(a')) \end{array}$$

comuta, o que conclui a demonstração. □

**Teorema 6.22 (Serre).** Seja  $p: E \rightarrow B$  uma fibração orientável sobre  $G$  com fibra  $F$ . Existe uma sucessão espectral de homologia limitada aproximando a homologia de  $E$  com termo  $E^2$  dado por

$$E_{p,q}^2 = H_p(B; H_q(F)).$$

*Proof.* Seja  $f: B' \rightarrow B$  uma aproximação celular de  $B$ . Pelo Lema 6.21 o pullback  $p': E' \rightarrow B'$  de  $p$  pela aplicação  $f$  é uma fibração orientável com fibra  $F$ . Pela sucessão exacta longa de homotopia a aplicação  $E' \rightarrow E$  é uma equivalência fraca e portanto induz um isomorfismo em homologia com quaisquer coeficientes. Podemos portanto assumir que  $B$  é um complexo celular.

Consideremos a filtração

$$\emptyset = B_{-1} \subset \dots \subset B_p \subset B_{p+1} \subset \dots \subset B$$

de  $B$  pelos seus esqueletos e seja  $E_p = p^{-1}(B_p)$  a filtração induzida em  $E$ . Esta filtração determina uma filtração crescente

$$F_p(C_*(E)) = C_*(E_p) \subset C_*(E)$$

do complexo de cadeias singulares de  $E$  e portanto, uma sucessão espectral de homologia com

$$E_{p,q}^1 = H_{p+q}(E_p, E_{p-1}).$$

Uma vez que  $(B_p, B_{p-1})$  é  $p$ -conexo, as sucessões exactas longas de homotopia das fibrações restritas a  $B_p$  e  $B_{p-1}$  e o lema dos 5 mostram que o par  $(E_p, E_{p-1})$  é  $p$ -conexo. Conclui-se que as aplicações

$$A_{p,n-p}^1 = H_n(E_p) \rightarrow A_{p+1,n-p-1}^1 = H_n(E_{p+1})$$

são isomorfismos para  $p < 0$  ou  $p > n$  e portanto a sucessão espectral é limitada e aproxima a homologia de  $E$ . Resta-nos identificar o termo  $E^2$  da sucessão espectral.

Começamos por dar uma forma conveniente ao termo  $E^1$ :

$$E_{p,q}^1 \simeq C_p(B; H_q(F; G)) = H_p(B_p, B_{p-1}) \otimes H_q(F; G).$$

Para ver isto sejam  $f_\alpha : (D^p, S^{p-1}) \rightarrow (B_p, B_{p-1})$  as aplicações características das células de  $B$ . Seja  $x_\alpha = f_\alpha(0) \in B$ ,  $F_\alpha = p^{-1}(x_\alpha)$  e consideremos a aplicação

$$D^p \times F_\alpha \times [0, 1] \rightarrow B_p$$

definida por

$$(x, y, t) \mapsto f_\alpha(tx)$$

A propriedade do levantamento das homotopias produz então aplicações de fibrações

$$\begin{array}{ccc} D^p \times F_\alpha & \xrightarrow{t_\alpha} & E_p \\ \downarrow \pi_1 & & \downarrow p \\ D^p & \xrightarrow{f_\alpha} & B_p \end{array}$$

que induzem equivalências de homotopia fibradas (uma vez que ambos os espaços totais são homotopicamente equivalentes a  $F_\alpha$  e a aplicação induz uma equivalência de homotopia nas fibras)

$$D^p \times F_\alpha \xrightarrow{\bar{t}_\alpha} f_\alpha^*(E_p).$$

As restrições destas aplicações a  $S^{p-1}$  são ainda equivalências de homotopia fibradas. Daqui se conclui que a aplicação de pares

$$\coprod_{\alpha} (D^p, S^{p-1}) \times F_\alpha \xrightarrow{\coprod_{\alpha} t_\alpha} (E_p, E_{p-1})$$

sendo a composição de um par de equivalências de homotopia fibradas com um homeomorfismo relativo induz um isomorfismo em homologia. Como a fibração é orientável relativamente a  $G$  temos isomorfismos canónicos

$$H_*(F_\alpha; G) = H_*(F; G)$$

logo utilizando o isomorfismo dado pelo produto  $\times$  em homologia

$$H_p(D^p, S^{p-1}; \mathbb{Z}) \otimes H_q(F; G) \xrightarrow{\times} H_{p+q}((D^p, S^{p-1}) \times F; G)$$

obtemos isomorfismos

$$E_{p,q}^1 = H_{p+q}(E_p, E_{p-1}; G) \xleftarrow{\psi} H_p(B_p, B_{p-1}; \mathbb{Z}) \otimes H_q(F; G) = C_p(B; H_q(F; G)).$$

Resta-nos ver que o diagrama

$$\begin{array}{ccc} E_{p,q}^1 & \xrightarrow{\psi} & C_p(B; H_q(F; G)) \\ d_1 \downarrow & & \downarrow \partial \\ E_{p-1,q}^1 & \xrightarrow{\psi} & C_{p-1}(B; H_q(F; G)). \end{array}$$

comuta.

Seja  $e_\alpha^p$  uma célula de dimensão  $p$  de  $B$  tal que a componente do diferencial celular  $\partial(e_\alpha^p)$  segundo  $e_\beta$  é  $n_{\alpha\beta} \in \mathbb{Z}$  e seja  $x \in H_q(F; G)$ . Precisamos de demonstrar que a componente de

$$\psi \circ d_1 \circ (\psi^{-1}([e_\alpha^p] \otimes x)) \in H_{p-1}(B_{p-1}, B_{p-2}) \otimes H_q(F; G)$$

segundo o somando determinado pela célula  $e_\beta^{p-1}$  é

$$n_{\alpha\beta}[e_\beta^{p-1}] \otimes x.$$

Para tal, consideremos o seguinte diagrama

$$\begin{array}{ccccc} H_n((D_\alpha^p, S_\alpha^{p-1}) \times F_\alpha; G) & \xrightarrow{\partial} & H_{n-1}(\partial D_\alpha^p \times F_\alpha; G) & \xrightarrow{\lambda_{\alpha\beta*}} & H_{n-1}(D_\beta^{p-1} \times F_\beta / (S_\beta^{p-2} \times F_\beta); G) \\ \downarrow & & \downarrow & & \uparrow \\ H_n(E_p, E_{p-1}; G) & \longrightarrow & H_{n-1}(E_{p-1}; G) & \longrightarrow & \tilde{H}_{n-1}(E_{p-1}/E_{p-2}; G) \\ & & \downarrow & \nearrow \simeq & \\ & & H_{n-1}(E_{p-1}, E_{p-2}; G) & & \end{array}$$

onde  $F_\alpha$  e  $F_\beta$  denotam as fibras sobre os centros das células  $e_\alpha^p$  e  $e_\beta^{p-1}$  respectivamente. A componente que queremos determinar é precisamente

$$\lambda_{\alpha\beta*}([\partial e_\alpha^p] \times x).$$

Mas a aplicação

$$\lambda_{\alpha\beta}: \partial D_\alpha^p \times F_\alpha \longrightarrow S_\beta^{p-1} \times F_\beta / (* \times F_\beta)$$

cobre uma aplicação  $\gamma_{\alpha\beta}: S^{p-1} \rightarrow S^{p-1}$  de grau  $n_{\alpha\beta}$  e sobre cada  $x \notin \gamma_{\alpha\beta}^{-1}(*)$ , a aplicação induzida na fibra é a identidade em homologia, donde segue o resultado pretendido.  $\square$

**Exemplo 6.23.** Consideremos a fibração dos caminhos sobre uma esfera  $S^n$  de dimensão  $\geq 2$ .

$$\Omega S^n \rightarrow P S^n \rightarrow S^n.$$

Uma vez que a base é simplesmente conexa, a fibração é orientável. O termo  $E^2$  da sucessão espectral é dado por

$$E_{p,q}^2 = H_{p+q}(S^n; H_q(\Omega S^n; \mathbb{Z})) = \begin{cases} H_q(\Omega S^n; \mathbb{Z}) & \text{se } p = 0, \\ H_{q-n}(\Omega S^n; \mathbb{Z}) & \text{se } p = n, \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Isto mostra que os únicos diferenciais que podem não ser nulos são os diferenciais

$$d_n: E_{0,q}^n \rightarrow E_{n,q-n+1}^n.$$

Em particular a sucessão espectral colapsa no termo  $E_n$ . Como  $PS^n$  é contráctil, os diferenciais  $d_n$  são necessariamente isomorfismos. Em particular

$$d_n: H_{n-1}(\Omega S^n; \mathbb{Z}) \xrightarrow{\simeq} H_n(S^n; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$$

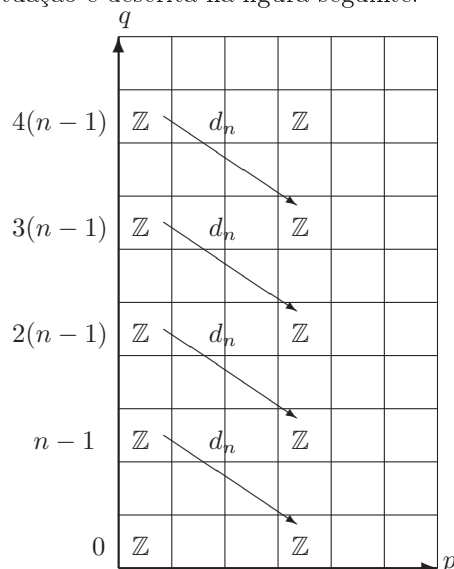
e portanto

$$E_{n,n-1}^2 \simeq H_n(S^n; H_{n-1}(\Omega S^n)) \simeq \mathbb{Z}.$$

Indutivamente vemos que para  $n \geq 1$ ,

$$H_k(\Omega S^n; \mathbb{Z}) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{se } (n-1)|k \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

A situação é descrita na figura seguinte.



A sucessão espectral de Serre é natural com respeito a morfismos de fibrações. Mais precisamente temos o seguinte resultado.

**Proposição 6.24.** *Um morfismo*

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{f} & E' \\ \downarrow p & & \downarrow p' \\ B & \xrightarrow{g} & B' \end{array}$$

de fibrações orientáveis sobre  $G$  induz um morfismo de sucessões espectrais

$$\{f^r: E^r(p) \rightarrow E^r(p')\}_{r \geq 2}$$

com as seguintes propriedades:

- (i) O morfismo  $f_*: H_*(E; G) \rightarrow H_*(E'; G)$  preserva a filtração em  $H_*$ .
- (ii) O morfismo  $E^\infty(p) \rightarrow E^\infty(p')$  identifica-se com o morfismo determinado por  $f_*$  nos quocientes da filtração.
- (iii) O homomorfismo  $f^2: E^2(p) \rightarrow E^2(p')$  identifica-se com o homomorfismo induzido em homologia pela restrição  $i$  de  $f$  à fibra e por  $g$ .

*Proof.* Podemos supor que  $B$  e  $B'$  são complexos celulares. Sendo assim podemos aproximar  $g$  por uma aplicação celular e usar a propriedade do levantamento das homotopias para cobrir-la por uma aplicação de fibrações homotópica a  $h$ . A verificação das afirmações do enunciado é agora um exercício simples.  $\square$

**Exercício 6.25.** *Seja*

$$\begin{array}{ccccc} F & \longrightarrow & E & \longrightarrow & B \\ \downarrow h & & \downarrow f & & \downarrow g \\ F' & \longrightarrow & E' & \longrightarrow & B' \end{array}$$

um morfismo de fibrações orientáveis sobre  $G$ . Mostre que se  $h_*$  e  $g_*$  são isomorfismos em homologia, o mesmo sucede com  $f_*$ .

Para cada  $n$ , a filtração  $\{F_p H_n(E; G)\}$  é finita. Temos

$$0 = F_{-1} H_n(E; G) \subset F_0 H_n(E; G) \subset \cdots \subset F_{n-1} H_n(E; G) \subset F_n H_n(E; G) = H_n(E; G)$$

logo o primeiro quociente da filtração inclui-se em  $H_n(E; G)$  e o último é um quociente de  $H_n(E; G)$ . Os homomorfismos

$$H_n(E; G) \rightarrow F_n H_n(E; G) / F_{n-1} H_n(E; G) = E_{n,0}^\infty$$

e

$$F_0 H_n(E; G) = E_{0,n}^\infty \hookrightarrow H_n(E; G)$$

chamam-se os *homomorfismos de aresta*<sup>36</sup> da sucessão espectral. A seguinte proposição identifica estes homomorfismos com os diferenciais mais compridos na sucessão espectral.

**Proposição 6.26** (Homomorfismos de aresta). *Seja  $p : E \rightarrow B$  uma fibração orientável sobre  $G$  com  $B$  e  $F$  conexos por arcos e  $i : F \rightarrow E$  a inclusão da fibra. Designando por  $\psi : H_p(B; H_q(F)) \rightarrow E_{p,q}^2$  o isomorfismo do Teorema 6.22, os seguintes diagramas comutam.*

$$(17) \quad \begin{array}{ccc} H_n(F; G) = H_0(B; H_n(F; G)) & \xrightarrow{i_*} & H_n(E; G) \\ \downarrow \simeq \psi & & \uparrow \\ E_{0,n}^2 & \longrightarrow & E_{0,n}^\infty \end{array}$$

$$(18) \quad \begin{array}{ccc} H_n(E; G) & \xrightarrow{p_*} & H_n(B; H_0(F; G)) = H_n(B; G) \\ \downarrow & & \uparrow \simeq \psi \\ E_{n,0}^\infty & \hookrightarrow & E_{n,0}^2 \end{array}$$

*Proof.* Começamos por ver (17). Uma vez que  $B$  é conexo por arcos podemos assumir que  $B$  tem uma única célula de dimensão 0. O resultado é então claro da

<sup>36</sup>Em inglês, *edge homomorphisms*.

seguinte porção do diagrama (14)

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & & & \\
 & & \downarrow i & & & & \\
 H_n(E_2, F; G) & \xrightarrow{\partial} & H_n(F; G) & \xrightarrow[\simeq]{\psi} & H_n(F, \emptyset) = E_{0,n}^1 = E_{0,n}^2 & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow i & & & & \\
 & & H_n(E_2; G) & & & & \\
 & & \downarrow i & & & & \\
 & & \vdots & & & & \\
 & & \downarrow & & & & \\
 & & H_n(E; G) & & & & 
 \end{array}$$

e da Proposição 6.11.

Para ver (18) consideremos o seguinte diagrama

$$\begin{array}{ccccccc}
 E_{n+1,0}^1 = H_{n+1}(E_{n+1}, E_n; G) & \xrightarrow{\partial} & H_n(E_n; G) & \longrightarrow & H_n(E_n, E_{n-1}; G) = E_{n,0}^1 & & \\
 \downarrow p_* & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & H_n(E; G) & \xrightarrow{p_*} & H_n(B; G) & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 C_{n+1}(B; G) = H_{n+1}(B_{n+1}, B_n; G) & \longrightarrow & H_n(B_n; G) & \longrightarrow & H_n(B_n, B_{n-1}; G) = C_n(B; G) & & 
 \end{array}$$

Um elemento  $x \in H_n(E; G)$  pode ser representado por  $y \in E_{n,0}^1$  na sucessão espectral sse a sua imagem em  $E_{n,0}^\infty$  é não nula. Nesse caso, pelo diagrama anterior,  $y$  aplica-se por  $p_*$  no representante de  $p_*(x)$  em  $C_n(B; G) = H_n(B^n, B^{n-1}; G)$ . Uma vez que a aplicação induzida em homologia (com respeito a  $d_1$ ) pelas aplicações

$$p_*: H_n(E_n, E_{n-1}; G) \rightarrow H_n(B_n, B_{n-1}; G)$$

é o isomorfismo

$$\psi: E_{n,0}^2 \rightarrow H_n(B)$$

vemos que o diagrama (18) comuta.  $\square$

**Definição 6.27** (Transgressão em homologia). *Seja  $p: E \rightarrow B$  uma fibração com fibra  $F$  sobre  $*$  em  $B$  e  $B$  conexo por arcos. Consideremos o diagrama*

$$\begin{array}{ccccc}
 H_n(E; G) & \longrightarrow & H_n(E, F; G) & \xrightarrow{\partial} & H_{n-1}(F; G) \\
 \downarrow p_* & & \downarrow p_* & & \downarrow p_* \\
 H_n(B; G) & \xrightarrow{\phi} & H_n(B, *; G) & \longrightarrow & H_n(*; G)
 \end{array}$$

A transgressão em homologia é o homomorfismo

$$H_n(B; G) \supset \phi^{-1}(\text{im } p_*) \xrightarrow{\tau} H_{n-1}(F; G) / \partial(\ker p_*)$$

definido por

$$\tau(x) = \partial(p_*^{-1}(\phi(x))).$$

Uma classe que está no domínio de  $\tau$  diz-se transgressiva.

**Proposição 6.28.** *O seguinte diagrama comuta.*

$$\begin{array}{ccc} \pi_n(B) & \xrightarrow{\partial} & \pi_{n-1}(F) \\ \swarrow h & \downarrow h & \downarrow h \\ \phi^{-1}(\text{im } p_*) & \longrightarrow & H_n(B) \\ & \searrow \tau & \downarrow \\ & & H_{n-1}(F) \\ & & \downarrow \\ & & H_{n-1}(F)/\partial(\ker p_*) \end{array}$$

Em particular, todas as classes esféricas<sup>37</sup> são transgressivas.

*Proof.* A naturalidade do homomorfismo de Hurewicz mostra que o seguinte diagrama comuta.

$$\begin{array}{ccccc} \pi_n(E) & \longrightarrow & \pi_n(E, F) & \xrightarrow{\partial} & \pi_{n-1}(F) \\ \downarrow h & & \downarrow h & \searrow \partial & \downarrow h \\ H_n(E) & \longrightarrow & H_n(E, F) & \xrightarrow{\partial} & H_{n-1}(F) \\ \downarrow p_* & & \downarrow p_* & \searrow p_* & \\ H_n(B) & \xrightarrow{\phi} & H_n(B, *) & \xleftarrow{h} & \pi_n(B) \end{array}$$

Uma vez que a aplicação  $p_* : \pi_n(E, F) \rightarrow \pi_n(B)$  é um isomorfismo, qualquer classe esférica está no domínio da transgressão. As restantes afirmações do enunciado são agora uma consequência imediata da definição de transgressão e da comutatividade do diagrama.  $\square$

**Exemplo 6.29** (Suspensão em homologia). Na fibração dos caminhos

$$\Omega B \rightarrow PB \rightarrow B$$

a aplicação de monodromia determinada por um laço  $\alpha \in \pi_1(B)$  é dada por

$$\tau_\alpha(\beta) = \beta * \alpha.$$

Logo a aplicação de monodromia permuta as componentes conexas por arcos de  $\Omega B$ . Conclui-se que a fibração dos caminhos sobre  $B$  é orientável sse  $B$  é simplesmente conexo. Nesse caso, uma vez que  $PB$  é contráctil, a aplicação

$$H_n(PB, \Omega B) \xrightarrow{\partial} H_{n-1}(\Omega B)$$

é um isomorfismo. A transgressão em homologia é portanto um homomorfismo

$$H_n(B) \supset \phi^{-1}(\text{im } p_*) \xrightarrow{\tau} H_{n-1}(\Omega B)$$

que se chama a *suspensão em homologia* e que de acordo com a Proposição 6.28 corresponde nas classes esféricas ao isomorfismo

$$\pi_n(B) \simeq \pi_{n-1}(\Omega B).$$

<sup>37</sup>Uma classe de homologia diz-se *esférica* se está na imagem do homomorfismo de Hurewicz.

**Proposição 6.30.** *Seja  $p : E \rightarrow B$  uma fibração orientável sobre  $G$ . Os diferenciais  $d_n : E_{n,0}^n \rightarrow E_{0,n-1}^n$  são a transgressão em homologia. Mais precisamente, o seguinte diagrama comuta.*

$$\begin{array}{ccccc}
 E_{n,0}^2 & \xleftarrow{\cong} & H_n(B; G) & & H_{n-1}(F; G) & \xrightarrow{\cong} & E_{0,n-1}^2 \\
 \uparrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 E_{n,0}^n & \xleftarrow{\cong} & \phi^{-1}(\text{im } p_*) & \xrightarrow{\tau} & H_{n-1}(F; G) / \partial(\ker p_*) & \xrightarrow{\cong} & E_{0,n-1}^n \\
 & & & & \searrow & & \nearrow \\
 & & & & & & d_n
 \end{array}$$

*Proof.* Consideremos o diagrama

$$\begin{array}{ccccccc}
 (19) & H_n(E_n, F) & \xrightarrow{\partial} & H_{n-1}(F) & \xrightarrow{\cong} & H_{n-1}(F, \emptyset) = E_{n-1,0}^1 & \\
 & \downarrow & & \downarrow & & & \\
 & H_n(E_n, E_1) & \xrightarrow{\partial} & H_{n-1}(E_1) & \longrightarrow & H_{n-1}(E_1, F) & \\
 & \downarrow & & \downarrow & & & \\
 & \vdots & & \vdots & & & \\
 & \downarrow & & \downarrow & & & \\
 & H_n(E_n, E_{n-2}) & \xrightarrow{\partial} & H_{n-1}(E_{n-2}) & \longrightarrow & H_{n-1}(E_{n-2}, E_{n-3}) & \\
 & \downarrow & & \downarrow & & & \\
 & E_{n,0}^1 = H_n(E_n, E_{n-1}) & \xrightarrow{\partial} & H_{n-1}(E_{n-1}) & \longrightarrow & H_{n-1}(E_{n-1}, E_{n-2}) & \\
 & \downarrow p_* & & \downarrow p_* & & & \\
 & H_n(B_n, B_{n-1}) & \xrightarrow{\partial} & H_{n-1}(B_{n-1}) & \longrightarrow & H_{n-1}(B_{n-1}, B_{n-2}) & 
 \end{array}$$

As sucessões exactas longas dos triplos  $(E_n, E_{k+1}, E_k)$

$$\begin{array}{ccccc}
 & H_n(E_n, E_k) & & & \\
 & \downarrow & & & \\
 & H_n(E_n, E_{k+1}) & \longrightarrow & H_{n-1}(E_{k+1}) & \longrightarrow & H_{n-1}(E_{k+1}, E_k) \\
 & & & \searrow & & \nearrow \\
 & & & & & \partial
 \end{array}$$

mostram que, ao nível dos representantes das classes em  $E^1$ , as imagens dos diferenciais

$$d_k : H_n(E_n, E_{n-1}) \rightarrow H_{n-1}(E_n - k, E_{n-k-1})$$

coincidem com a imagem das aplicações de bordo

$$H_n(E_n, E_{n-k}) \xrightarrow{\partial} H_n(E_{n-k}, E_{n-k-1}).$$



Em particular, uma classe sobrevive até  $E_{n,0}^n$  sse está na imagem de  $H_n(E_n, F)$ . Tendo em conta que  $E_n \rightarrow E$  é uma  $n$ -equivalência, e que a aplicação

$$p_* : H_n(E_n, E_{n-1}) \rightarrow H_n(B_n, B_{n-1})$$

induz a identificação de  $E_{n,0}^2$  com  $H_n(B)$ , isto mostra que temos o isomorfismo

$$\phi^{-1}(\text{im } p_*) \xrightarrow{\cong} E_{n,0}^n.$$

Da mesma forma, a imagem de  $d_{n-1}$  em  $E_{n-1,0}^1$  coincide com a imagem de

$$H_n(E_{n-1}, F) \xrightarrow{\partial} H_{n-1}(F)$$

e a sucessão exacta

$$\begin{array}{ccccc} H_n(E_{n-1}, F) & \longrightarrow & H_n(E_n, F) & \longrightarrow & H_n(E_n, E_{n-1}) \\ & & \downarrow \partial & & \\ & \searrow \partial & & & \\ & & H_{n-1}(F) & & \end{array}$$

juntamente com o facto de a aplicação

$$p_* : H_n(E_n, E_{n-1}) \rightarrow H_n(B_n, B_{n-1})$$

induzir a identificação de  $E_{n,0}^2$  com  $H_n(B)$  mostra que

$$\partial(\ker p_*) = \text{im } d_{n-1}$$

e portanto temos o isomorfismo

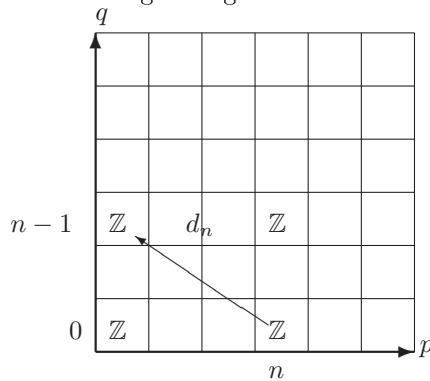
$$H_{n-1}(F; G) / \partial(\ker p_*) \rightarrow E_{0,n-1}^n = E_{0,n-1}^1 / \text{im } d_{n-1}.$$

As restantes afirmações do enunciado são agora consequências imediatas das definições. □

**Exemplo 6.31.** Consideremos um fibrado em esferas

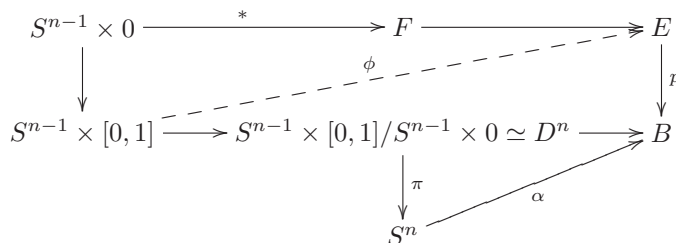
$$S^{n-1} \rightarrow E \rightarrow S^n$$

com  $n \geq 2$ . Na sucessão espectral de  $E$  existe quando muito um diferencial não nulo conforme a figura seguinte.



O gerador de  $H_n(S^n; \mathbb{Z}) = E_{n,0}^2$  é uma classe esférica (a identidade  $S^n \rightarrow S^n$ ). Pelas Proposições 6.28 e 6.30,  $d_n(\alpha)$  é a imagem pelo homomorfismo de Hurewicz da imagem do gerador de  $\pi_n(S^n)$  pelo homomorfismo de bordo na sucessão exacta

longa da fibração. Geometricamente  $\partial(\alpha) \in \pi_{n-1}(F)$  é definido pela restrição de um levantamento



$\phi$  a  $S^{n-1} \times 1$ . Na situação presente, em que  $B = S^n$  e  $\alpha$  é a aplicação identidade, a restrição do levantamento a  $S^{n-1} \times ]0, 1]$  identifica-se com uma secção de  $p$  sobre  $S^n \setminus \{*\}$  e  $\phi|_{S^{n-1} \times 0}$  corresponde precisamente ao "valor limite no bordo" desta secção. Ou seja, podemos escolher uma secção de  $p$  sobre o conjunto contráctil  $S^n \setminus \{*\}$  mas em geral não a podemos estender a todo o  $S^n$ . À medida que nos aproximamos de  $*$ , a secção enrola uma esfera centrada em  $*$  em torno da fibra. O grau desta aplicação é precisamente o inteiro que determina o diferencial  $d_n$  na sucessão espectral.

**Exercício 6.32.** *Mostre que o diferencial  $d_n$  no exercício anterior é nulo sse a fibração  $E \rightarrow S^n$  admite uma secção.* <sup>38</sup>

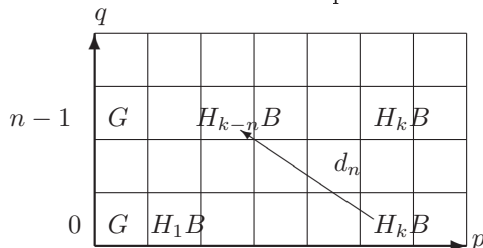
O exemplo anterior generaliza-se para fibrações orientáveis cuja fibra tem o tipo de homotopia de uma esfera (ou mais geralmente o tipo de homologia de uma esfera). Se  $G$  é um grupo abeliano, um espaço  $X$  diz-se uma  $G$ -esfera de homologia de dimensão  $n$  se

$$H^*(X; G) = \begin{cases} G & \text{se } * = n \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

**Proposição 6.33** (Sucessão exacta de Gysin). *Seja  $F \rightarrow E \rightarrow B$  uma fibração orientável relativamente a  $G$  e  $F$  uma  $G$ -esfera de homologia de dimensão  $n - 1$ . Então existe uma sucessão exacta longa*

$$\dots H_k(E; G) \xrightarrow{p_*} H_k(B; G) \xrightarrow{d_n} H_{k-n}(B; G) \rightarrow H_{k-1}(E; G) \rightarrow \dots$$

*Proof.* Consideremos a sucessão espectral da fibração.



<sup>38</sup>Se está familiarizado com a definição de número de Euler de um fibrado vectorial orientado em Topologia Diferencial, mostre que este número coincide com o inteiro que determina o diferencial  $d_n$ .

Os únicos diferenciais que são possivelmente diferentes de zero são os diferenciais  $d_n$ . Logo a sucessão espectral colapsa no termo  $E_{n+1}$  e temos sucessões exactas curtas

$$0 \rightarrow E_{k-n+1, n-1}^{n+1} \rightarrow H_k(E; G) \rightarrow E_{k,0}^{n+1} \rightarrow 0$$

onde

$$E_{k,0}^{n+1} = \ker d_n \subset E_{k,0}^2 = H_k(B; G)$$

e

$$E_{k-n+1, n-1}^{n+1} = E_{k-n+1, n-1}^2 / (\text{im } d_n) = H_{k-n+1}(B; G) / (\text{im } d_n).$$

Obtemos portanto sucessões exactas curtas

$$0 \rightarrow H_{k-n+1}(B; G) / (\text{im } d_n) \rightarrow H_k(E; G) \rightarrow \ker d_n \rightarrow 0$$

que podem ser coladas de forma a obter a sucessão exacta longa do enunciado. A aplicação

$$H_k(E; G) \rightarrow H_k(B; G)$$

é a aplicação  $p_*$  pela Proposição 6.26.  $\square$

**Proposição 6.34** (Sucessão exacta de Wang). *Seja  $F \xrightarrow{i} E \rightarrow B$  uma fibração orientável relativamente a  $G$  sobre uma  $G$ -esfera de homologia de dimensão  $n$ . Então existe uma sucessão exacta longa*

$$\cdots \rightarrow H_k(F; G) \xrightarrow{i_*} H_k(E; G) \rightarrow H_{k-n}(F; G) \xrightarrow{d_n} H_{k-1}(F; G) \rightarrow \cdots$$

*Proof.* A demonstração é essencialmente idêntica à da Proposição 6.33 e fica como exercício.  $\square$

**Exercício 6.35.** *Calcule  $H_*(F; \mathbb{Z})$  onde  $F$  denota a fibra de homotopia de uma aplicação  $S^n \rightarrow S^n$  de grau  $k$ .*

**Exercício 6.36** (Sucessão exacta de Serre). *Seja  $F \rightarrow E \rightarrow B$  uma fibração orientável. Mostre que se  $H_k(F) = 0$  para  $0 < k < n$  e  $H_k(B) = 0$  para  $0 < k < m$ , existe uma sucessão exacta*

$$H_{n+m-1}(F) \rightarrow \cdots \rightarrow H_k(F) \xrightarrow{i_*} H_k(E) \xrightarrow{p_*} H_k(B) \xrightarrow{\tau} H_{k-1}(F) \rightarrow \cdots$$

e que o homomorfismo de Hurewicz dá uma aplicação (de uma porção) da sucessão exacta longa de homotopia da fibração nesta sucessão exacta de homologia.

**Extensões da sucessão espectral de Serre.** A sucessão espectral de Serre tem as seguintes versões relativas, com demonstração inteiramente análoga à do Teorema 6.22.

- (i) Se  $p: E \rightarrow B$  é uma fibração orientável sobre  $G$  e  $B' \subset B$ , escrevendo  $E' = p^{-1}(B')$ , existe uma sucessão espectral aproximando  $H_{p+q}(E, E'; G)$  com termo  $E^2$

$$E_{p,q}^2 = H_p(B, B'; H_q(F; G)).$$

- (ii) Se  $(F, F') \rightarrow (E, E') \xrightarrow{p} B$  é um par de fibrações orientáveis sobre  $G$ , existe uma sucessão espectral aproximando  $H_{p+q}(E, E'; G)$  com termo  $E^2$

$$E_{p,q}^2 = H_p(B; H_q(F, F'; G)).$$

Consideremos por exemplo o segundo caso. Podemos supor que  $B$  é um complexo celular. A filtração dos esqueletos em  $B$  induz uma filtração  $\{(E_p, E'_p)\}$  em  $(E, E')$  e a sucessão exacta longa

$$\cdots \rightarrow H_n(E_{p-1}, E'_{p-1}; G) \rightarrow H_n(E_p, E'_p; G) \rightarrow H_n(E_p, E'_p \cup E_{p-1}; G) \rightarrow \cdots$$

dá azo a uma sucessão espectral com

$$E_{p,q}^1 = H_{p+q}(E_p, E'_p \cup E_{p-1}; G) \simeq H_p(B_p, B_{p-1}) \otimes H_q(F, F'; G) \simeq C_p(B; H_q(F, F'; G)).$$

No caso em que a fibração  $p : E \rightarrow F$  não é orientável, existe ainda uma sucessão espectral limitada aproximando a homologia do espaço total mas o termo  $E^2$  é dado por

$$E_{p,q}^2 = H_p(B; \{H_q(F; G)\})$$

onde  $\{H_q(F; G)\}$  é o sistema de coeficientes locais (ver [Ha, 3.H]) determinado pela fibração. No caso em que a fibração é orientável o sistema de coeficientes locais é constante e o enunciado reduz-se ao Teorema 6.22.

A sucessão espectral é válida mais geralmente para *fibrações de Serre*. Uma aplicação  $p : E \rightarrow B$  diz-se uma fibração de Serre se tem a propriedade dos levantamentos da homotopia para todos os complexos celulares finitos.

Existe uma versão da sucessão espectral de Serre para uma teoria de homologia generalizada  $E_*$ , que se chama por vezes a sucessão espectral de Leray-Serre-Atiyah-Hirzebruch, e que toma a forma

$$E_{p,q}^2 = H_p(B; \{E_q(F)\}) \Rightarrow E_{p+q}(F).$$

Para mais detalhes ver [Sw, Theorem 15.27].

**Classes de Serre de grupos abelianos.** Vamos agora descrever a teoria das classes de grupos abelianos devida a Serre [Se2]. Esta teoria permite em conjunto com a sucessão espectral, tratar os espaços como se estivessem localizados (no sentido algébrico do termo). Esta teoria é uma versão grosseira da teoria de localização mais tarde desenvolvida por Sullivan e outros [Su] e que é hoje em dia uma ferramenta básica em Topologia Algébrica. Ver [Ha3, Theorem 1.23].

**Definição 6.37.** *Uma classe de Serre  $\mathcal{C}$  é uma classe de grupos abelianos satisfazendo as seguintes condições:*

- (i)  $0 \in \mathcal{C}$ ,
- (ii) Se  $A \in \mathcal{C}$  e  $B$  é isomorfo a  $A$ , então  $A \in \mathcal{C}$ ,
- (iii) Se  $0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$  é uma sucessão exacta então  $B \in \mathcal{C}$  sse  $A, C \in \mathcal{C}$ .

Uma classe de Serre diz-se multiplicativa se  $A, B \in \mathcal{C} \implies A \otimes B, \text{Tor}(A, B) \in \mathcal{C}$ . Uma classe de Serre diz-se acíclica se  $A \in \mathcal{C} \implies H_k(K(A, 1); \mathbb{Z}) \in \mathcal{C}$  para todo o  $k > 0$ .

Um homomorfismo de grupos abelianos  $f : A \rightarrow B$  diz-se um monomorfismo mod  $\mathcal{C}$  se  $\ker f \in \mathcal{C}$ , diz-se um epimorfismo mod  $\mathcal{C}$  se  $\text{coker } f \in \mathcal{C}$ , e um isomorfismo mod  $\mathcal{C}$  se é simultaneamente um monomorfismo e epimorfismo mod  $\mathcal{C}$ .

Como veremos em breve, dada uma classe de Serre  $\mathcal{C}$ , é possível fazer cálculos desprezando os grupos em  $\mathcal{C}$ .

**Exercício 6.38.** *Sejam  $f : A \rightarrow B$  e  $g : B \rightarrow C$  homomorfismos de grupos abelianos e  $\mathcal{C}$  uma classe de Serre. Mostre que se dois dos homomorfismos  $f, g$  e  $g \circ f$  são isomorfismos mod  $\mathcal{C}$ , o mesmo sucede com o terceiro.*

**Exercício 6.39.** Verifique que o lema dos 5 é válido módulo uma classe de Serre.

É um exercício simples mostrar que os seguintes são exemplos de classes de Serre multiplicativas:

- $\{0\}$  - a classe trivial formada pelos grupos com um único elemento.
- $\mathcal{F}$  - a classe dos grupos abelianos finitamente gerados.
- $\mathcal{T}$  - a classe dos grupos abelianos de torsão.
- $\mathcal{T}_f$  - a classes dos grupos abelianos finitos
- $\mathcal{T}_P$  ( $P$  um conjunto de primos) - a classe dos grupos abelianos de torsão  $P$  (isto é, tal que os factores primos das ordens dos elementos do grupo pertencem a  $P$ ). Se  $P = \{q \text{ primo} : q \neq p\}$  escrevemos  $\mathcal{T}_p$  em vez de  $\mathcal{T}_P$ .
- $\mathcal{T}_{P,f}$  - a classe dos grupos abelianos finitos de torsão  $P$ .

**Exemplo 6.40.** A inclusão

$$\mathbb{Z}/2 \rightarrow \mathbb{Z}/6$$

é um isomorfismo mod  $\mathcal{T}_3$ , e

$$\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2 \xrightarrow{\begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}} \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/3$$

é um isomorfismo mod  $\mathcal{T}_f$ .

$$\mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Q}$$

é um isomorfismo mod  $\mathcal{T}$ .

O núcleo do homomorfismo  $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$  determinado pela matrix  $\begin{bmatrix} 2 & 4 \end{bmatrix}$  é isomorfo a  $\mathbb{Z}$  mod  $\mathcal{T}_{\{2\}}$ .

**Proposição 6.41.** As classes de Serre  $\mathcal{F}$ ,  $\mathcal{T}$ ,  $\mathcal{T}_f$  e  $\mathcal{T}_P$  são acíclicas.

*Proof.* Começamos por ver que  $\mathcal{F}$  é acíclica. Um grupo finitamente gerado é um produto finito de factores cíclicos. Uma vez que

$$K(G \times H, 1) \simeq K(G, 1) \times K(H, 1)$$

basta-nos mostrar que se  $G$  é um grupo cíclico, então  $H_m(K(G, 1); \mathbb{Z})$  é um grupo abeliano finitamente gerado. Tal é claro para  $G = \mathbb{Z}$  uma vez que  $K(\mathbb{Z}, 1) = S^1$  e para  $G = \mathbb{Z}/2$  pois  $K(\mathbb{Z}/2, 1) = \mathbb{R}P^\infty$ . Mais geralmente, se considerarmos a acção diagonal de  $\mathbb{Z}/k \subset S^1 \subset \mathbb{C}^*$  em  $S^\infty \subset \mathbb{C}^\infty$  o espaço lenticular de dimensão infinita

$$L_k^\infty \stackrel{def}{=} S^\infty / (\mathbb{Z}/k) \simeq K(\mathbb{Z}/k, 1).$$

O argumento é o mesmo que utilizámos para identificar  $\mathbb{R}P^\infty$  com  $K(\mathbb{Z}/2, 1)$ : a aplicação quociente  $S^\infty \rightarrow L_k^\infty$  é um revestimento e  $S^\infty$  é contráctil. Para ver que  $H_m(L_k^\infty; \mathbb{Z})$  é um grupo finitamente gerado podemos novamente usar o mesmo argumento que para  $\mathbb{R}P^\infty$ . De facto (ver Exercício 6.42)

$$H_m(L_k^\infty; \mathbb{Z}) = \begin{cases} \mathbb{Z}/k & \text{se } m \text{ é ímpar,} \\ 0 & \text{se } m \text{ é par.} \end{cases}$$

Na realidade estes grupos são finitos, e uma vez que os grupos em  $\mathcal{T}_f$  são produtos finitos de grupos cíclicos finitos,  $\mathcal{T}_f$  é também uma classe acíclica. Além disso se  $G \in \mathcal{T}_f \cap \mathcal{T}_P$  então

$$H_m(K(G, 1); \mathbb{Z}) \in \mathcal{T}_f \cap \mathcal{T}_P.$$

Para concluir a demonstração observemos que qualquer grupo é um colimite dirigido de grupos finitamente gerados.<sup>39</sup> Dado  $G \in \mathcal{T}$  (ou  $\mathcal{T}_P$ ) seja

$$G = \operatorname{colim}_\alpha G_\alpha$$

uma decomposição de  $G$  como um colimite de grupos finitamente gerados (portanto  $G_\alpha \in \mathcal{T}_f$ , respectivamente  $\mathcal{T}_P \cap \mathcal{T}_f$ ). Escolhendo uma construção functorial para  $K(G, 1)$  temos

$$K(G, 1) = \operatorname{colim}_\alpha K(G_\alpha, 1)$$

e uma vez que os funtores de homologia singular comutam com colimites dirigidos, temos

$$H_m(K(G, 1)) = \operatorname{colim}_\alpha H_m(K(G_\alpha, 1)) \in \mathcal{T} \quad (\text{respectivamente } \mathcal{T}_P).$$

□

**Exercício 6.42.** Considere a acção diagonal de  $\mathbb{Z}/k = \{e^{\frac{2\pi i}{k}l} : l = 0, \dots, k-1\}$  em  $S^{2n+1} \subset \mathbb{C}^{n+1}$ .

- (a) Ache um domínio fundamental para a acção.
- (b) Mostre que o quociente  $L_k^{2n+1} = S^{2n+1}/(\mathbb{Z}/k)$  admite uma decomposição celular com uma célula em cada dimensão.
- (c) Use a alínea anterior para calcular  $H_*(L_k^{2n+1}; \mathbb{Z})$ .

**Lema 6.43.** Seja  $\mathcal{C}$  uma classe de Serre multiplicativa, e  $p : E \rightarrow B$  uma fibração orientável com fibra  $F$ . Se dois de  $H_*(F)$ ,  $H_*(E)$ ,  $H_*(B)$  estão em  $\mathcal{C}$ , o mesmo sucede com o terceiro.

*Proof.* Suponhamos que  $H_*(E), H_*(F) \in \mathcal{C}$ . Uma vez que a fibração é orientável, temos a sucessão exacta

$$0 \rightarrow E_{1,0}^\infty \simeq H_1(F; \mathbb{Z}) \rightarrow H_1(E; \mathbb{Z}) \rightarrow E_{0,1}^\infty \simeq H_1(B; \mathbb{Z}) \rightarrow 0$$

que nos diz que  $H_1(B; \mathbb{Z})$  é isomorfo a um quociente de um grupo em  $\mathcal{C}$  e está portanto em  $\mathcal{C}$ .

Por sua vez isto implica que

$$E_{1,q}^2 = E_{1,q}^\infty \simeq H_1(B; H_q(F; \mathbb{Z})) \simeq H_1(B; \mathbb{Z}) \otimes H_q(F; \mathbb{Z}) \in \mathcal{C}.$$

Uma vez que o grupo  $E_{p,q}^k$  é um subquociente de  $E_{p,q}^2$  segue-se que

$$E_{k,q}^r \in \mathcal{C} \text{ para todo o } q, r \text{ para todo o } k \leq 1.$$

Suponhamos indutivamente que mostrámos que  $H_k(B; \mathbb{Z}) \in \mathcal{C}$  para  $k < N$ . Uma vez que  $\mathcal{C}$  é uma classe multiplicativa, temos então que

$$E_{k,q}^2 \simeq H_k(B; \mathbb{Z}) \otimes H_q(F; \mathbb{Z}) \oplus \operatorname{Tor}(H_{k-1}(B; \mathbb{Z}), H_k(F; \mathbb{Z})) \in \mathcal{C}$$

para  $k < N$  e portanto

$$(20) \quad E_{k,q}^r \in \mathcal{C} \text{ para todo o } q, r \text{ para todo o } k < N.$$

Temos

$$E_{N,0}^{N+1} = E_{N,0}^\infty \simeq p_*(H_N(E; \mathbb{Z})) \in \mathcal{C}.$$

As sucessões exactas

$$0 \rightarrow E_{N,0}^k \rightarrow E_{N,0}^{k-1} \xrightarrow{d_{k-1}} E_{N-k+1, k-2}^{k-1}$$

<sup>39</sup> Tome-se por exemplo para conjunto de índices o conjunto de todos os subgrupos finitamente gerados de  $G$  com a ordem parcial dada pela inclusão.

para  $k = N + 1, N, \dots, 3$  mostram indutivamente que  $E_{N,0}^{k-1}$  é uma extensão de grupos em  $\mathcal{C}$  (o grupo da esquerda está em  $\mathcal{C}$  por indução e o da direita é o quociente de um grupo em  $\mathcal{C}$  por (20)) e está portanto em  $\mathcal{C}$ . Portanto

$$H_N(B; \mathbb{Z}) \simeq E_{N,0}^2 \in \mathcal{C},$$

o que conclui a demonstração que  $H_*(B; \mathbb{Z}) \in \mathcal{C}$ .

As demonstrações dos dois casos restantes são análogas e são deixadas como exercício.  $\square$

**Nota 6.44.** *Note-se que a demonstração anterior diz-nos mais geralmente que se a homologia de dimensão  $\leq n$  de dois dos espaços  $E, F$  e  $B$  está em  $\mathcal{C}$ , o mesmo sucede com o terceiro.*

**Corolário 6.45.** *Se  $\mathcal{C}$  é uma classe de Serre multiplicativa e acíclica, e  $A \in \mathcal{C}$  então  $H_k(K(A, n); \mathbb{Z}) \in \mathcal{C}$  para todos os  $k, n \geq 1$ .*

*Proof.* Basta aplicar indutivamente o Lema 6.43 às fibrações dos caminhos

$$K(A, n - 1) \rightarrow * \rightarrow K(A, n).$$

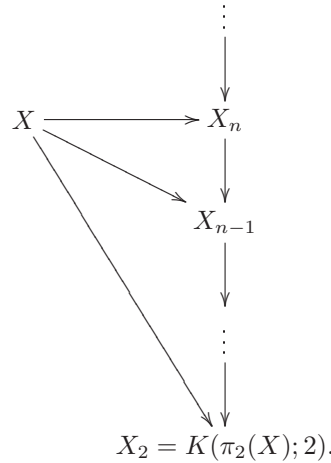
$\square$

**Teorema 6.46** (Teorema de Hurewicz mod  $\mathcal{C}$  (Serre)). *Seja  $\mathcal{C}$  uma classe de Serre acíclica e multiplicativa e  $X$  um espaço simplesmente conexo. Então  $H_k(X) \simeq 0$  mod  $\mathcal{C}$  para  $k < n$  sse  $\pi_k(X) \simeq 0$  mod  $\mathcal{C}$  para  $k < n$  e nesse caso o homomorfismo de Hurewicz*

$$\pi_n(X) \xrightarrow{h} H_n(X)$$

*é um isomorfismo mod  $\mathcal{C}$ .*

*Proof.* Suponhamos primeiro que  $\pi_k(X) \in \mathcal{C}$  para todo o  $k < n$  e consideremos a torre de Postnikov de  $X$ :



Como  $X \rightarrow X_{n-1}$  é uma  $n$ -equivalência, para ver que

$$H_k(X; \mathbb{Z}) \in \mathcal{C} \text{ para } k < n$$

basta-nos ver que  $H_i(X_{n-1}; \mathbb{Z}) \in \mathcal{C}$ . As fibras de homotopia das aplicações  $X_m \rightarrow X_{m-1}$  são  $K(\pi_m(X), m)$ . Uma vez que  $\mathcal{C}$  é uma classe acíclica, pelo Corolário 6.45

$H_*(K(\pi_m(X), m)) \in \mathcal{C}$  para todo o  $m < n$ . Sendo  $X_2 = K(\pi_2(X), 2)$ , aplicações repetidas do Lema 6.43 mostram que  $H_*(X_{n-1}; \mathbb{Z}) \in \mathcal{C}$ .

Resta-nos ver que o homomorfismo de Hurewicz

$$(21) \quad h: \pi_n(X) \rightarrow H_n(X)$$

é um isomorfismo mod  $\mathcal{C}$ . Sendo  $X \rightarrow X_n$  uma  $(n+1)$ -equivalência e o homomorfismo de Hurewicz natural podemos substituir  $X$  por  $X_n$  em (21). Consideremos a sucessão espectral da fibração

$$K(\pi_n(X), n) \rightarrow X_n \rightarrow X_{n-1}.$$

Sendo  $\mathcal{C}$  uma classe de Serre multiplicativa, temos

$$E_2^{p,q} \in \mathcal{C} \text{ para } p > 0$$

e portanto

$$E_r^{p,q} \in \mathcal{C} \text{ para } p > 0.$$

por outro lado  $E_{0,n}^r$  é um quociente de  $E_{0,n}^2 \simeq H_n(K(\pi_n(X), n); \mathbb{Z}) = \pi_n(X)$  por subgrupos  $d_k(E_{k,n-k+1}^k) \in \mathcal{C}$  e portanto a aplicação quociente

$$H_n(K(\pi_n(X), n); \mathbb{Z}) \simeq E_{0,n}^2 \rightarrow E_{0,n}^\infty$$

é um isomorfismo mod  $\mathcal{C}$ . Como  $E_{k,n-k}^\infty \in \mathcal{C}$  para  $k > 0$  conclui-se que o homomorfismo aresta

$$H_n(K(\pi_n(X), n); \mathbb{Z}) \xrightarrow{i_*} H_n(X_n; \mathbb{Z})$$

é um isomorfismo mod  $\mathcal{C}$  e portanto, a comutatividade do diagrama

$$\begin{array}{ccc} \pi_n(K(\pi_n(X), n)) & \xrightarrow{i^*} & \pi_n(X_n) \\ \downarrow h & & \downarrow h \\ H_n(K(\pi_n(X), n); \mathbb{Z}) & \xrightarrow{i^*} & H_n(X_n; \mathbb{Z}) \end{array}$$

juntamente com o Exercício 6.38 mostra que (21) é um isomorfismo mod  $\mathcal{C}$ .

Reciprocamente, suponhamos que  $H_k(X; \mathbb{Z}) \in \mathcal{C}$  para  $k < n$ . Temos  $\pi_2(X) \simeq H_2(X; \mathbb{Z})$  logo pela implicação recíproca que acabámos de demonstrar,

$$\pi_3(X) \xrightarrow{h} H_3(X; \mathbb{Z})$$

é um isomorfismo mod  $\mathcal{C}$ . Se  $n > 3$  conclui-se que  $\pi_3(X) \in \mathcal{C}$  e prosseguindo desta forma concluímos que  $\pi_k(X) \in \mathcal{C}$  para  $k < n$ .  $\square$

Como corolário do Teorema 6.46 temos o seguinte resultado estrutural básico em teoria de homotopia, para o qual não há qualquer demonstração alternativa conhecida.

**Corolário 6.47.** *Se  $X$  é um espaço simplesmente conexo,  $\pi_k(X)$  são grupos finitamente gerados para  $k \leq n$  sse o mesmo sucede com  $H_k(X; \mathbb{Z})$  para  $k \leq n$ .*

Ainda mais particularmente, os grupos de homotopia de um complexo celular simplesmente conexo e finito são finitamente gerados. Compare-se com o Exercício 6.85.



**Exemplo 6.48.** Se  $M(\mathbb{Z}/p, n)$  designa o espaço de Moore e  $n \geq 1$  então o Teorema de Hurewicz mod  $\mathcal{C}$  garante que  $\pi_k(M(\mathbb{Z}/p, n))$  é um grupo abeliano finito de torsão  $p$  para todo o  $k$ . Por exemplo, tomando  $p = 2$  temos

$$\pi_k(\Sigma^{n-1}\mathbb{R}P^2) = \mathbb{Z}/2^{n_1} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}/2^{n_k}$$

para algum  $l_k$  e  $n_i$ 's. Este exemplo ilustra também a necessidade da hipótese que o espaço seja simplesmente conexo, uma vez que  $\pi_2(\mathbb{R}P^2) \simeq \pi_2(S^2) \simeq \mathbb{Z}$ .

**Exercício 6.49.** Seja  $A$  simplesmente conexo,  $(X, A)$  um par 2-conexo e  $X$  uma classe de Serre multiplicativa e acíclica. Mostre que  $\pi_k(X, A) \simeq 0 \pmod{\mathcal{C}}$  para  $k < n$  sse  $H_k(X, A) \simeq 0 \pmod{\mathcal{C}}$  para  $k < n$  e que nesse caso o homomorfismo de Hurewicz

$$\pi_n(X, A) \xrightarrow{h} H_n(X, A)$$

é um isomorfismo mod  $\mathcal{C}$ .

**A sucessão espectral de cohomologia.** Vamos agora ver a versão da sucessão espectral de Serre para cohomologia. Esta versão é ainda mais útil que a versão de homologia devido à estrutura acrescida de um produto na sucessão espectral convergindo para o produto na cohomologia do espaço total (no caso em que a cohomologia tem coeficientes num anel).

**Teorema 6.50.** Seja  $G$  um grupo abeliano e  $F \rightarrow E \rightarrow B$  uma fibração orientável sobre  $G$ . Então existe uma sucessão espectral limitada com início em  $E^1$  e aproximando a cohomologia  $H^*(E; G)$  tal que

- (i)  $d_r : E_r^{p,q} \rightarrow E_{p+r, q-r+1}^r$ ,
- (ii)  $E_\infty^{p, n-p} \simeq F^p H^n(E; G) / F^{p+1} H^n(E; G)$  para uma certa filtração decrescente  $0 = F^{n+1} H^n(E; G) \subset F^n H^n(E; G) \subset \dots \subset F^0 H^n(E; G) = H^n(E; G)$
- (iii)  $E_2^{p,q} \simeq H^p(B; H^q(F; G))$ .

Se além disso  $G = R$  é um anel, então

- (a) Existem produtos  $E_r^{p,q} \times E_r^{s,t} \rightarrow E_r^{p+s, q+t}$  tais que

$$d_r(xy) = (d_r x)y + (-1)^{p+q} x d_r(y),$$

- (b) O produto em  $E_{r+1}$  é o produto induzido em homologia pelo produto em  $E_r$ ,
- (c) O produto  $\cup$  em  $H^*(E; R)$  satisfaz

$$F^p H^n(E; R) \cup F^s (H^m(E; R)) \subset F^{p+s} H^{n+m}(E; R)$$

e o produto induzido em  $E_\infty$  pelos produtos em  $E_r$  coincide com o produto induzido pelo produto  $\cup$  no anel bigraduado  $\bigoplus_p F^p H^n(E; R) / F^{p+1} H^n(E; R)$  determinado pela filtração,

- (d) Os diagramas

$$\begin{array}{ccc} E_2^{p,q} \times E_2^{s,t} & \longrightarrow & E_2^{p+s, q+t} \\ \uparrow \simeq & & \uparrow \simeq \\ H^p(B; H^q(F; R)) \times H^s(B; H^t(F; R)) & \longrightarrow & H^{p+s}(B; H^{q+t}(F; R)) \end{array}$$

(onde o produto da linha inferior é o produto  $\cup$  na cohomologia de  $B$  seguido do emparelhamento  $H^q(F; R) \times H^t(F; R) \rightarrow H^{q+t}(F; R)$  dado pelo produto  $\cup$  na cohomologia de  $F$ ) comuta a menos do sinal  $(-1)^{qs}$ .

*Proof.* Como habitualmente, podemos assumir que  $B$  é um complexo CW. A filtração dos esqueletos em  $B$  induz uma filtração  $E_p = p^{-1}(B_p)$  em  $E$  e as inclusões

$$E_p \rightarrow E$$

são  $p$ -equivalências. Esta filtração determina uma filtração decrescente

$$F^p(C^*(E; G)) = \ker(C^*(E; G) \rightarrow C^*(E_{p-1}; G)) \simeq C^*(E, E_{p-1}; G).$$

As sucessões exactas curtas

$$0 \longrightarrow F^p C^* \longrightarrow F^{p-1} C^* \longrightarrow F^{p-1} C^* / F^p C^* \longrightarrow 0$$

determinam um par exacto com

$$\begin{aligned} A_1 &= \bigoplus_{p,q} A_1^{p,q} = \bigoplus_{p,q} H^{p+q}(F^p C^*) = \bigoplus_{p,q} H^{p+q}(E, E_{p-1}; G) \\ E_1 &= \bigoplus_{p,q} E_1^{p,q} = \bigoplus_{p,q} H^{p+q}(F^p C^* / F^{p+1} C^*) = \bigoplus_{p,q} H^{p+q}(E_p, E_{p-1}; G). \end{aligned}$$

Os homomorfismos no par exacto são determinados pelos homomorfismos na sucessão exacta do triplo

$$H^n(E, E_p; G) \xrightarrow{i} H^n(E, E_{p-1}; G) \xrightarrow{j} H^n(E_p, E_{p-1}; G) \xrightarrow{k} H^{n+1}(E, E_p; G)$$

e portanto  $i, j, k$  têm graus  $(-1, 1)$ ,  $(0, 0)$ , e  $(1, 0)$  respectivamente.

A filtração induzida em cohomologia é pelas imagens de  $A_1^{p, n-p} = H^n(E, E_{p-1}; G)$  pelos homomorfismos de restrição. Por definição da sucessão espectral de um par exacto temos

$$d_r : E_r^{p,q} \longrightarrow E_r^{p+r, q-r+1}$$

e uma vez que  $i : E_p \rightarrow E$  é uma  $p$ -equivalência, em cada coluna do diagrama (14) apenas um número finito dos homomorfismos  $i$  não são isomorfismos. Conclui-se que a sucessão espectral é limitada e que

$$E_\infty^{p, n-p} \simeq F^p H^n(E; G) / F^{p+1} H^n(E; G).$$

Para identificar o termo  $E_2$ , sejam  $f_\alpha : (D^p, S^{p-1}) \rightarrow (B_p, B_{p-1})$  aplicações características para as células de  $B$  e  $(\tilde{D}^p, \tilde{S}^{p-1}) = f_\alpha^*(E_p, E_{p-1})$ . Temos uma equivalência de homotopia fibrada de pares de fibrações

$$(D^p, S^{p-1}) \times F_0 \rightarrow (\tilde{D}^p, \tilde{S}^{p-1})$$

cobrindo cada  $f_\alpha$  onde  $F_0$  designa a fibra de  $\pi : E \rightarrow B$  sobre o ponto  $f_\alpha(0)$ . Por excisão, conclui-se que temos isomorfismos

$$\Psi : C^p(B; H^{n-p}(F; G)) \simeq H^n\left(\coprod_\alpha (\tilde{D}^p, \tilde{S}^{p-1}); G\right) \longrightarrow H^n(E_p, E_{p-1}; G) \simeq E_1^{p, n-p}.$$

A identificação do termo  $E_2$  é uma consequência da comutatividade do diagrama

$$\begin{array}{ccc} C^p(B; H^{n-p}(F; G)) & \xrightarrow{\Psi} & H^n(E_p, E_{p-1}; G) \\ \downarrow \delta & & \downarrow \\ C^{p+1}(B; H^{n-p}(F; G)) & \xrightarrow{\Psi} & H^{n+1}(E_{p+1}, E_p; G) \end{array}$$

cuja demonstração é inteiramente análoga ao caso da homologia. Note-se que

$$C^p(B; H^{n-p}(F; G)) \simeq \prod_{\alpha} H^{n-p}(F; G)$$

onde o produto é tomado sobre todas as células de dimensão  $p$  em  $B$ . Uma vez que o fecho de cada célula intersecta apenas um número finito de células de dimensão inferior, a aplicação de bordo  $\delta$  é determinada pela sua restrição a cada um dos factores  $H^{n-p}(F; G)$  e portanto, o argumento utilizado para a sucessão espectral de homologia pode aplicar-se sem qualquer alteração.

Suponhamos agora que  $G = R$  é um anel. Começamos por ver que a afirmação (c) é válida.  $F^p(H^n(E; R))$  é a imagem do homomorfismo de restrição  $H^n(E, E_{p-1}; R) \rightarrow H^n(E; R)$ . A naturalidade deste homomorfismo dá-nos a comutatividade do diagrama

$$\begin{array}{ccc} H^n(E, E_{p-1}; R) \otimes H^m(E, E_{s-1}; R) & \longrightarrow & H^n(E; R) \otimes H^m(E; R) \\ \downarrow \times & & \downarrow \times \\ H^{n+m}(E \times E, E_{p-1} \times E \cup E \times E_{s-1}; R) & & H^{n+m}(E \times E; R) \\ & \searrow & \downarrow \Delta^* \\ & & H^{n+m}(E; R) \end{array}$$

onde a coluna da direita é, por definição, o produto  $\cup$ . Conclui-se que

$$F^p H^n(E; R) \cup F^s H^m(E; R) \subset F^{p+s} H^{n+m}(E; R).$$

A identificação do termo  $E_2$  da sucessão espectral no ponto (iii) do enunciado é determinada pelo isomorfismo  $\Psi$  que faz o seguinte diagrama comutar

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}(H_p(B_p, B_{p-1}); H^q(F; R)) & \xrightarrow{\Psi} & E_1^{p,q} = H^{p+q}(E_p, E_{p-1}; R) \\ \downarrow \varphi & & \downarrow \Pi \phi_{\alpha}^* \\ \prod_{\alpha} H^q(F; R) & \xrightarrow{\tau} & \prod_{\alpha} H^{p+q}(D_{\alpha}^p \times F, S_{\alpha}^{p-1} \times F; R) \end{array}$$

onde

$$\varphi(\lambda) = (\lambda(e_{\alpha}))_{\alpha} \in \prod H^q(F; R)$$

e

$$\tau((y_{\alpha})_{\alpha}) = ([e_{\alpha}] \times y_{\alpha})_{\alpha}.$$

O produto no termo  $E_1$  é definido usando a sucessão espectral da fibração

$$F \times F \rightarrow E \times E \rightarrow B \times B$$

juntamente com naturalidade. De facto vamos definir um produto

$$E_1^{p,q}(E; R) \otimes E_1^{s,t}(E; R) \rightarrow E_1^{p+s, q+t}(E \times E; R)$$

e o produto no termo  $E_1$  é obtido deste compondo com a aplicação de sucessões espectrais determinada pela aplicação diagonal  $\Delta : B \rightarrow B \times B$ . Como

$$(E \times E)_p = \cup_{i+j=p} E_i \times E_j,$$

por excisão, o termo  $E_1$  da sucessão espectral para  $E \times E \rightarrow B \times B$  é

$$(22) \quad E_1^{p,q} = H^{p+q}((E \times E)_p, (E \times E)_{p-1}; R) \simeq \oplus_{i+j=p} H^{p+q}(E_i \times E_j, E_i \times E_{j-1} \cup E_{i-1} \times E_j; R).$$

O produto no termo  $E_1$  é definido pela composição

$$\begin{array}{ccc} H^m(E_p, E_{p-1}; R) \otimes H^n(E_s, E_{s-1}; R) & \xrightarrow{\times} & H^{m+n}(E_p \times E_s, E_p \times E_{s-1} \cup E_{p-1} \times E_s; R) \\ & & \downarrow \\ & & H^{m+n}((E \times E)_{p+s}, (E \times E)_{p+s-1}; R) \end{array}$$

onde a seta da direita é a inclusão de um somando na decomposição (22).

A afirmação que  $d_1$  é uma derivação é equivalente à comutatividade do diagrama (toda a cohomologia tem coeficientes  $R$ )

$$\begin{array}{ccc} H^m(E_p, E_{p-1}) \times H^n(E_s, E_{s-1}) & \xrightarrow{\delta \times 1 + (-1)^m 1 \times \delta} & H^{m+1}(E_{p+1}, E_p) \times H^n(E_s, E_{s-1}) \oplus H^m(E_p, E_{p-1}) \times H^{n+1}(E_{s+1}, E_s) \\ \downarrow \times & & \downarrow \\ H^{m+n}(E_p \times E_s, E_p \times E_{s-1} \cup E_{p-1} \times E_s) & \dashrightarrow & H^{m+n+1}(E_{p+1} \times E_s, E_p \times E_s \cup E_{p+1} \times E_{s-1}) \oplus \\ & & H^{m+n+1}(E_p \times E_{s+1}, E_{p-1} \times E_{s+1}, E_{p-1} \times E_{s+1}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ H^{m+n}((E \times E)_{p+s}, (E \times E)_{p+s-1}) & \xrightarrow{\delta} & H^{m+n+1}((E \times E)_{p+s+1}, (E \times E)_{p+s}) \end{array}$$

onde a seta a tracejado indica que no somando  $H^{m+n}(E_p \times E_s, E_p \times E_{s-1} \cup E_{p-1} \times E_s)$ , o operador  $\delta$  se factoriza pela inclusão dos dois somandos de  $H^{m+n+1}((E \times E)_{p+s+1}, (E \times E)_{p+s})$  indicados.

A comutatividade deste diagrama é uma consequência do facto que, para cadeias celulares  $\lambda, \mu$ , temos

$$\delta(\lambda \times \mu) = \delta(\lambda) \times \mu + (-1)^{|\lambda|} \lambda \times \delta(\mu)$$

o que por sua vez é uma consequência da fórmula geométrica para o produto cruz de dois geradores do complexo celular

$$\partial(e_\alpha^p \times e_\beta^s) = \partial(e_\alpha^p) \times e_\beta^s + (-1)^p e_\alpha^p \times \partial(e_\beta^s).$$

Assim, o diferencial  $d_1$  é uma derivação e portanto o produto acima determina um produto no termo  $E_2$  da sucessão espectral. Uma vez que os diferenciais na sucessão espectral são todos dados, ao nível dos representantes, pelo operador de cobordo  $\delta$ , e a fórmula que define uma derivação é válida ao nível dos representantes e portanto em qualquer situação que faça sentido, conclui-se que ficam definidos indutivamente produtos em todos os termos da sucessão espectral dados pelo produto  $\times$  ao nível dos repees que todos os diferenciais são derivações. Além disso é claro que, no termo  $E_\infty$ , o produto é o produto determinado pelo produto  $\times$  no anel bigraduado determinado pela filtração. Verificámos assim as afirmações (a) a (c) do enunciado.

Para verificar a afirmação (c), sejam  $x \in E_2^{p,q}$ ,  $y \in E_2^{s,t}$  e

$$\lambda \in \text{Hom}(H_p(B_p, B_{p-1}); H^q(F; R)), \quad \mu \in \text{Hom}(H_s(B_s, B_{s-1}); H^t(F; R))$$

cociclos tais que  $\Psi(\lambda) = x$  e  $\Psi(\mu) = y$ . Pretendemos comparar  $\Psi(\lambda) \times \Psi(\mu)$  com  $\Psi(\lambda \times \mu)$  em  $E_1^{p+s, q+t}(E \times E)$ , e para tal basta comparar a sua imagem pelas aplicações  $\phi_{\alpha, \beta}^*$  para cada par de células  $e_\alpha^p$  e  $e_\beta^q$  de  $B$  (uma vez que as aplicações

$\phi^*$  preservam o produto  $\times$  por naturalidade).

$$\begin{aligned}\phi_{\alpha,\beta}^* \Psi(\lambda \times \mu) &= [e_{\alpha,\beta}] \times (\lambda \times \mu)(e_\alpha^p \times e_\beta^s) \\ &= [e_\alpha] \times [e_\beta] \times \lambda(e_\alpha^p) \times \mu(e_\beta^s) \\ &= (-1)^{qs} [e_\alpha] \times \lambda(e_\alpha^p) \times [e_\beta] \times \mu(e_\beta^s) \\ &= (-1)^{qs} \phi_\alpha^* \Psi(\lambda) \times \phi_\beta^* \Psi(\mu)\end{aligned}$$

donde

$$\Psi(\lambda \times \mu) = (-1)^{qs} \Psi(\lambda) \times \Psi(\mu).$$

Como o produto em  $E_1$  induz o produto em  $E_2$  isto conclui a demonstração.  $\square$

**Nota 6.51.** *Uma sucessão espectral em que os diferenciais  $d_r$  têm grau  $(r, 1 - r)$  chama-se uma sucessão espectral de cohomologia.*

**Nota 6.52.** *Note-se que, pela anticomutatividade do produto  $\times$  em cohomologia, em todos os termos da sucessão espectral temos a fórmula*

$$xy = (-1)^{|x||y|}yx$$

onde  $|x|$  designa a dimensão geométrica da classe  $x$ . Assim, se  $x \in E_{p,q}^r$ , temos  $|x| = p + q$ . Em particular, se  $|x|$  é ímpar,  $x^2$  é uma classe de torsão-2, e o produto é comutativo para classes de dimensão par.

Para  $|x|$  par, a regra de Leibniz para o produto dá azo à fórmula

$$d_r(x^n) = nx^{n-1}d_r(x)$$

para todo o  $n \geq 2$ , enquanto que para  $n$  ímpar, temos

$$d_r(x^2) = d_r(x)x - xd_r(x) = d_r(x)x - d_r(x)x = 0.$$

**Exemplo 6.53. Cálculo do anel  $H^*(\Omega S^n; \mathbb{Z})$**  Consideremos a fibração dos caminhos

$$\Omega S^n \rightarrow * \rightarrow S^n.$$

Tal como no Exemplo 6.23 vemos que, enquanto grupo abeliano graduado,

$$H^k(\Omega S^n; \mathbb{Z}) \simeq \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{se } k|(n-1), \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Seja  $x$  um gerador de  $H^n(S^n) \simeq \mathbb{Z}$  e  $y$  um gerador de  $H^{n-1}(\Omega S^n; \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}$  (de forma que  $d_n(y) = x$ ). Note-se que, pela identificação do produto no termo  $E_2$  da sucessão espectral, o produto  $xy$  em  $E_2$  é o gerador de  $E_2^{n,n-1} \simeq \mathbb{Z}$ . Temos a considerar dois casos:

**$n$  ímpar:** Então  $|y|$  é par e portanto  $d_n(y^k) = ky^{k-1}x$ . Uma vez que  $d_n$  é um isomorfismo, concluímos que denotando por  $y_k$  um gerador de  $H^{k(n-1)}(\Omega S^n; \mathbb{Z})$ , temos indutivamente

$$y^k = (k!)y_k.$$

Isto determina completamente a estrutura de produto em  $H^*(\Omega S^n; \mathbb{Z})$ : Trata-se da álgebra comutativa graduada gerada por elementos  $y_k$  de grau  $k(n-1)$  sujeitos às relações

$$y_k y_l = \binom{k+l}{k} y_{k+l}.$$

A uma tal álgebra chama-se uma *álgebra de potências divididas* num gerador e nota-se  $\Gamma(y)$ . Temos portanto

$$H^*(\Omega S^n; \mathbb{Z}) = \Gamma(y) \quad \text{com } |y| = n - 1.$$

**$n$  par:** Neste caso  $|y|$  é ímpar, e pela comutatividade graduada do produto,  $y^2$  é uma classe de torsão 2. Uma vez que  $H^*(\Omega S^n; \mathbb{Z})$  não tem torsão, conclui-se que  $y^2 = 0$ . Seja  $z$  um gerador de  $H^{2(n-1)}(\Omega S^n; \mathbb{Z})$ . Então temos

$$d_n z = xy$$

e portanto, uma vez que  $|z|$  é par,

$$d_n(zy) = xy^2 + zx = zx$$

donde se conclui que  $zy$  é o gerador em dimensão  $3(n-1)$ . Mais geralmente temos,

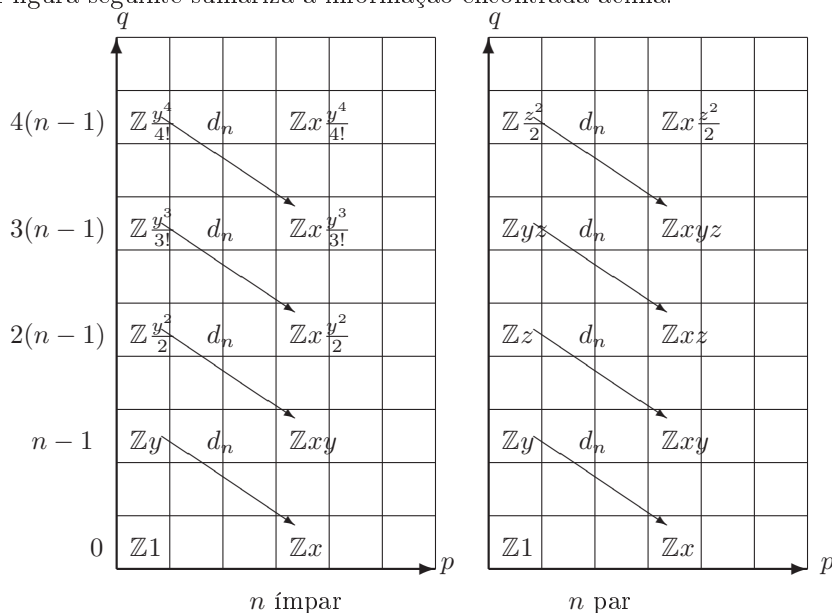
$$\begin{aligned} d_n(z^k) &= kz^{k-1}xy \\ d_n(yz^k) &= xz^k - yd_n(z^k) = xz^k - 0 = xz^k \end{aligned}$$

donde concluímos que  $z$  gera uma álgebra de poderes divididos, e a cohomologia

$$H^*(\Omega S^n; \mathbb{Z}) = \Lambda(y) \otimes \Gamma(z) \quad \text{com } |y| = n - 1, \quad |z| = 2n - 2$$

é o produto tensorial de uma álgebra exterior gerada por  $y$  e uma álgebra de poderes divididos gerada por  $z$ .

A figura seguinte sumariza a informação encontrada acima.



**Nota 6.54.** Há análogos óbvios das Proposições 6.26 e 6.30 para cohomologia. Assim temos homomorfismos de aresta

$$\begin{array}{ccc} H^n(E; G) & \longrightarrow & E_\infty^{0,n} \longrightarrow H^n(F; G) \\ & \searrow & \nearrow \\ & & i^* \end{array}$$

e

$$\begin{array}{ccccc}
 H^n(B; G) & \longrightarrow & E_\infty^{n,0} & \longrightarrow & H^n(E; G) \\
 & & \searrow & \nearrow & \\
 & & & p^* & 
 \end{array}$$

E definindo a transgressão em cohomologia pela composição

$$H^n(F; G) \xrightarrow{\delta} H^{n+1}(E, F; G) \xleftarrow{p^*} H^{n+1}(B, *, G) \xrightarrow{\phi} H^{n+1}(B; G)$$

obtendo assim

$$\tau : \delta^{-1}(\text{im } p^*) \rightarrow \phi(H^{n+1}(B, *, G)/(\ker p^*))$$

temos que os diferenciais mais compridos

$$d_{n+1} : E_{n+1}^{0,n} \rightarrow E_{n+1}^{n+1,0}$$

se identificam com  $\tau$ .

Há também análogos das sucessões exactas de Gysin, Wang e Serre para cohomologia. As demonstrações são idênticas e ficam como exercício.

**Álgebras de Hopf.** O conceito de Álgebra de Hopf tem origem no estudo por Hopf da homologia dos grupos de Lie e desempenha correntemente um papel muito importante em várias áreas da Matemática. Com o pretexto de calcular a estrutura de anel na homologia do espaço de laços numa esfera de dimensão ímpar vamos agora fazer uma digressão pelos aspectos básicos da teoria de álgebras de Hopf em Topologia Algébrica. Uma referência para esta secção é o artigo [MM] ou [Ha, 3.C].

Seja  $k$  um anel comutativo. Um *módulo graduado*  $M$  sobre  $k$  é uma colecção de  $k$ -módulos  $\{M_n\}_{n \geq 0}$ . Escrevemos  $a \in M$  se  $a \in M_k$  para algum  $k$  e nesse caso, o grau de  $a$  é  $|a| = k$ . Define-se o produto tensorial de dois módulos graduados  $M$  e  $N$  por

$$(M \otimes N)_n = \bigoplus_{i+j=n} M_i \otimes_k N_j.$$

Este produto tensorial é associativo a menos de isomorfismo natural da maneira óbvia. O elemento neutro para o produto tensorial é o módulo graduado que consiste no módulo  $k$  em grau 0 e no módulo 0 nos graus restantes. Este módulo graduado é ainda denotado por  $k$ .

Define-se um isomorfismo natural

$$M \times N \xrightarrow{T} N \times M$$

estabelecendo que nos elementos indecomponíveis

$$T(a \otimes b) = (-1)^{|a||b|} b \otimes a.$$

Uma *álgebra graduada* sobre  $k$  consiste num módulo graduado  $A$  juntamente com uma *unidade*

$$\eta : k \longrightarrow A$$

e uma *multiplicação*

$$\mu : A \otimes A \rightarrow A$$

tais que o seguinte diagrama comuta

$$\begin{array}{ccccc}
 k \otimes A & \xrightarrow{\eta \otimes 1} & A \otimes A & \xleftarrow{1 \otimes \eta} & A \\
 & \searrow c & \downarrow \mu & \swarrow c & \\
 & & A & & 
 \end{array}$$

( $c$  denota o isomorfismo canónico).

Uma álgebra  $(A, \eta, \mu)$  diz-se *associativa* se

$$\mu \circ (\mu \otimes \text{id}) = \mu \circ (\text{id} \otimes \mu) : A \otimes A \otimes A \longrightarrow A$$

e diz-se *comutativa* se o seguinte diagrama comuta

$$\begin{array}{ccc} A \otimes A & \xrightarrow{T} & A \otimes A \\ & \searrow \mu & \swarrow \mu \\ & A & \end{array}$$

**Exemplo 6.55.** O módulo graduado  $k$  concentrado em dimensão 0, é uma álgebra comutativa e associativa com a multiplicação e unidade dados pelos homomorfismos canónicos.

**Exemplo 6.56.** A álgebra graduada comutativa e associativa livre num conjunto de geradores de grau par  $\{x_1, \dots, x_n\}$  é a álgebra polinomial  $k[x_1, \dots, x_n]$  com a graduação óbvia.

Se 2 é invertível em  $k$ , a álgebra livre num conjunto de geradores de grau ímpar é a álgebra exterior  $\Lambda_k(x_1, \dots, x_k)$ .

**Exemplo 6.57.** Se  $(X, m)$  é um  $H$ -espaço (ver Definição 4.22) então o produto  $\times$  em homologia permite definir em  $H_*(X)$  uma multiplicação  $\mu$

$$H_*(X; k) \otimes H_*(X; k) \xrightarrow{\times} H_*(X \times X; k) \xrightarrow{m_*} H_*(X; k)$$

com unidade

$$k \simeq H_*(*; k) \xrightarrow{\eta} H_*(X; k)$$

determinada pela inclusão  $* \hookrightarrow X$  da unidade para a multiplicação  $m$ . Chama-se a esta álgebra, a *álgebra de Pontryagin* do  $H$ -espaço  $X$ .

Deve ser claro que se a multiplicação  $m$  é associativa a menos de homotopia, a álgebra  $(H_*(X), \mu, \eta)$  é associativa.

A comutatividade do produto  $\times$  em homologia implica que a aplicação

$$t: X \times X \longrightarrow X \times X$$

definida por

$$t(x, y) = (y, x)$$

satisfaz

$$t_*(a \times b) = (-1)^{|a||b|} b \times a$$

para  $a, b \in H_*(X; k)$  logo se  $m$  é comutativa a menos de homotopia o mesmo acontece com a álgebra de Pontryagin de  $X$ .

Por exemplo  $S^1, S^3$  e  $S^7$  são  $H$ -espaços e as álgebras de Pontryagin são as álgebras exteriores num gerador de dimensão 1, 3 e 7 respectivamente (não há outra escolha possível para o produto). Estas álgebras são comutativas e associativas (apesar de apenas o produto de  $S^1$  ser simultaneamente comutativo e associativo a menos de homotopia).

Define-se um morfismo  $f: A \rightarrow B$  entre álgebras da forma óbvia. É claro que se  $X$  e  $Y$  são  $H$ -espaços e  $f: X \rightarrow Y$  é uma aplicação multiplicativa a menos de homotopia, então

$$f_*: H_*(X; k) \longrightarrow H_*(Y; k)$$

é um morfismo de álgebras.

A álgebra  $k$  é claramente o objecto inicial na categoria das álgebras graduadas.



**Definição 6.58.** Uma álgebra  $(A, \mu, \eta)$  diz-se aumentada se existe um morfismo de álgebras

$$\epsilon: A \rightarrow k$$

tal que  $\epsilon \circ \mu = \text{id}_k$ .

Deve ser claro que todos os exemplos discutidos até ao momento são álgebras que dispõem de uma aumentação natural. Por exemplo, se  $X$  é um  $H$ -espaço, a aplicação  $X \rightarrow *$  induz a aumentação em homologia.

**Definição 6.59.** Se  $(A, \mu_A, \epsilon_A)$  e  $(B, \mu_B, \epsilon_B)$  são álgebras graduadas, definimos o seu produto tensorial  $(A \otimes B, \mu_{A \otimes B}, \epsilon_{A \otimes B})$  pelas fórmulas

$$A \otimes B \xrightarrow{\epsilon_A \otimes \epsilon_B} k \otimes k \simeq k$$

e

$$(A \otimes B) \otimes (A \otimes B) \xrightarrow{\text{id} \otimes T \otimes \text{id}} A \otimes A \otimes B \otimes B \xrightarrow{\mu_A \otimes \mu_B} A \otimes B$$

É fácil verificar que se  $A$  e  $B$  são comutativas (respectivamente associativas) o mesmo sucede com  $A \otimes B$ , e que o produto tensorial é o coproduto na categoria das álgebras graduadas. Note-se ainda que o produto tensorial de álgebras aumentadas é naturalmente uma álgebra aumentada.

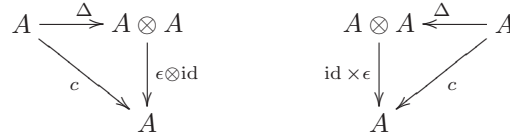
Dualmente temos a noção de *coálgebra graduada sobre  $k$* . Trata-se de um módulo  $A$  juntamente com uma *comultiplicação*

$$A \xrightarrow{\Delta} A \otimes A$$

e uma *counidade*

$$A \xrightarrow{\epsilon} k$$

tais que os seguintes diagramas comutam



**Exemplo 6.60.** O módulo graduado  $k$  tem uma estrutura natural de coálgebra, sendo a comultiplicação e a counidade os isomorfismos canónicos.

A noção de morfismo entre coálgebras tem a definição evidente: um morfismo  $f: A \rightarrow B$  de módulos graduados diz-se um morfismo de coálgebras se os seguintes diagramas comutam



A coálgebra  $k$  é claramente o objecto final na categoria das coálgebras.

**Definição 6.61.** Uma coálgebra graduada  $(A, \Delta, \epsilon)$  diz-se aumentada se existe um morfismo de coálgebras  $\eta: k \rightarrow A_0$  tal que  $\epsilon \circ \eta = \text{id}_k$ .

Se  $A$  é uma coálgebra aumentada, temos uma cisão natural

$$A_0 = k \oplus A'_0$$

e então, designando por 1 a unidade de  $k$  temos

$$(23) \quad \Delta(a) = a \otimes 1 + \sum_i a_i \otimes a'_i + 1 \otimes a \in A \otimes A$$

para alguns elementos  $a_i, a'_i \in A$  que, em caso de terem grau 0, estão em  $A'_0$ .

**Definição 6.62.** *Seja  $(A, \Delta, \epsilon, \eta)$  uma coálgebra aumentada. Um elemento  $a \in A$  diz-se primitivo se*

$$\Delta(a) = a \otimes 1 + 1 \otimes a.$$

Uma coalgebra diz-se *coassociativa* se

$$(\Delta \otimes \text{id}) \circ \Delta = (\text{id} \otimes \Delta) \circ \Delta$$

e *cocomutativa* se o diagrama

$$\begin{array}{ccc} & A & \\ \Delta \swarrow & & \searrow \Delta \\ A \otimes A & \xrightarrow{T} & A \otimes A \end{array}$$

comuta. Note-se a expressão que a cocomutatividade de uma comultiplicação tem na fórmula (23): se o termo  $a_i \otimes a'_i$  ocorre na expansão de  $\Delta(a)$ , o mesmo sucede com  $a'_i \otimes a_i$ .

Define-se o produto tensorial  $(A \otimes B, \Delta_{A \otimes B}, \epsilon_{A \otimes B})$  de duas coálgebras  $(A, \Delta_A, \epsilon_A)$  e  $(B, \Delta_B, \epsilon_B)$  da maneira evidente (dual da Definição 6.59). O produto tensorial de coálgebras aumentadas dispõe de uma aumentação natural.

**Exemplo 6.63.** *Seja  $X$  um espaço. Se a aplicação de*

$$H_*(X; k) \otimes H_*(X; k) \xrightarrow{\times} H_*(X \times X; k)$$

é um isomorfismo (por exemplo, se  $H_*(X; k)$  é um módulo livre, ou se  $k$  é um corpo), então a homologia  $H_*(X; k)$  é uma coálgebra coassociativa e cocomutativa aumentada. A comultiplicação é determinada pela composta

$$H_*(X; k) \xrightarrow{\Delta_*} H_*(X \times X; k) \xrightarrow{\times^{-1}} H_*(X \times X; k)$$

onde

$$\Delta : X \longrightarrow X \times X$$

denota a inclusão da diagonal. A counidade é a aplicação induzida em homologia pela aplicação constante

$$X \longrightarrow *$$

e a aumentação pela inclusão do ponto de base de  $X$  (que é a identidade para a multiplicação em  $X$ ). A cocomutatividade e coassociatividade de  $\Delta_*$  seguem imediatamente das propriedades análogas de  $\Delta$  e do produto  $\times$  em homologia (exercício).

Por exemplo se  $X = S^n$  e  $x$  denota um gerador, a estrutura de co-algebra em  $H_*(S^n)$  é determinada pela equação

$$\Delta(x) = x \otimes 1 + 1 \otimes x$$

o que se pode ver ou directamente ou notando que não há outra escolha possível para a diagonal de  $x$  uma vez que não há classes de homologia com dimensão entre 0 e  $n$ . O gerador  $x$  é portanto um elemento primitivo.

É claro da naturalidade da aplicação diagonal e do produto  $\times$  em homologia que qualquer aplicação  $f : X \rightarrow Y$  entre espaços de tipo finito e com homologia com coeficientes em  $k$  livre, induz um morfismo

$$f_* : H_*(X; k) \rightarrow H_*(Y; k)$$

de cóalgebras aumentadas.

**Definição 6.64.** *O dual de um  $k$ -módulo graduado  $M$  é o módulo  $M^*$  definido por*

$$(M^*)_k = \text{Hom}_k(M; k).$$

*Um morfismo de módulos induz uma aplicação  $f^* : N^* \rightarrow M^*$  por pré-composição.*

Note-se que se  $M_k$  é finitamente gerado para todo o  $k$  (diz-se que  $M$  é de tipo finito) e além disso os módulos  $M_k$  são livres, então há um isomorfismo natural

$$(M^*)^* = M.$$

Outra propriedade importante de verificação imediata, é a seguinte. Se  $M, N$  são módulos graduados livres de tipo finito, há um isomorfismo natural

$$(M \otimes N)^* = M^* \otimes N^*.$$

Estas observações têm como consequência imediata o seguinte resultado.

**Proposição 6.65.** *Se  $(A, \mu, \eta)$  é uma álgebra graduada de tipo finito e os módulos  $A_k$  são livres,  $(A^*, \mu^*, \eta^*)$  é uma coalgebra graduada. Se  $A$  é associativa (respectivamente comutativa, aumentada) então  $A^*$  é coassociativa (respectivamente cocomutativa, aumentada). Dualmente, se  $(A, \Delta, \epsilon)$  é uma cóalgebra graduada de tipo finito e os módulos  $A_k$  são livres, então  $(A^*, \Delta^*, \epsilon^*)$  é uma álgebra graduada. Se  $A$  é coassociativa (respectivamente cocomutativa, aumentada)  $A^*$  é associativa (respectivamente comutativa, aumentada).*

Notemos que se  $H_*(X; k)$  é livre e finitamente gerado, então

$$H_*(X; k) = \text{Hom}(H^*(X; k); k)$$

e a cóalgebra de homologia associada a  $X$  não é mais do que o dual da álgebra de cohomologia de  $X$  (e vice-versa). Se  $X$  é um  $H$ -espaço e os módulos  $H_*(X; k)$  são livres e finitamente gerados, a proposição anterior garante que a álgebra de cohomologia de  $X$  é naturalmente uma cóalgebra com coproduto dual ao produto na álgebra de Pontryagin de  $X$  (ver Exemplo 6.57).

É a interacção destas duas estruturas de multiplicação e comultiplicação na (co)homologia de um  $H$ -espaço que impõe condições extremamente restritivas na estrutura da homologia e cohomologia de um  $H$ -espaço facilitando extremamente o seu cálculo. Esta interacção é abstraída na seguinte definição.

**Definição 6.66.** *Uma álgebra de Hopf graduada<sup>40</sup> consiste num módulo graduado  $A$  com uma estrutura  $(A, \mu, \eta)$  de álgebra e uma estrutura  $(A, \Delta, \epsilon)$  de cóalgebra tais que*

$$A \xrightarrow{\Delta} A \otimes A \quad e \quad A \otimes A \xrightarrow{\mu} A$$

*são morfismos de álgebras e cóalgebras respectivamente<sup>41</sup>,  $\epsilon$  aumenta o produto  $\mu$  e  $\eta$  aumenta o coproduto  $\Delta$ .*

<sup>40</sup>A nossa terminologia não está de acordo com a usual. Aquilo a que chamamos uma álgebra de Hopf chama-se normalmente uma quasi-álgebra de Hopf ou uma biálgebra. Para que se chame a  $A$  uma álgebra de Hopf exige-se normalmente associatividade da multiplicação e comultiplicação.

<sup>41</sup>Para as estruturas de álgebra e cóalgebra no produto tensorial  $A \otimes A$  definidos acima.

Note-se que a condição sobre  $\eta$  e  $\epsilon$  na definição anterior pode ser formulada dizendo que  $\eta$  é um morfismo de coálgebras e  $\epsilon$  um morfismo de álgebras.

Os adjectivos, (co)associativo e (co)comutativo aplicam-se da forma óbvia a uma álgebra de Hopf, e é claro que se  $A$  é uma quasi-álgebra de Hopf de tipo finito com os módulos  $A_k$  livres, então  $A^*$  tem uma estrutura natural de álgebra de Hopf, a que se chama a *álgebra de Hopf dual* de  $A$ .

**Exercício 6.67.** (a) *Mostre que se  $X$  é um  $H$ -espaço com  $H_*(X; k)$  de tipo finito e livre, então  $H_*(X; k)$  é uma álgebra de Hopf cocomutativa e coassociativa e  $H^*(X; k)$  é uma álgebra de Hopf comutativa e associativa. Observe que  $H_*(X; k)$  e  $H^*(X; k)$  são álgebras duais.*

(b) *Determine a comultiplicação em  $H^*(\Omega S^n; \mathbb{Z})$  para  $n$  ímpar.*

(c) *Mostre que se  $n$  é ímpar, a álgebra de Pontryagin  $H_*(\Omega S^n; \mathbb{Z})$  é uma álgebra polinomial num gerador de dimensão  $n - 1$ .*

**Nota 6.68.** *O resultado do exercício anterior é ainda válido para  $n$  par. Mais geralmente, se  $H_*(X; k)$  é livre, a álgebra de Pontryagin  $H_*(\Omega \Sigma X; k)$  é isomorfa á álgebra tensorial gerada por  $\bar{H}_*(X; k)$  (incluído em  $H_*(\Omega \Sigma X; k)$  pela suspensão em homologia). Ver por exemplo [Wh2, Theorem VII.1.18]. Este resultado é a imagem algébrica de um resultado geométrico: há uma equivalência de homotopia natural entre o monóide topológico livre gerado por  $X$ ,  $JX$  e o espaço de laços  $\Omega \Sigma X$  (ver [Ha, 4.J]).*

**Exercício 6.69.** *Para  $n$  ímpar, determine a estrutura de álgebra de Hopf em  $H^*(\Omega S^n; \mathbb{F}_p)$  para todo o  $p$  primo.*

Finalmente ilustramos uma aplicação topológica importante deste formalismo algébrico. Uma álgebra (ou co-álgebra) aumentada  $A$  diz-se *conexa* se a aumentação  $\epsilon$  (respectivamente  $\eta$ ) é um isomorfismo entre  $A_0$  e  $k$ .

**Teorema 6.70** (Leray [MM, Theorem 7.5]). *Se  $A$  é uma álgebra de Hopf conexa comutativa sobre um corpo de característica  $0$ ,  $A$  é uma álgebra comutativa livre (isto é um produto tensorial de álgebras polinomiais em geradores de dimensão par e de álgebras exteriores em geradores de dimensão ímpar).*

**Corolário 6.71.** *Se  $X$  é um  $H$ -espaço de dimensão finita (por exemplo um grupo de Lie),  $H^*(X; \mathbb{Q})$  é uma álgebra exterior num conjunto de geradores de dimensão ímpar.*

*Proof.* Pelo Teorema de Leray  $H^*(X; \mathbb{Q})$  é uma álgebra livre e se  $X$  tem dimensão finita, não pode haver geradores de dimensão par.  $\square$

Outra consequência do Teorema de Leray é que se  $G$  é um  $H$ -espaço com homologia finitamente gerada,  $\pi_2(G) \otimes \mathbb{Q} = 0$  (considere o revestimento universal), um resultado de Hopf. Na realidade uma análise mais fina da estrutura algébrica da homologia com coeficientes  $\mathbb{F}_p$  permite mostrar que  $\pi_2(G) \simeq 0$  para qualquer  $H$ -espaço finito (ver [Br]) e ainda que qualquer  $H$ -espaço finito é um *espaço de dualidade de Poincaré*, isto é, a sua homologia e cohomologia satisfazem dualidade de Poincaré. Isto sugere a questão se um  $H$ -espaço finito tem necessariamente o tipo de homotopia de uma variedade. Esta questão está ainda em aberto, mas foi demonstrado muito recentemente (ver [BKN]) que se assumirmos que o espaço em questão tem o tipo de homotopia de um espaço de laços, então  $G$  tem de facto o tipo de homotopia de uma variedade paralelizável.

**Grupos de homotopia de esferas.** Vamos agora usar a sucessão espectral de Serre para obter informação sobre grupos de homotopia de esferas. O método utilizado, chama-se o método de aniquilação de grupos de homotopia e foi inventado por Serre que o usou para fazer os cálculos seguintes em [Se2].

**Proposição 6.72.** *Módulo torsão tem-se*

$$H^*(K(\mathbb{Z}, n); \mathbb{Z}) = \begin{cases} \Lambda(x) & \text{se } n \text{ é ímpar,} \\ \mathbb{Z}[x] & \text{se } n \text{ é par.} \end{cases}$$

*Proof.* O resultado é válido para  $n = 1$  e  $n = 2$  uma vez que  $K(\mathbb{Z}, 1) = S^1$  e  $K(\mathbb{Z}, 2) = \mathbb{C}P^\infty$  (sem ser necessário a qualificação de módulo torsão).

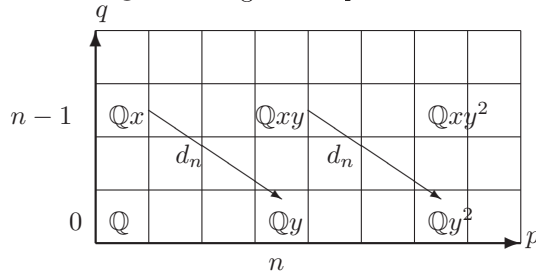
Pelo Teorema de Hurewicz mod  $\mathcal{F}$  e o Teorema dos Coeficientes Universais sabemos que os grupos de cohomologia de  $K(\mathbb{Z}, n)$  são finitamente gerados, logo o resultado do enunciado é equivalente à afirmação

$$H^*(K(\mathbb{Z}, n); \mathbb{Q}) = \begin{cases} \Lambda_{\mathbb{Q}}(x) & \text{se } n \text{ é ímpar,} \\ \mathbb{Q}[x] & \text{se } n \text{ é par.} \end{cases}$$

Suponhamos que o resultado é válido para  $K(\mathbb{Z}, k)$  com  $k < n$  e suponhamos primeiro que  $n$  é par. A fibração dos caminhos sobre  $K(\mathbb{Z}, n)$

$$K(\mathbb{Z}, n - 1) \rightarrow * \rightarrow K(\mathbb{Z}, n)$$

é orientável uma vez que a base é simplesmente conexa. A sucessão espectral com coeficientes em  $\mathbb{Q}$  tem o seguinte aspecto.



De facto  $d_n$  é o único diferencial que pode ser não nulo, e uma vez que o espaço dos caminhos é contráctil, temos necessariamente para  $r \geq n + 1$ ,

$$E_r^{p,q} = 0 \text{ se } p > 0 \text{ ou } q > 0,$$

ou seja  $d_n : E_n^{k,n-1} \rightarrow E_n^{k+n,0}$  é necessariamente um isomorfismo.

Sendo  $x$  um gerador de  $H^{n-1}(K(\mathbb{Z}, n-1); \mathbb{Q}) = \mathbb{Q}$  e  $y$  um gerador de  $H^n(K(\mathbb{Z}, n); \mathbb{Q})$ , pela identificação do produto no termo  $E^2$  da sucessão espectral temos que  $xy$  é um gerador de  $E_2^{n,n-1}$ . Como  $d_n$  é uma derivação,

$$d_n(xy) = y^2.$$

Daqui se conclui que  $0 \neq y^2$  e que  $y^2$  é um gerador de  $H^{2n}(K(\mathbb{Z}, n); \mathbb{Q})$ . Prosseguindo desta forma vemos que

$$H^*(K(\mathbb{Z}, n); \mathbb{Q}) = \mathbb{Q}[y]$$

o que conclui a demonstração no caso em que  $n$  é par.

O caso em que  $n$  é ímpar é muito semelhante e fica como exercício. □



é um isomorfismo. Seja  $x$  um gerador de  $H^{2n-1}(F; \mathbb{Q})$ . No termo  $E_2$  os produtos  $xy^k$  são não nulos para todo o  $k$  uma vez que (repare-se que nenhum diferencial  $d_k$  com  $k < 2n$  pode atingir algum  $y^k$ )

$$d_{2n}(xy^k) = y^{k+1} \neq 0.$$

Na realidade a fórmula anterior mostra que os produtos  $xy^k$  sobrevivem até ao termo  $E_{2n}$  e morrem no termo seguinte.

Finalmente, não podem existir classes em  $H^k(F; \mathbb{Q})$  para  $k > 2n - 1$ : Uma vez que as classes  $xy^k$  e  $y^{k+1}$  se aniquilam mutuamente de acordo com o padrão da figura acima no termo  $E_{2n}$ , não haveria nenhuma classe com a qual a primeira classe não nula em  $H^k(F; \mathbb{Q})$  se pudesse aniquilar.

Vemos assim que

$$H^k(F; \mathbb{Q}) = \begin{cases} \mathbb{Q} & \text{se } k = 2n - 1 \text{ ou } 0, \\ 0 & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

o mesmo sendo portanto verdade para  $H_*(F; \mathbb{Q})$ . Pelo Teorema de Hurewicz mod  $\mathcal{T}$  existe uma aplicação

$$S^{2n-1} \rightarrow F$$

que induz um isomorfismo em  $H_{2n-1}(-; \mathbb{Q})$  e portanto em  $H_*(S^{2n-1}; \mathbb{Q})$ . Novamente pelo Teorema de Hurewicz mod  $\mathcal{T}$  e pelo caso  $n$  ímpar que acabámos de provar, conclui-se que, módulo torsão,

$$\pi_k(F) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{se } k = 2n - 1 \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Pela sucessão exacta longa de homotopia de (25) conclui-se que

$$\pi_k(S^n) \cong_{\text{mod } \mathcal{T}} \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{se } k = n, 2n - 1 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

o que conclui a demonstração. □

Notemos a seguinte consequência imediata do resultado anterior.

**Corolário 6.74.**  $\pi_k^s(S^0)$  é finito para  $k > 0$ .

**Nota 6.75.** Outra maneira de enunciar o resultado anterior é dizer que

$$\pi_k^s(S^0) \otimes \mathbb{Q} = \begin{cases} \mathbb{Q} & \text{se } k = 0, \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

ou, seja que a racionalização do homomorfismo de Hurewicz estável

$$\pi_k^s(S^0) \otimes \mathbb{Q} \longrightarrow H_k(S^0; \mathbb{Q})$$

é um isomorfismo. O Exercício 5.75 mostra então que a teoria de homologia determinada por

$$X \mapsto \pi_k^s(X) \otimes \mathbb{Q}$$

coincide com a homologia racional  $H_k(X; \mathbb{Q})$ .

Seja  $f : S^{2n-1} \rightarrow S^n$  uma aplicação contínua e  $X = C_f$  a cofibra de homotopia de  $f$ . A sucessão de Mayer-Vietoris associada à sucessão de cofibração

$$S^{2n-1} \xrightarrow{f} S^n \xrightarrow{i} X \xrightarrow{j} S^{2n}$$

mostra que

$$H^k(X) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{se } k = 0, n, 2n \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

**Definição 6.76.** Designando por  $[\iota_k]$  o gerador de  $H^k(S^k; \mathbb{Z})$ , seja  $x \in H^n(X; \mathbb{Z})$  (a única classe) tal que  $i^*(x) = [\iota_n]$  e  $y = j^*([\iota_{2n}])$ . Define-se o invariante de Hopf  $H(f) \in \mathbb{Z}$  de  $[f] \in \pi_{2n-1}S^n$  pela equação

$$(26) \quad x^2 = H([f])y.$$

**Exemplo 6.77.** Sejam  $\eta : S^3 \rightarrow S^2$ ,  $\nu : S^7 \rightarrow S^4$  e  $\sigma : S^{15} \rightarrow S^8$  as aplicações de Hopf. As cofibras de homotopia destas aplicações são respectivamente<sup>42</sup> os planos projectivos complexos  $\mathbb{C}P^2$ , quaterniónico  $\mathbb{H}P^2$  e octoniónico  $\mathbb{O}P^2$ .

Uma vez que<sup>43</sup>

$$H^*(\mathbb{K}P^2; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}[x]/x^3$$

com  $|x| = 2, 4$  ou  $8$  respectivamente para  $\mathbb{K} = \mathbb{C}, \mathbb{H}$  ou  $\mathbb{O}$  conclui-se que

$$H(\eta) = H(\nu) = H(\sigma) = 1.$$

**Definição 6.78.** Para cada  $n, m \geq 1$ , seja  $f_{n,m} : S^{n+m-1} \rightarrow S^n \times S^m$  a aplicação de colagem da célula de dimensão  $n+m$  na decomposição celular standard de  $S^n \times S^m$ . O produto de Whitehead de dois elementos  $[g] \in \pi_n(X)$  e  $[h] \in \pi_m(X)$  é a classe de homotopia da composta

$$S^{n+m-1} \xrightarrow{f_{n,m}} S^n \vee S^m \xrightarrow{g \vee h} X$$

que se denota por  $[[g], [h]] \in \pi_{n+m-1}(X)$ .

**Nota 6.79.** Note-se que se escrevermos  $i_1 : S^n \rightarrow S^n \vee S^m$  e  $i_2 : S^m \rightarrow S^n \vee S^m$  para as inclusões canónicas, a aplicação  $f_{n,m}$  é um representante de  $[i_1, i_2]$ , e é esta a notação usual para  $f_{n,m}$  que usaremos a partir de agora.

Notemos a seguinte consequência imediata da definição do produto de Whitehead e da sucessão exacta de homotopia associada a uma sucessão de cofibração.

**Proposição 6.80.** Dados  $\alpha \in \pi_n(X)$  e  $\beta \in \pi_m(X)$ , temos  $[\alpha, \beta] = 0$  sse a aplicação

$$S^n \vee S^m \xrightarrow{\alpha \vee \beta} X$$

admite uma extensão a  $S^n \vee S^m$ .

Em particular, temos

<sup>42</sup>Para ver isto, note-se que sendo  $\mathbb{K} = \mathbb{C}, \mathbb{H}$  ou  $\mathbb{O}$ ,  $\mathbb{K}P^2$  é uma compactificação do plano  $\mathbb{K}^2$  (que é à célula de dimensão mais elevada na decomposição celular habitual de  $\mathbb{K}P^2$ ) obtida juntando a linha  $\mathbb{K}P^1$  no infinito. A aplicação de colagem da célula é a projecção radial da hipersuperfície  $S = \{v \in \mathbb{K}^2 : \|v\| = 1\}$  na linha projectiva no infinito que é, por definição, a aplicação de Hopf.

<sup>43</sup>Para  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$  ou  $\mathbb{H}$  é fácil deduzir este facto da sucessão espectral das fibrações  $S^1 \rightarrow S^5 \rightarrow \mathbb{C}P^2$  e  $S^3 \rightarrow S^{11} \rightarrow \mathbb{H}P^2$ . Para  $\mathbb{K} = \mathbb{O}$ , no entanto, não existe uma fibração análoga! Este facto é equivalente à afirmação que a multiplicação na esfera  $S^7$  induzida pela multiplicação nos octoniões não é associativa na categoria de homotopia [Sta]. A estrutura do produto em  $H^*(\mathbb{O}P^2; \mathbb{Z})$  é no entanto uma consequência da dualidade de Poincaré tal como nos casos complexo e quaterniónico.



**Corolário 6.81.** Designando por  $\iota_n : S^n \rightarrow S^n$  a aplicação identidade, a esfera  $S^n$  admite uma estrutura de  $H$ -espaço sse  $[\iota_n, \iota_n] = 0$

*Proof.* Um multiplicação  $\mu : S^n \times S^n \rightarrow S^n$  é, por definição, uma aplicação tal que  $\mu|_{S^n \vee S^n} \simeq \iota_n \vee \iota_n$ .  $\square$

**Exercício 6.82.** Mostre que se  $X$  é um  $H$ -espaço, então  $[\alpha, \beta] = 0$  para todo o  $\alpha \in \pi_k(X)$  e  $\beta \in \pi_m(X)$ .

**Exercício 6.83.** Mostre as seguintes propriedades do produto de Whitehead

(a) Se  $\alpha \in \pi_1(X)$  tem-se

$$[\alpha, \beta] = \begin{cases} \alpha\beta\alpha^{-1}\beta & \text{se } \beta \in \pi_1(X) \\ \tau_\alpha(\beta) - \beta & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

(b) Mostre que  $\Sigma[\alpha, \beta] = 0$  (recorde o Exercício 3.52).

(c) O produto de Whitehead  $[\alpha, \beta]$  é bilinear.

**Exemplo 6.84.** Dado  $n \geq 1$ , e designando por  $\iota_n : S^n \rightarrow S^n$  a aplicação identidade, consideremos o diagrama comutativo em que as linhas são sucessões de cofibração

$$\begin{array}{ccccccc} S^{2n-1} & \xrightarrow{(i_1, i_2)} & S^n \vee S^n & \xrightarrow{i} & S^n \times S^n & \xrightarrow{j} & S^{2n} \\ \downarrow = & & \downarrow \iota_n \vee \iota_n & & \downarrow \psi & & \downarrow = \\ S^{2n-1} & \xrightarrow{[\iota_n, \iota_n]} & S^n & \xrightarrow{i} & X & \xrightarrow{j} & S^{2n} \end{array}$$

Sejam  $e_k \in H^k(S^k; \mathbb{Z})$  geradores e  $x \in H^n(X; \mathbb{Z}), y \in H^{2n}(X; \mathbb{Z})$  tais que  $i^*(x) = [e_n]$  e  $y = j^*(e_{2n})$ . Como as aplicações denotadas por  $j$  são isomorfismos em  $H^{2n}$ , temos

$$\psi^*(y) = e_n \times e_n$$

e uma vez que as aplicações denotadas por  $j$  são isomorfismos em  $H^n$ , a equação

$$(\iota_n \vee \iota_n)^*(e_n) = (e_n, e_n) \in H^n(S^n \vee S^n; \mathbb{Z}) = H^n(S^n; \mathbb{Z}) \oplus H^n(S^n; \mathbb{Z})$$

permite-nos concluir que

$$\psi^*(x) = e_n \times 1 + 1 \times e_n$$

e como tal

$$\psi^*(x^2) = (\iota_n \times 1 + 1 \times \iota_n)^2 = \iota_n \times \iota_n + (-1)^{n^2} \iota_n \times \iota_n.$$

Conclui-se que

$$x^2 = \begin{cases} 0 & \text{se } n \text{ é ímpar,} \\ 2y & \text{se } n \text{ é par.} \end{cases}$$

e portanto

$$H([\iota_n, \iota_n]) = \begin{cases} 0 & \text{se } n \text{ é ímpar,} \\ 2 & \text{se } n \text{ é par.} \end{cases}$$

**Exercício 6.85.** Mostre que  $\pi_{2n-1}(S^1 \vee S^n)$  não é finitamente gerado mesmo como módulo sobre  $\mathbb{Z}[\pi_1(S^1 \vee S^n)]$ .

**Exercício 6.86.** Mostre que  $H : \pi_{2n-1}S^n \rightarrow \mathbb{Z}$  é um homomorfismo de grupos.

**Exercício 6.87.** *Mostre que se  $M$  é uma variedade de dimensão 4 orientável e simplesmente conexa, o seu tipo de homotopia é determinado pela forma quadrática definida em  $H^2(M; \mathbb{Z})$  pelo produto cup (cf. Exemplo 5.72).*

Um corolário imediato do exercício anterior e do exemplo que o precede é o seguinte resultado.

**Proposição 6.88.** *O produto de Whitehead  $[\iota_n, \iota_n] \in \pi_{4n-1}(S^{2n})$  tem ordem infinita.*

Sabemos do Teorema 6.73 que  $\pi_{4n-1}(S^{2n}) \simeq \mathbb{Z}$  módulo torsão, e é natural perguntar se os elementos de ordem infinita que descrevemos nos Exemplos 6.84 e 6.77 são ou não divisíveis. O Exercício 6.86 responde à pergunta no caso das aplicações de Hopf: claramente não são divisíveis e portanto geram os grupos  $\pi_{4n-1}S^{2n}$  respectivos módulo torsão<sup>44</sup>. Por outro lado, o elemento  $[\iota_{2n}, \iota_{2n}]$  gera o grupo  $\pi_{4n-1}S^{2n}$  módulo torsão sse não existe uma aplicação  $S^{4n-1} \rightarrow S^{2n}$  com invariante de Hopf 1. A resposta a esta questão é um famoso teorema de Adams.

**Teorema 6.89.** (Adams [Ad] (1958)) *Existem aplicações  $\alpha : S^{2n-1} \rightarrow S^n$  com invariante de Hopf 1 apenas para  $n = 2, 4$  e  $8$ .*

**Nota 6.90.** *Não é difícil demonstrar que as seguintes afirmações são equivalentes*

- *Existe um elemento  $\alpha : S^{2n-1} \rightarrow S^n$  com invariante de Hopf 1.*
- *A esfera  $S^{n-1}$  é um  $H$ -espaço.*

*Claramente se  $\mathbb{R}^n$  é uma álgebra de divisão (nao necessariamente associativa<sup>45</sup>)  $S^{n-1}$  é um  $H$ -espaço, logo o Teorema de Adams implica que  $\mathbb{R}^n$  é uma álgebra de divisão sse  $n = 1, 2, 4$  ou  $8$ . Não é conhecida qualquer demonstração não topológica para este teorema<sup>46</sup>. A primeira demonstração (quase simultânea com o Teorema de Adams acima) deve-se a Bott e Milnor [BoM] que a obtiveram a partir dos resultados de Bott sobre a topologia dos grupos ortogonais. Na realidade Bott e Milnor usaram estes resultados para demonstrar que as únicas esferas paralelizáveis são  $S^1, S^3$  e  $S^7$ , e o resultado sobre álgebras de divisão é então uma consequência uma vez que se  $\mathbb{R}^n$  é uma álgebra de divisão então claramente  $S^{n-1}$  é paralelizável.*

*É possível demonstrar que se  $S^n$  é paralelizável (para qualquer estrutura diferencial compatível com a topologia), então  $S^n$  é um  $H$ -espaço, pelo que o Teorema de Adams implica também o resultado de Bott e Milnor.*

*Finalmente observamos que a questão mais geral de qual o número máximo de campos vectoriais ortonormais tangentes a uma esfera  $S^n$  é conhecido [Ad2] sendo uma das mais famosas aplicações da  $K$ -teoria enquanto teoria de cohomologia generalizada. Se escrevermos  $n = (2a+1)2^b$  e  $b = c+4d$  então o número é  $2^c + 8d - 1$ .*

**Exemplo 6.91. Cohomologia de  $K(\mathbb{Z}, 3)$**  Consideremos a fibração dos caminhos sobre  $K(\mathbb{Z}, 3)$

$$K(\mathbb{Z}, 2) \rightarrow * \rightarrow K(\mathbb{Z}, 3).$$

<sup>44</sup>Na realidade, para  $n = 2, 4$  e  $8$  vimos já há muito tempo que  $\pi_{4n-1}S^{2n} = \mathbb{Z} \oplus \pi_{4n-2}S^{2n-1}$  (ver Exercício 4.4)

<sup>45</sup>Por uma álgebra sobre  $\mathbb{R}$ , entendemos uma multiplicação bilinear  $\mu : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  com identidade  $e \in \mathbb{R}^n$  tal que  $\mu|_{\mathbb{R}^n \times e} = \mu|_{e \times \mathbb{R}^n} = \text{id}_{\mathbb{R}^n}$ . Uma álgebra diz-se uma álgebra de divisão se não tem divisores de zero. Se a multiplicação não é associativa, esta propriedade é estritamente mais forte que a propriedade de todos os elementos não nulos terem um inverso multiplicativo.

<sup>46</sup>Há uma demonstração algébrica para o resultado muito mais fraco conhecido por Teorema de Hurwitz (1898): Se  $\mathbb{R}^n$  é uma álgebra normada sobre  $\mathbb{R}$  então  $n = 1, 2, 4$  ou  $8$ .

Sabemos que

$$H^*(K(\mathbb{Z}, 2); \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}[x]$$

e pela Proposição 6.72 que a cohomologia de  $K(\mathbb{Z}, 3)$  módulo torsão está concentrada em dimensão 3. Vamos determinar para cada primo  $p$  a dimensão em que aparece a primeira classe de torsão- $p$ .

A informação de que dispomos sobre a cohomologia da fibra e da base determina os grupos  $E_2^{s,t}$  para  $s \leq 3$ . No decorrer da sucessão espectral todas as classes excepto o gerador de  $E_r^{0,0}$  terão de se cancelar. Para calcular a torsão- $p$  podemos usar a sucessão espectral com coeficientes em  $\mathbb{F}_p$  que tem a vantagem de fazer desaparecer toda a torsão coprima com  $p$ .

Seja  $y$  um gerador de  $H^3(K(\mathbb{Z}, 3); \mathbb{F}_p)$ . Uma vez que  $|x| = 2$  é par, temos

$$(27) \quad d_3(x^k) = kx^{k-1}y$$

que é 0 se  $p|k$ .

Note-se que  $d_2(xy)$  é necessariamente 0. Logo a classe  $xy$  sobrevive até ao termo  $E^3$ , o que permite determinar completamente a sucessão espectral para  $s + t \leq 5$ . Temos necessariamente,

$$H^4(K(\mathbb{Z}, 3); \mathbb{F}_p) = H^5(K(\mathbb{Z}, 3); \mathbb{F}_p) = 0.$$

enquanto que

$$d_3(xy) = y^2$$

que é 0 se  $p$  é ímpar (e então as classes  $x^2$  e  $xy$  aniquilam-se mutuamente e  $H^6(K(\mathbb{Z}, 3); \mathbb{F}_p) = 0$ ). Se  $p = 2$ , então  $d_3(x^2) = 0$  e portanto para que a classe  $xy$  morra é necessário que  $y^2 \neq 0$ <sup>47</sup>. Portanto para  $p = 2$  temos  $H^6(K(\mathbb{Z}, 3); \mathbb{F}_2) \simeq \mathbb{F}_2 y^2$ , e é esta a primeira classe de torsão-2.

Se  $p$  é ímpar as colunas 4,5 e 6 da sucessão espectral são nulas. Em particular as classes  $x^k y$  sobrevivem até ao termo  $E_3$  e no termo  $E_4$  as únicas que restam nas primeiras 3 colunas são os geradores de  $E_4^{0,2jp}$  e  $E_4^{3,2j(p-1)}$ . Segue-se que

$$H^k(K(\mathbb{Z}, 3); \mathbb{F}_p) = 0 \text{ para } 3 < k < 2p + 1$$

e que há necessariamente um isomorfismo

$$d_{2p+1} : \mathbb{F}_p x^p \simeq E_{0,2p} \rightarrow E_{2p+1,0}$$

que aniquila a classe  $x^p$  (e também um isomorfismo  $d_{2p-1} : \mathbb{F}_p x^{p-1}y \simeq E_{3,2(p-1)} \rightarrow E_{2p+2,0}$ ).

Assim, para um primo  $p$  ímpar temos

$$H^k(K(\mathbb{Z}, 3); \mathbb{F}_p) = \begin{cases} \mathbb{F}_p & \text{se } k = 3 \text{ ou } k = 2p + 1 \\ 0 & \text{se } 3 < k < 2p + 1. \end{cases}$$

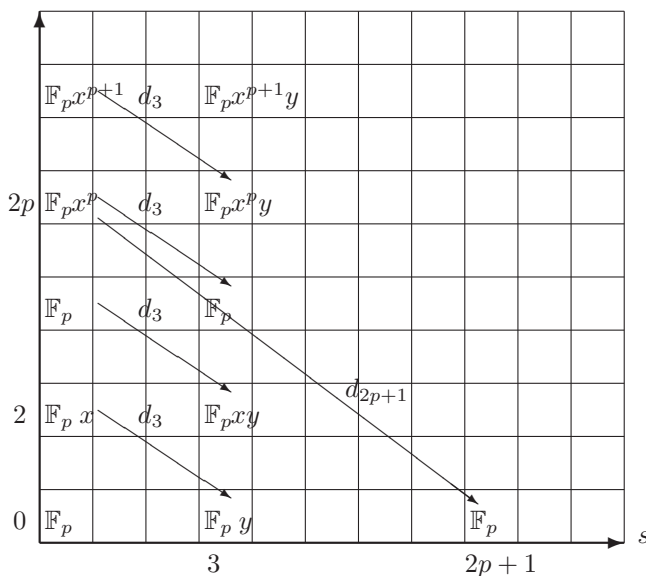
Pelo Teorema dos Coeficientes Universais concluímos que

$$H_k(K(\mathbb{Z}, 3); \mathbb{Z}) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{se } k = 3 \\ 0 & \text{se } 3 < k < 2p + 1 \\ \mathbb{Z}/p^l & \text{se } k = 2p + 1 \end{cases}$$

<sup>47</sup>Note-se que considerando a sucessão espectral com coeficientes em  $\mathbb{Z}$  este argumento mostra que o quadrado do gerador de  $H^3(K(\mathbb{Z}, 3); \mathbb{Z})$  é uma classe de grau ímpar com quadrado não nulo.

para algum  $l$ . Repetindo o argumento acima com coeficientes  $\mathbb{Z}/p^2$  em vez de  $\mathbb{F}_p$  vemos no entanto que  $l = 1$  uma vez que as classes sobreviventes em  $E_4^{0,2jp}$  e  $E_4^{3,2j(p-1)}$  são elementos de ordem  $p$ .

A seguinte figura descreve a sucessão espectral para  $s + t \leq 2p + 1$  e  $p$  ímpar.



Sabemos do Teorema 6.73 que os grupos  $\pi_k S^3$  são finitos para  $k > 3$ . O exemplo anterior permite-nos obter mais informação sobre estes grupos.

**Teorema 6.92.** *Seja  $p$  um primo. Para  $0 \leq k \leq 2p$  temos, módulo  $\mathcal{T}_p$ ,*

$$\pi_k(S^3) \simeq_{\text{mod } \mathcal{T}_p} \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{se } k = 3, \\ \mathbb{Z}/p & \text{se } k = 2p, \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

*Proof.* Seja  $\alpha: S^3 \rightarrow K(\mathbb{Z}, 3)$  um gerador de  $\pi_3(K(\mathbb{Z}, 3))$  e consideremos a sucessão espectral de homologia da fibração

$$(28) \quad F \rightarrow S^3 \xrightarrow{\alpha} K(\mathbb{Z}, 3).$$

com coeficientes em  $\mathbb{Z}$ . Pelo Exemplo 6.91 temos

$$E_{k,0}^2 \simeq_{\text{mod } \mathcal{T}_p} \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{se } k = 3 \\ 0 & \text{se } 0 < k < 2p + 1 \\ \mathbb{Z}/p & \text{se } k = 2p + 1. \end{cases}$$

No termo  $E_\infty$  as únicas classes sobreviventes são as que estão em  $E_{0,0}^2$  e  $E_{3,0}^2$ . Todas as restantes classes são de torsão. Uma vez que torsão- $p$  só pode ser aniquilada por torsão- $p$ , conclui-se que a primeira classe de  $p$ -torsão na fibra de homotopia  $F$  está em dimensão  $2p$  e consiste num grupo cíclico de ordem  $p$ .

Pelo Teorema de Hurewicz mod  $\mathcal{T}_p$  conclui-se que

$$\pi_k(F) \simeq_{\text{mod } \mathcal{T}_p} \begin{cases} 0 & \text{se } k < 2p \\ \mathbb{Z}/p & \text{se } k = 2p. \end{cases}$$

Um olhar para a sucessão exacta longa de homotopia da fibração (28) conclui a demonstração.  $\square$

**Corolário 6.93.**  $\pi_1^s = \mathbb{Z}/2$  gerado pela suspensão da aplicação de Hopf  $\eta : S^3 \rightarrow S^2$ .

*Proof.* Pelo Teorema anterior  $\pi_4(S^3) = \mathbb{Z}/2$ . Pelo Teorema de suspensão de Freudenthal,

$$\mathbb{Z}\eta \simeq \pi_3(S^2) \xrightarrow{\Sigma} \pi_4(S^3)$$

é uma aplicação sobrejectiva logo  $\pi_4(S^3)$  é gerado pela suspensão da aplicação de Hopf. O Teorema de Freudenthal diz-nos que

$$\pi_k S^{k-1} \xrightarrow{\Sigma} \pi_{k+1} S^k$$

é um isomorfismo para  $k \geq 4$ , o que conclui a demonstração.  $\square$

**Exercício 6.94.** Seja  $p$  um primo. Mostre que para todo o  $n \geq 3$  temos, módulo  $\mathcal{T}_p$ ,

$$H_k(K(\mathbb{Z}, n); \mathbb{Z}) \simeq_{\text{mod } \mathcal{T}_p} \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{se } k = n \text{ ou } k|n \text{ e } n \text{ é par,} \\ \mathbb{Z}/p & \text{se } k = n + 2p - 2, \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

para  $k \leq n + 2p - 2$ . Conclua que a primeira componente de  $p$ -torsão em  $\pi_k S^n$  ocorre para  $k = n + 2p - 1$  e é cíclica.

**Exercício 6.95.** Mostre que  $\pi_{2p-3}^s \simeq_{\text{mod } \mathcal{T}_p} \mathbb{Z}/p$  e este grupo é gerado pela suspensão de um gerador de  $\pi_{2p} S^3$ .

**Mais aplicações.** O seguinte Teorema dá-nos condições para que a cohomologia de uma fibração seja isomorfa como módulo sobre o anel de cohomologia da base à cohomologia da fibração trivial.

**Teorema 6.96** (Leray-Hirsch). Seja  $F \xrightarrow{i} E \xrightarrow{p} B$  uma fibração orientável sobre o anel  $R$  e suponhamos que ou  $H^*(F; R)$  é de tipo finito ou  $B$  é fracamente equivalente a um complexo celular de tipo finito.

Se  $H^*(F; \mathbb{R})$  é um  $R$ -módulo livre e  $i^* : H^*(E; \mathbb{R}) \rightarrow H^*(F; \mathbb{R})$  é uma aplicação sobrejectiva<sup>48</sup> então sendo

$$\theta : H^*(F; R) \rightarrow H^*(E; R)$$

um inverso à direita para  $i^*$ <sup>49</sup>, a aplicação

$$H^*(B; \mathbb{R}) \otimes H^*(F; R) \longrightarrow H^*(E; R)$$

definida por

$$x \otimes y \mapsto p^*(x) \cup \theta(y)$$

é um isomorfismo de  $H^*(B; R)$ -módulos.

<sup>48</sup>Diz-se neste caso que a fibra é *totalmente não cohomóloga a zero*.

<sup>49</sup>A aplicação  $\theta$  chama-se uma *extensão da cohomologia da fibra*.

*Proof.* O termo  $E_2$  da sucessão espectral da fibração é

$$E_2^{p,q} = H^p(B; H^q(F; R)).$$

Começamos por notar que se  $H^*(F; R)$  é de tipo finito ou  $B$  tem o tipo de homotopia de um complexo celular com um número finito de células em cada dimensão, o termo da direita identifica-se (como álgebra) com o produto tensorial das álgebras

$$H^*(B; R) \otimes H^*(F; R).$$

De facto, se  $H^q(F; R) \simeq R^{n_q}$  então

$$H^q(B; H^q(F; R)) \simeq H^q(B; R^{n_q}) \simeq H^q(B; R)^{n_q} \simeq H^q(B; R) \otimes R^{n_q} \simeq H^q(B; R) \otimes H^q(F; R)$$

e o produto no termo  $E_2$  da sucessão espectral corresponde precisamente ao produto em  $H^*(B; R) \otimes H^*(F; R)$ . Por outro lado, se o complexo de homologia celular  $C_*(B)$  é finitamente gerado em cada dimensão, então

$$\begin{aligned} C^p(B; H^q(F; R)) &= \text{Hom}(C_p(B); H^q(F; R)) \\ &\simeq \text{Hom}(C_p(B), \oplus_{\alpha} R) \\ &\simeq \text{Hom}(C_p(B); R) \otimes (\oplus_{\alpha} R) \\ &\simeq \text{Hom}(C_p(B); R) \otimes H^q(F; R) \end{aligned}$$

Como  $H^q(F; R)$  é livre, o functor  $\otimes H^q(F; R)$  é exacto e portanto

$$H^p(B; H^q(F; R)) \simeq H^p(B; R) \otimes H^q(F; R),$$

e é fácil ver que este isomorfismo leva o produto no termo  $E_2$  da sucessão espectral no produto em  $H^*(B; R) \otimes H^*(F; R)$ .

Como  $i^* : H^*(E; R) \rightarrow H^*(F; R)$  é sobrejectivo, os elementos em  $E_2^{0,q} \simeq H^q(F; R)$  são ciclos infinitos (recorde-se que  $i^*$  se identifica com o homomorfismo edge da sucessão espectral). Os elementos de  $E_2^{p,0}$  são sempre ciclos infinitos. Pelo parágrafo anterior, as classes em  $E_2^{p,0}$  e  $E_2^{0,q}$  geram multiplicativamente o termo  $E_2$  da sucessão espectral. Uma vez que  $d_2$  é uma derivação conclui-se que  $d_2$  é identicamente nulo. Portanto  $E_2 = E_3$  e em particular  $E_3^{p,0}$  e  $E_3^{0,q}$  geram multiplicativamente o termo  $E_3$ . Conclui-se que  $d_3 = 0$  e prosseguindo indutivamente, que a sucessão espectral colapsa no termo  $E_2$ , e portanto há um isomorfismo de álgebras bigraduadas

$$(29) \quad E_{\infty}^{*,*} \simeq H^*(B; R) \otimes H^*(F; R).$$

A aplicação do enunciado

$$H^*(B; R) \otimes H^*(F; R) \xrightarrow{\psi} H^*(E; R)$$

é claramente uma aplicação de  $H^*(B; R)$ -módulos logo resta-nos ver que é um isomorfismo. Se considerarmos a filtração usual em  $H^*(E; R)$  e a filtração

$$\tilde{F}^p(H^*(B; R) \otimes H^*(F; R)) = \oplus_{s \geq p} H^s(B; R) \otimes H^*(F; R)$$

em  $H^*(B; R) \otimes H^*(F; R)$ , a aplicação  $\psi$  preserva a filtração. A equação (29) diz-nos precisamente que  $\psi$  induz um isomorfismo nos quocientes destas filtrações. Como as filtrações são finitas em cada dimensão, o lema dos 5 mostra-nos que  $\psi$  é um isomorfismo de  $R$ -módulos bigraduados, o que conclui a demonstração.  $\square$

Note-se que a hipótese de a cohomologia da fibra ser livre se verifica automaticamente se  $R$  é um corpo.

**Nota 6.97.** *Por simplicidade enunciámos o resultado anterior na sua forma absoluta, mas deve ser claro que ele permanece válido (com a mesma demonstração) para pares de fibrações  $p : (E, E') \rightarrow B$  ou fibrações sobre pares  $p : (E, p^{-1}(B')) \rightarrow (B, B')$ .*

Um caso particularmente importante do Teorema de Leray-Hirsch é o caso das fibrações em que a fibra é  $(D^k, S^{k-1})$  (ou equivalentemente  $(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^{k-1} \setminus \{0\})$ ).

**Definição 6.98.** *Seja  $(F, F') = (D^k, S^{k-1})$  ou  $(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^{k-1})$ . Uma fibração  $(F, F') \xrightarrow{i} (E, E') \xrightarrow{p} B$  diz-se orientável sobre um anel  $R$  se existe  $x \in H^k(E, E'; R)$  tal que para todo o  $b \in B$ ,*

$$i_b^*(x) \in H^k(p^{-1}(b); R) \simeq H^k(F, F'; R) \simeq R$$

*é um gerador<sup>50</sup>. Uma tal classe  $x$  chama-se uma orientação sobre  $R$  ou uma classe de Thom da fibração.*

**Proposição 6.99.** *Se  $U, U' \in H^k(E, E'; R)$  são classes de Thom para  $p : (E, E') \rightarrow B$  e  $B$  é conexo por arcos, existe  $\lambda \in R^\times$  tal que  $U' = \lambda U$ .*

*Proof.* Podemos supor que  $B$  é um complexo celular, e é portanto localmente contráctil. Seja  $\{U_\alpha\}$  uma cobertura de  $B$  por abertos contrácteis. Sobre cada aberto  $U_\alpha$  a fibração é equivalente a uma fibração produto e a afirmação do enunciado é portanto válida.

Dadas classes de Thom  $U$  e  $U'$ , seja  $W = \cup_{\beta \in J} U_\beta$  um aberto maximal tal que  $U|_W = \lambda U'|_W$ . Se  $W \neq B$ , uma vez que  $B$  é conexo, existe  $U_\alpha$  tal que  $U_\alpha \cap W \neq \emptyset$ . Claramente temos

$$U|_{U_\alpha} = \lambda U'|_{U_\alpha}$$

e portanto considerando a sucessão de Mayer-Vietoris

$$H^{k-1}((W \cap U_\alpha) \times (F, F'); R) \xrightarrow{\delta} H^k(p^{-1}(W), p^{-1}(W'); R) \oplus H^k(U_\alpha \times (F, F'); R)$$

vemos que a classe  $U|_{W \cup U_\alpha} - \lambda U'|_{W \cup U_\alpha} \in \text{im } \delta$ . Mas

$$H^{k-1}((W \cap U_\alpha) \times (F, F'); R) \simeq 0$$

uma vez que  $(F, F')$  é  $(k-1)$ -conexo, o que conclui a demonstração.  $\square$

O seguinte resultado assegura-nos que este conceito de orientação está de acordo com o conceito definido anteriormente para fibrações arbitrárias.

**Proposição 6.100.** *Um par de fibrações com fibra  $(F, F') = (\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^k \setminus 0)$  ou  $(D^k, S^{k-1})$  admite uma classe de Thom  $U \in H^k(E, E'; R)$  sse a aplicação de monodromia induz a identidade em  $H^*(-; R)$ .*

*Proof.* Exercício.  $\square$

**Nota 6.101.** *O análogo da Proposição 6.100 não é válido para teorias de cohomologia generalizada. Uma fibração diz-se orientável relativamente a uma teoria de cohomologia generalizada quando existe uma classe de Thom.*

<sup>50</sup>Equivalentemente, se existe uma extensão da cohomologia da fibra.

Note-se a seguinte consequência imediata desta proposição. Qualquer fibração com fibra  $(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^k \setminus 0)$  é orientável sobre  $R = \mathbb{Z}/2$ . De facto a aplicação de monodromia é sempre um isomorfismo em cohomologia e uma vez que a homologia da fibra é  $\mathbb{Z}/2$ , o isomorfismo é necessariamente a identidade.

Uma fonte importante de tais fibrações são os fibrados vectoriais. Recorde que um fibrado  $p: E \rightarrow B$  com fibra  $\mathbb{R}^k$  se diz um *fibrado vectorial* se é dotado de uma multiplicação por escalar e uma adição que preservam as fibras

$$\mu: \mathbb{R} \times E \rightarrow E \quad +: E \times_B E \rightarrow E$$

e se podem escolher as trivializações locais

$$p^{-1}(U) \longrightarrow U \times \mathbb{R}^k$$

de tal forma que as duas operações sejam preservadas (considera-se a adição e multiplicação por escalar canónicas em  $U \times \mathbb{R}^k$ .) Dado um fibrado vectorial  $E \rightarrow B$  com  $B$  paracompacto, e designando por  $0 \subset E$  a secção nula,  $(E, E \setminus 0) \rightarrow B$  é um par de fibrações com fibra  $(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^k \setminus 0)$  e escolhendo uma métrica para  $E$  obtemos uma fibração  $(D^k, S^{k-1})$  que se inclui na anterior por uma equivalência de homotopia fibrada.

**Corolário 6.102** (Teorema do Isomorfismo de Thom). *Seja  $(F, F') = (D^k, S^{k-1})$  ou  $(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^k \setminus \{0\})$ . Se  $(F, F') \rightarrow (E, E') \rightarrow B$  uma fibração orientável sobre  $R$  com classe de Thom  $U \in H^k(E, E'; R)$ , a aplicação*

$$H^m(B; R) \longrightarrow H^{m+k}(E, E'; R)$$

$$x \longmapsto p^*(x) \cup U$$

é um isomorfismo.

*Proof.* Dar uma classe de Thom é equivalente a dar uma extensão da cohomologia da fibra pelo que o resultado é uma consequência imediata da versão relativa do Teorema de Leray-Hirsch 6.96.  $\square$

**Nota 6.103.** *Se  $U$  é uma classe de Thom (sobre  $\mathbb{Z}$ ) para o fibrado vectorial  $p: E \rightarrow B$ , a imagem de  $U$  pela aplicação*

$$U \in H^k(E, E'; \mathbb{Z}) \xrightarrow{j^*} H^k(E; \mathbb{Z}) \simeq H^k(B; \mathbb{Z})$$

é um invariante importante do fibrado vectorial  $E$  chamado a classe de Euler do fibrado vectorial orientado.

**Nota 6.104.** *Tanto o Teorema de Leray-Hirsch como o Teorema do isomorfismo de Thom podem ser demonstrados de forma elementar sem recorrer à sucessão espectral. Ver por exemplo [Ha, 4.D].*

Como aplicação final da sucessão espectral de Serre vamos calcular a álgebra (de Hopf) de cohomologia de alguns grupos de Lie clássicos. Recorde-se que o grupo unitário  $U(n)$  é o grupo das matrizes unitárias  $n \times n$  e que o grupo simpléctico unitário  $Sp(n)$  é o grupo das transformações  $\mathbb{H}$ -lineares de  $\mathbb{H}^n \rightarrow \mathbb{H}^n$  que preservam a norma.



**Teorema 6.105.** *A cohomologia de  $U(n)$  é uma álgebra exterior sobre  $\mathbb{Z}$*

$$H^*(U(n); \mathbb{Z}) = \Lambda(x_1, \dots, x_{2n-1})$$

com  $|x_k| = k$ .

*Proof.* Seja  $SU(n) \subset U(n)$  o subgrupo das matrizes com determinante 1. Temos uma extensão

$$1 \longrightarrow SU(n) \longrightarrow U(n) \xrightarrow{\det} S^1 \longrightarrow 1$$

e existe um homomorfismo  $S^1 \rightarrow U(n)$  que cinde esta extensão pelo que  $U(n)$  é um produto semidirecto

$$U(n) = S^1 \rtimes SU(n)$$

e em particular, enquanto espaço topológico,  $U(n)$  é homeomorfo ao produto

$$U(n) = S^1 \times SU(n).$$

Basta-nos portanto demonstrar que  $H^*(SU(n); \mathbb{Z}) = \Lambda(x_3, \dots, x_{2n-1})$ , o que vamos fazer por indução. Para  $n = 2$ ,  $SU(2) \simeq S^3$  logo a afirmação é verdadeira.

A acção de  $SU(n)$  na esfera unitária  $S^{2n-1} \subset \mathbb{C}^n$  identifica a esfera com o espaço homogéneo  $SU(n)/SU(n-1)$ . Consideremos a sucessão espectral do fibrado

$$SU(n-1) \rightarrow SU(n) \rightarrow S^{2n-1}.$$

Por indução,  $E_2^{0,*} = H^*(SU(n-1); \mathbb{Z}) \simeq \Lambda(x_3, \dots, x_{2n-3})$ . Por razões dimensionais, todos os diferenciais nos geradores  $x_k$  são nulos, mas isto significa que a sucessão espectral colapsa no termo  $E_2$  e portanto temos

$$E_\infty^{*,*} \simeq \Lambda(x_3, \dots, x_{2n-1}).$$

em que  $x_k$  tem bigrau  $(0, k)$  para  $k < 2n-1$  e  $x_{2n-1}$  tem bigrau  $(2n-1, 0)$ . O resultado pretendido é agora uma consequência imediata do seguinte lema (uma vez que não há torsão na cohomologia de  $H^*(U(n); \mathbb{Z})$  e portanto a álgebra exterior em questão é livre).  $\square$

**Lema 6.106.** *Seja  $A$  uma álgebra graduada sobre  $R$  e  $F^p(A)$  uma filtração multiplicativa de  $A$  que é finita em cada grau. Qualquer isomorfismo da álgebra bigraduada associada á filtração com uma álgebra graduada livre*

$$R\{x_\alpha\} \xrightarrow{\psi} \bigoplus_p F^p A / F^{p+1}(A)$$

é induzido por um isomorfismo

$$R\{x_\alpha\} \xrightarrow{\tilde{\psi}} A.$$

*Proof.* Seja  $y_\alpha \in A$  um representante de  $\psi(x_\alpha)$ . Uma vez que  $R\{x_\alpha\}$  é uma álgebra livre existe um (único) homomorfismo  $\tilde{\psi} : R\{x_\alpha\} \rightarrow A$  que envia  $x_\alpha$  em  $y_\alpha$ . Podemos definir uma filtração em  $R\{x_\alpha\}$  atribuindo a filtração  $p_\alpha$  a  $x_\alpha$  se  $\psi(x_\alpha) \in F^{p_\alpha} A / F^{p_\alpha+1} A$  e extendendo a definição de forma multiplicativa. Com esta definição, o homomorfismo  $\tilde{\psi}$  induz um isomorfismo entre os anéis graduados determinados pelas filtrações e, sendo a filtração é finita em cada grau, é portanto um isomorfismo de  $R$ -módulos pelo lema dos 5.  $\square$

Note-se que o gerador  $x_{2n-1} \in H^{2n-1}(U(n); \mathbb{Z})$  é o pullback do gerador de  $S^{2n-1}$  pela projecção  $U(n) \rightarrow S^{2n-1}$ . Uma vez que a inclusão

$$U(n-1) \rightarrow U(n)$$

é uma  $2n - 2$ -equivalência<sup>51</sup> isto dá-nos uma definição indutiva dos geradores da cohomologia de  $U(n)$ . Há ainda uma interpretação geométrica interessante para os geradores da cohomologia de  $U(n)$ . Podemos definir uma aplicação

$$S^{2n-1} \times S^1 \xrightarrow{\phi} U(n)$$

pela expressão

$$\phi(v, \alpha)(u) = \begin{cases} u & \text{se } u \perp v, \\ \alpha u & \text{se } u \text{ é um múltiplo de } v. \end{cases}$$

Claramente,  $\phi$  factoriza-se pela quociente pela relação de equivalência gerada por

$$(\beta v, \alpha) \sim (v, \alpha), \quad (v, 1) \simeq (v', 1)$$

e portanto define uma aplicação

$$\Sigma(\mathbb{C}P_+^{n-1}) = S^{2n-1} \times S^1 \xrightarrow{\psi} U(n)$$

chamada a *aplicação axial*.

**Exercício 6.107.** *Mostre que  $\psi^*$  determina um isomorfismo entre o subgrupo de  $H^*(U(n); \mathbb{Z})$  gerado pelos geradores  $\{x_1, \dots, x_{2n-1}\}$  e a cohomologia de  $\Sigma(\mathbb{C}P_+^{n-1})$ .*

**Nota 6.108.** *Os geradores  $x_1, \dots, x_{2n-1}$  são classes primitivas para a comultiplicação determinada pelo produto*

$$\mu : U(n) \times U(n) \rightarrow U(n).$$

*De facto, uma vez que  $i : U(n-1) \rightarrow U(n)$  é uma  $(2n-2)$ -equivalência, indutivamente, é suficiente mostrar que*

$$\mu_*(x_{2n-1}) = x_{2n-1} \times 1 + 1 \times x_{2n-1}$$

*e isto é uma consequência imediata do facto de no diagrama comutativo*

$$\begin{array}{ccc} U(n-1) \times U(n-1) & \xrightarrow{\mu} & U(n-1) \\ \downarrow i \times i & & \downarrow i \\ U(n) \times U(n) & \xrightarrow{\mu} & U(n) \\ & & \downarrow p \\ & & S^{2n-1} \end{array}$$

*a composta  $p \circ i \circ \mu$  ser a aplicação constante pois então*

$$(i \times i)^*(\mu^*(x_{2n-1})) = \mu^*i^*(x_{2n-1}) = \mu^*i^*p^*(e_{2n-1}) = 0.$$

*Isto determina completamente a estrutura de  $H^*(U(n); \mathbb{Z})$  enquanto álgebra de Hopf, e portanto também a estrutura da álgebra dual  $H_*(U(n); \mathbb{Z})$ : ambas são álgebras exteriores primitivamente geradas.*

**Exercício 6.109.** *Seja  $V_k(\mathbb{C}^n)$  a variedade de Stiefel formada pelos conjuntos de  $k$  vectores ortonormais em  $\mathbb{C}^n$ .*

(1) *Mostre que  $V_k(\mathbb{C}^n) \simeq U(n)/U(n-k)$ .*

<sup>51</sup>Note-se que isto é uma consequência dos cálculos da homologia acima: da conectividade da fibra de  $U(n-1) \rightarrow U(n)$  apenas poderíamos concluir que se trata de uma  $(2n-3)$ -equivalência.

- (2) Mostre que  $H^*(V_k(C^n); \mathbb{Z}) \simeq \Lambda(x_{2(n-k)+1}, \dots, x_{2n-1})$ . Sugestão: Considere os fibrados  $S^{2n-2k+1} = U(n-k+1)/U(n-k) \rightarrow U(n)/U(n-k) \rightarrow U(n)/U(n-k+1)$ .

**Exercício 6.110.** Mostre que  $H^*(Sp(n); \mathbb{Z}) = \Lambda(x_3, \dots, x_{4n-1})$  com  $x_k$  primitivos.

**Nota 6.111.** Note-se que não podemos aplicar os argumentos acima para calcular  $H^*(O(n); \mathbb{F}_2)$  usando as fibrações

$$O(n-1) \rightarrow O(n) \rightarrow S^{n-1}.$$

De facto não podemos aplicar o Lema 6.106 uma vez que uma álgebra exterior não é uma álgebra livre sobre  $\mathbb{F}_2$ . Na fibração

$$S^1 \rightarrow SO(3) \rightarrow S^2$$

apesar de a cohomologia da base e fibra serem álgebras exteriores,  $H^*(SO(3); \mathbb{F}_2)$  não é uma álgebra exterior. Como  $SO(3) \simeq \mathbb{R}P^3$  temos  $H^*(SO(3); \mathbb{F}_2) = \mathbb{F}_2[x]/x^4$  com  $|x| = 1$ . Ver [Ha, 3.D] para uma determinação da álgebra de cohomologia de  $SO(n)$ .

## 7. TEORIA DE OBSTRUÇÃO

Recorde-se que uma *teoria de cohomologia reduzida* consiste numa sucessão de funtores  $\{\bar{E}^n\}_{n \in \mathbb{Z}}$  da categoria de homotopia dos complexos celulares pontuados para a categoria dos grupos abelianos satisfazendo o seguinte axioma:

- Para cada par de complexos CW pontuados  $(X, A)$  existe uma sucessão exacta longa natural

$$\dots \longrightarrow \bar{E}^n(X/A) \longrightarrow \bar{E}^n(X) \longrightarrow \bar{E}^n(A) \xrightarrow{\delta} \bar{E}^{n+1}(X/A) \longrightarrow \dots$$

Diz-se que uma teoria de cohomologia generalizada satisfaz o *axioma wedge* se

- As inclusões canónicas  $\iota_\alpha : X_\alpha \hookrightarrow \bigvee_\alpha X_\alpha$  induzem um isomorfismo

$$E^n(\bigvee_\alpha X_\alpha) \xrightarrow{\prod_\alpha \iota_\alpha^*} \prod_\alpha E^n(X_\alpha).$$

**Definição 7.1.** Um espectro consiste numa sucessão de espaços pontuados  $\{E_n\}_{n \geq 0}$  juntamente com aplicações

$$\sigma_n : \Sigma E_n \rightarrow E_{n+1}.$$

Um espectro diz-se um  $\Omega$ -espectro se as aplicações adjuntas

$$\sigma_n : E_n \rightarrow \Omega E_{n+1}$$

são equivalências fracas. Os grupos de homotopia de um espectro  $\pi_n E$  para  $n \in \mathbb{Z}$ , são os grupos abelianos

$$\pi_n(E) = \operatorname{colim}_k \left( \pi_{n+k}(E_k) \xrightarrow{\Sigma} \pi_{n+k+1}(\Sigma E_k) \xrightarrow{\sigma_k} \pi_{n+k+1}(E_{k+1}) \right)$$

Note-se que para um  $\Omega$ -espectro temos

$$\pi_n(E) = \pi_{n+k}(E_k)$$

para todo o  $n \geq -k$ .

**Exemplo 7.2.** (i) O espectro de Eilenberg-MacLane  $HG$  correspondente ao grupo abeliano  $G$  é o espectro

$$\{K(G, n)\}_{n \geq 0}$$

com as aplicações adjuntas das equivalências

$$K(G, n) \simeq \Omega K(G, n+1).$$

O espectro de Eilenberg-MacLane trata-se portanto de um  $\Omega$ -espectro. Os grupos de homotopia são

$$\pi_k(HG) = \begin{cases} G & \text{se } k = 0 \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

(ii) O espectro das esferas é o espectro  $\{S^n\}$  determinado pelos homeomorfismos canônicos  $\Sigma S^n \rightarrow S^{n+1}$ . Os grupos de homotopia do espectro são os grupos de homotopia estáveis de esferas.

**Nota 7.3.** Dado um espectro  $(E_n, \sigma_n)$ , podemos definir um  $\Omega$ -espectro pela fórmula

$$E'_n = \text{colim}_{k \geq n} (\Omega^{k-n} E_k)$$

onde o limite é tomado relativamente às aplicações

$$\Omega^{k-n} E_k \xrightarrow{\Omega^{k-n} \sigma_k} \Omega^{k+1-n} E_{k+1}.$$

A compacidade de  $S^1$  implica que

$$\Omega(E'_n) = \Omega(\text{colim}_{k \geq n} \Omega^{k-n} E_k) = \text{colim}_{k \geq n} (\Omega^{k-n+1} E_k) = E'_{n-1}.$$

Este  $\Omega$ -espectro chama-se o  $\Omega$ -espectro associado a  $E$ .

Por exemplo se  $\{E_n\}$  é o espectro das esferas temos

$$E'_0 = \text{colim } \Omega^n S^n = \Omega^\infty S^\infty.$$

**Proposição 7.4.** Um  $\Omega$ -espectro  $\{E_n\}_{n \geq 0}$  determina uma teoria de cohomologia reduzida definida por

$$\overline{E}^n(X) = [\Sigma^k X, E_{n+k}]_* \text{ com } k \geq -n$$

Esta teoria satisfaz o axioma wedge e tem coeficientes  $\overline{E}^n(S^0) = \pi_{-n}(E)$  para  $n \in \mathbb{Z}$ .

*Proof.* Sendo  $(X, A)$  um par de complexos CW pontuados consideramos a sucessão de cofibração determinada pela inclusão  $A \subset X$ :

$$A \rightarrow X \rightarrow X \cup CA \rightarrow \Sigma A \rightarrow \dots$$

Tomando classes de homotopia pontuadas para  $E_n$  obtemos uma sucessão exacta (natural no par  $(X, A)$ )

$$[A, E_n]_* \leftarrow [X, E_n]_* \leftarrow [X \cup CA, E_n]_* \leftarrow [\Sigma A, E_n]_* \leftarrow \dots$$

Como  $X \cup CA \simeq X/A$  e

$$[\Sigma A, E_n]_* = [A, \Omega E_n]_* = [A, E_{n-1}]_*$$

a sucessão exacta acima é naturalmente equivalente a

$$(30) \quad \overline{E}^n(A) \leftarrow \overline{E}^n(X) \leftarrow \overline{E}^n(X/A) \leftarrow \overline{E}^{n-1}(A) \leftarrow \dots$$

Por outro lado, usando as equivalências naturais

$$[Y, E_n]_* = [Y, \Omega^k E_{n+k}]_* = [\Sigma^k Y, E_{n+k}]_*$$

a sucessão exacta (30) pode ser prolongada para a esquerda indefinidamente. As restantes afirmações do enunciado são consequências imediatas das definições.  $\square$

**Nota 7.5.** *Reciprocamente, o Teorema de Representabilidade de Brown (ver [Ha, 4.E]) implica que toda a teoria de cohomologia generalizada nos complexos celulares satisfazendo o axioma wedge é determinada desta forma por um  $\Omega$ -espectro.*

**Nota 7.6.** *É um bom exercício de aplicação do Teorema de Excisão de Homotopia verificar que qualquer espectro  $(E_n, \sigma_n)$  determina uma teoria de homologia generalizada reduzida nos complexos celulares pela fórmula*

$$\underline{E}_n(X) = \operatorname{colim}_k \pi_{n+k}(E_k \wedge X)$$

onde o limite é determinado pelas aplicações

$$\pi_{n+k}(E_k \wedge X) \xrightarrow{\Sigma} \pi_{n+k+1}(\Sigma E_k \wedge X) \xrightarrow{\sigma_k \wedge \operatorname{id}_X} \pi_{n+k+1} E_{k+1} \wedge X.$$

*Note-se que estes limites estão definidos mesmo para  $n$  negativo. Note-se ainda que, por definição, a teoria de homologia generalizada determinada pelo espectro das esferas são os grupos de homotopia estáveis  $X \mapsto \pi_k^s(X)$ .*

**Teorema 7.7.** *Para qualquer complexo CW  $X$  e  $n > 0$ , há um isomorfismo natural*

$$H^n(X; G) = [X, K(G, n)]$$

*Proof.* Pela Proposição 7.4 os funtores

$$[-, K(G, n)]_*$$

formam uma teoria de cohomologia generalizada, que satisfaz obviamente o axioma wedge. Os coeficientes desta teoria são

$$[S^0, K(G, n)]_* = \begin{cases} G & \text{se } n = 0, \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Não é difícil demonstrar (ver [Ha, Theorem 4.59]) que uma teoria de cohomologia generalizada satisfazendo o axioma wedge e com os coeficientes concentrados em dimensão 0 é única a menos de isomorfismo natural, pelo que

$$H^n(X; G) \simeq [X, K(G, n)]_*.$$

Para  $n > 0$ ,  $K(G, n)$  é simplesmente conexo e portanto  $[X, K(G, n)] = [X, K(G, n)]_*$ , o que conclui a demonstração.  $\square$

**Exemplo 7.8.** Em particular temos para um complexo CW  $X$ ,

$$[X, \mathbb{C}P^\infty] = H^2(X; \mathbb{Z}).$$

Veremos mais tarde que o primeiro conjunto pode ainda identificar-se de forma natural com o conjunto das classes de isomorfismo de fibrados de linha complexos sobre  $X$ . Veremos assim que dar um fibrado linha sobre  $X$  é equivalente a dar uma classe de cohomologia em  $H^2(X)$  (que se chama a primeira classe de Chern do fibrado e que corresponde também à classe de Euler (ver Nota 6.103) determinada pela orientação canónica no fibrado de linha complexo.

Vamos agora obter uma caracterização importante do isomorfismo natural do Teorema 7.7 fazendo uso de um resultado elementar de teoria de categorias que desempenha um papel muito importante em várias áreas da Matemática (nomeadamente Topologia e Geometria Algébrica).

**Definição 7.9.** *Seja  $\mathcal{C}$  uma categoria. Um functor contravariante  $F : \mathcal{C}^{op} \rightarrow \text{Set}$  diz-se representável se existe  $C \in \mathcal{C}$  e uma bijecção natural*

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, C) \xrightarrow{\phi_X} F(X).$$

Nesse caso diz-se que  $C$  é um objecto classificante do functor  $F$ .

**Teorema 7.10** (Lema de Yoneda). *Seja  $F : \mathcal{C}^{op} \rightarrow \text{Set}$  um functor representável com objecto classificante  $C$  e  $G : \mathcal{C}^{op} \rightarrow \text{Set}$  um functor. Existe uma bijecção natural*

$$\text{Nat}(F, G) \xrightarrow{\Theta} G(C)$$

dada por<sup>52</sup>

$$\psi \mapsto \psi_C(\text{id}_C) \in G(C).$$

*Proof.* A aplicação  $\Theta$  é claramente natural.

Seja  $\psi : F \rightarrow G$  uma transformação natural. Dado  $f : X \rightarrow C$  em  $F(X)$  temos  $f = F(f)(\text{id}_C)$  e portanto pela definição de transformação natural temos necessariamente que

$$\psi_X(f) = G(f)(\psi_X(\text{id}_C))$$

o que mostra que  $\Theta$  é injectiva.

Por outro lado, dado um elemento  $x \in G(C)$  é fácil verificar que

$$\psi_X(f) = G(f)(x)$$

determina uma transformação natural  $\psi : F \rightarrow G$ , e portanto  $\Theta$  é sobrejectiva, o que conclui a demonstração.  $\square$

Conclui-se do Lema de Yoneda que o isomorfismo natural

$$[X, K(G, n)] \rightarrow H^n(X; G)$$

é determinado por uma classe

$$\alpha \in H^n(K(G, n); G)$$

chamada a *classe fundamental*. O isomorfismo associa a uma classe de homotopia  $[f] : X \rightarrow K(G, n)$  a classe  $f^*(\alpha) \in H^n(X; G)$ .

Pelo Teorema dos Coeficientes Universais temos um isomorfismo

$$H^n(K(G, n); n) = \text{Hom}(H_n(K(G, n); \mathbb{Z}), G) = \text{Hom}(G, G)$$

e considerações de naturalidade mostram facilmente que a classe fundamental  $\alpha$  se identifica necessariamente com um isomorfismo  $G \rightarrow G$ . Reciprocamente, qualquer isomorfismo  $G \rightarrow G$  corresponde a uma classe fundamental (uma vez que um isomorfismo de grupos determina uma equivalência de homotopia  $K(G, n) \rightarrow K(G, n)$  (conforme a demonstração da Proposição 5.57) e portanto um isomorfismo do functor representado por  $K(G, n)$ . A única escolha natural com respeito ao grupo  $G$  é no entanto  $\text{id}_G$ .

**Definição 7.11.** *Uma operação de cohomologia é uma transformação natural  $T_X : H^n(X; G) \rightarrow H^m(X; H)$ .*

<sup>52</sup>Onde para simplificar a notação identificamos  $F(X)$  com  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, C)$ , o que continuaremos a fazer durante a demonstração.

Pelo Lema de Yoneda, as operações de cohomologia identificam-se com elementos em

$$H^m(K(G, n); H),$$

ou equivalentemente com classes de homotopia de aplicações

$$K(G, n) \rightarrow K(H, m).$$

**Exemplo 7.12.** (a) Uma vez que  $K(G, n)$  é  $(n - 1)$ -conexo, não existe nenhuma forma natural (não trivial) de associar a uma classe de cohomologia de grau  $n$  uma classe de cohomologia de grau mais baixo.

(b) Dado um anel  $R$ , o produto cup  $\cup : H^n(X; R) \times H^m(X; R) \rightarrow H^{n+m}(X; R)$  identifica-se com uma classe de homotopia

$$K(R, n) \times K(R, m) \rightarrow K(R, n + m)$$

ou equivalentemente com uma classe de cohomologia  $\cup \in H^{n+m}(K(R, n) \times K(R, m); R)$ .

(c) A aplicação  $\cup^2 : K(\mathbb{Z}, 2) = \mathbb{C}P^\infty \rightarrow K(\mathbb{Z}, 4)$  que classifica o quadrado da classe fundamental em  $K(\mathbb{Z}, 2)$  (isto é, de um gerador de  $H^2(\mathbb{C}P^\infty; \mathbb{Z})$ ) classifica a operação de cohomologia

$$H^2(X; \mathbb{Z}) \rightarrow H^4(X; \mathbb{Z}) \quad x \mapsto x^2.$$

Note-se que  $\cup^2$  é uma aplicação que induz a aplicação nula nos grupos de homotopia mas que não é nulhomotópica.

**Nota 7.13.** *O estudo das operações de cohomologia é essencial para uma compreensão mais aprofundada da teoria de homotopia. Especialmente o estudo das operações  $H^*(X; \mathbb{Z}/p) \rightarrow H^*(X; \mathbb{Z}/p)$  que são estáveis (isto é que comutam com a suspensão). Estas operações formam uma álgebra que actua nos grupos de cohomologia mod  $p$  de qualquer espaço (ou espectro na realidade) e que se chama a álgebra de Steenrod (mod  $p$ ). É o estudo das propriedades desta álgebra (juntamente com a sucessão espectral de Serre) que permitiu a determinação da cohomologia dos espaços de Eilenberg-MacLane (por Cartan e Serre). A referência standard é [Ste2]. Ver também [Ha, 4.L].*

**Definição 7.14.** *Uma fibração  $p : E \rightarrow B$  diz-se principal se existe um diagrama comutativo a menos de homotopia*

$$\begin{array}{ccccc} E & \xrightarrow{p} & B & & \\ \downarrow \phi & & \downarrow \psi & & \\ X & \longrightarrow & Y & \longrightarrow & Z \end{array}$$

onde a linha inferior é uma sucessão de fibração e  $\phi, \psi$  são equivalências de homotopia fracas.

Assim uma fibração diz-se principal se a sucessão de fibração que determina "pode ser prolongada um termo para a direita". Note-se que a fibra de homotopia de uma fibração principal  $p$  é fracamente equivalente a um espaço de laços, o que é uma condição altamente restritiva.

**Proposição 7.15.**  $p : E \rightarrow B$  é uma fibração principal sse existe uma aplicação  $g : B \rightarrow Z$  tal que

$$\begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & * \\ \downarrow p & & \downarrow \\ B & \xrightarrow{g} & Z \end{array}$$

é um pull-back de homotopia fraco.

*Proof.* Se  $p$  é uma fibração principal, seja  $g$  a composta  $B \rightarrow Y \rightarrow Z$ . Por definição, de sucessão de fibração

$$\begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & * \\ \downarrow p & & \downarrow \\ Y & \longrightarrow & Z \end{array}$$

é um pullback de homotopia. O diagrama do enunciado é fracamente equivalente a este e é portanto um pullback de homotopia fraco.

Reciprocamente, se o diagrama do enunciado é um pullback de homotopia podemos tomar  $Y = B$ ,  $X = F_g$  (a fibra de homotopia de  $g$ , e para  $E \rightarrow X$  a aplicação canônica, que é por definição de pullback de homotopia fraco, uma equivalência fraca.  $\square$

**Lema 7.16.** Seja  $p : E \rightarrow B$  uma fibração e  $g : B \rightarrow K(G, n)$  tais que  $g \circ p \simeq *$ . As escolhas possíveis para a aplicação  $G : F \rightarrow K(G, n-1)$  induzidas nas fibras de homotopia

$$\begin{array}{ccccc} F & \xrightarrow{i} & E & \xrightarrow{p} & B \\ \downarrow G & & \downarrow & & \downarrow g \\ K(G, n-1) & \longrightarrow & * & \longrightarrow & K(G, n) \end{array}$$

são precisamente as classes de cohomologia  $G \in H^{n-1}(F; G)$  que transgridem para  $g \in H^n(B; G)$ .

*Proof.* A transgressão induz um isomorfismo  $H^{n-1}(K(G, n-1); G) \rightarrow H^n(K(G, n); G)$  que leva a classe fundamental na classe fundamental. Uma vez que a transgressão é natural, segue-se que  $g$  é necessariamente a imagem de  $G$  pela transgressão.

O núcleo da transgressão é precisamente a imagem de  $i^* : H^{n-1}(E; G) \rightarrow H^{n-1}(F; G)$ . Seja  $d : F \rightarrow \Omega K(G, n)$  tal que  $d = d' \circ i$  com  $d' : E \rightarrow \Omega K(G, n)$ . Se substituirmos a aplicação

$$H : E \rightarrow PK(G, n)$$

definida pela nulhomotopia de  $g \circ p$  por

$$H + d' : E \rightarrow PK(G, n)$$

onde  $(H + d')(e) = d'(e) * H(e)$  é definida pela acção (por concatenação) dos laços no espaço dos caminhos, obtemos ainda um diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{p} & B \\ \downarrow H+d' & & \downarrow g \\ PK(G, n) & \longrightarrow & K(G, n) \end{array}$$



e a aplicação induzida na fibra é então

$$G + d' \circ i = G + d: F \rightarrow K(G, n - 1).$$

Isto conclui a demonstração uma vez que  $d$  é uma classe arbitrária no núcleo da transgressão.  $\square$

**Lema 7.17.** *Seja  $n \geq 1$  e  $G$  abeliano. Uma fibração  $p : E \rightarrow B$  com fibra  $K = K(G, n)$  é principal sse  $\pi_1(B)$  age trivialmente em  $G = \pi_n(K)$ .*

*Proof.* Pela Proposição 7.15, se  $p$  é principal existe uma aplicação  $g$  tal que

$$\begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & * \\ \downarrow p & & \downarrow \\ B & \xrightarrow{g} & K(G, n + 1) \end{array}$$

é um pullback de homotopia fraco. A acção de monodromia é natural, e uma vez que  $K(G, n + 1)$  é simplesmente conexo, a acção é trivial na fibração da direita logo é também trivial na da esquerda.

Reciprocamente, se  $\pi_1(B)$  age trivialmente em  $\pi_n(K)$ , a aplicação de monodromia determinada por cada laço  $\gamma \in \pi_1(B)$ ,  $\tau_\gamma : K(G, n) \rightarrow K(G, n)$  é homotópica à identidade e portanto a fibração  $p : E \rightarrow B$  é orientável sobre  $G$ . Conclui-se da sucessão espectral de Serre que a classe fundamental da fibra  $\alpha \in H^n(K(G, n); n)$  é transgressiva. Seja  $g \in H^{n+1}(B; G)$  a imagem pela transgressão. Pelo Lema 7.16, o diagrama de fibrações comuta

$$\begin{array}{ccc} K(G, n) & \xrightarrow{\alpha} & K(G, n) \\ \downarrow & & \downarrow \\ E & \longrightarrow & * \\ \downarrow p & & \downarrow \\ B & \xrightarrow{g} & K(G, n + 1) \end{array}$$

Mas  $\alpha$  é uma equivalência de homotopia, logo o quadrado inferior é um pullback de homotopia fraco. Da Proposição 7.15, conclui-se que  $p : E \rightarrow B$  é uma fibração principal.  $\square$

**Teorema 7.18.** *Um espaço conexo por arcos  $X$  admite uma torre de Postnikov constituída por fibrações principais, sse  $\pi_1(X)$  age trivialmente em  $\pi_n(X)$  para todo o  $n > 1$ .*

*Proof.* Escrevendo  $X_n$  para o estágio  $n$  de Postnikov de  $X$  temos um diagrama

$$\begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & X_n \\ & \searrow & \downarrow q_n \\ & & X_{n-1} \end{array}$$

e podemos assumir que  $q_n$  é uma fibração (substituindo indutivamente as aplicações  $X_n \rightarrow X_{n-1}$  por fibrações da forma habitual). Pelo Lema 7.17 a fibração  $q_n$  é

principal sse  $\pi_1(X_{n-1})$  age trivialmente em  $\pi_n(K(\pi_n(X), n)) = \pi_{n+1}(X_{n-1}, X_n)$ . Uma vez que

$$\pi_1(X_n) \rightarrow \pi_1(X_{n-1})$$

é um isomorfismo, esta acção identifica-se (pela Nota 4.28) com a acção de  $\pi_1(X_n)$  em  $\pi_{n+1}(X_{n-1}, X_n)$ . Por sua vez o isomorfismo

$$\pi_{n+1}(X_{n-1}, X_n) \simeq \pi_n(K(\pi_n(X), n)) \rightarrow \pi_n(X_n)$$

e a naturalidade da acção identificam esta acção com a acção de  $\pi_1(X_n)$  em  $\pi_n(X_n)$ . A afirmação do enunciado é agora uma consequência imediata do facto de a aplicação

$$X \rightarrow X_n$$

ser uma  $(n+1)$ -equivalência, e da naturalidade da acção do grupo fundamental.  $\square$

Se  $X$  satisfaz as condições do Teorema anterior temos portanto um diagrama comutativo

$$(31) \quad \begin{array}{ccccc} & & \vdots & & \\ & & \downarrow & & \\ X & \xrightarrow{p_n} & X_n & \xrightarrow{k_{n+1}} & K(\pi_{n+1}(X), n+2) \\ & \searrow^{p_{n-1}} & \downarrow & & \\ & & X_{n-1} & \xrightarrow{k_n} & K(\pi_n(X), n+1) \\ & & \downarrow & & \\ & & \vdots & & \\ & & \downarrow & & \\ & & X_2 & \xrightarrow{k_3} & K(\pi_3(X), 4) \\ & \searrow^{p_2} & \downarrow & & \\ & & \vdots & & \\ & \searrow^{p_1} & X_1 = K(\pi_1(X), 1) & \xrightarrow{k_2} & K(\pi_2(X), 3) \\ & \searrow^{k_1} & & & \end{array}$$

onde cada sucessão

$$X_{n+1} \rightarrow X_n \rightarrow K(\pi_{n+1}, n+2)$$

é uma sucessão de fibração.

As aplicações  $k_n$  chamam-se os *invariantes-k* do espaço  $X$ . Trata-se da noção dual das aplicações de colagem das células numa decomposição celular do espaço. Tal como estas, as classes de homotopia das aplicações  $k_n$  não são únicas. Duas escolhas diferem num elemento do núcleo de

$$H^*(X_n; \pi_{n+1}X) \rightarrow H^*(X_{n+1}, K(\pi_{n+1}X, n+1); \pi_{n+1}X)$$

Portanto embora a torre de Postnikov seja functorial, os invariantes- $k$  não são functoriais.

A seguinte proposição permite-nos dividir o problema de construir uma aplicação para  $X$  a partir de um complexo celular numa sucessão de problemas de levantamento aos estágios de Postnikov de  $X$ .

**Proposição 7.19.** *Seja  $X_n \xrightarrow{q_n} X_{n-1}$  uma torre de fibrações, e  $p_n : X \rightarrow X_n$  tais que  $q_n \circ p_n = p_{n-1}$  e  $p_n$  é uma  $(n+1)$ -equivalência. Então a aplicação canônica*

$$p : X \rightarrow \lim X_n$$

*é uma equivalência fraca.*

*Proof.* Escrevemos  $\pi_k : \lim X_n \rightarrow X_k$  para as aplicações canônicas. Note-se que sendo  $p_n$  uma  $n$ -equivalência, as aplicações  $q_n$  são necessariamente  $(n-1)$ -equivalências.

A aplicação  $p_* : \pi_k(X) \rightarrow \pi_k(\lim X_n)$  é injectiva porque a composta  $p_{k*} = \pi_{k*} \circ p_*$  é um isomorfismo.

Seja  $\alpha : S^k \rightarrow \lim X_n$  uma aplicação que escrevemos

$$\alpha = (\alpha_n)$$

com  $\alpha_n : S^k \rightarrow X_n$ . Uma vez que  $p_k$  é uma  $(k+1)$ -equivalência, existe  $\beta : S^k \rightarrow X$  tal que

$$p_k \circ \beta \simeq \alpha_k.$$

Escrevamos  $(\beta_n)$  para a aplicação  $p \circ \beta : S^k \rightarrow \lim X_n$  de maneira que

$$\beta_n = p_n \circ \beta : S^k \rightarrow X_n.$$

Para mostrar a sobrejectividade da aplicação  $p_* : \pi_k(X) \rightarrow \pi_k(\lim X_n)$  vamos construir uma homotopia

$$H = (H_n) : S^k \times [0, 1] \longrightarrow \lim X_n$$

entre  $\alpha$  e  $p \circ \beta$ .

Por definição de  $\beta$ , temos uma homotopia  $H_k : S^k \times [0, 1] \rightarrow X_k$  com  $H(x, 0) = \beta_k$  e  $H(x, 1) = \alpha_k$  e compondo com as aplicações  $X_k \rightarrow X_s$  obtemos  $H_s$  para  $s \leq k$ . Consideremos agora o diagrama

$$\begin{array}{ccc} S^k \times \{0, 1\} & \xrightarrow{\beta_{k+1} \amalg \alpha_{k+1}} & X_{k+1} \\ \downarrow & \nearrow \tilde{H}_{k+1} & \downarrow q_{k+1} \\ S^k \times [0, 1] & \xrightarrow{H_k} & X_k \end{array}$$

Como  $q_{k+1}$  é uma  $(k+1)$ -equivalência, por HELP, existe uma aplicação  $\tilde{H}_{k+1}$  fazendo o triângulo de cima comutar e o triângulo de baixo comutar a menos de homotopia. Como  $q_{k+1}$  é uma fibração, a propriedade do levantamento das homotopias permite-nos achar  $H_{k+1}$  tal que

$$q_{k+1} \circ H_{k+1} = H_k.$$

Prosseguindo desta forma indutivamente, obtemos uma sucessão de aplicações  $H_n : S^k \times [0, 1] \rightarrow X_n$  com  $q_n \circ H_n = H_{n-1}$  que conjuntamente formam uma homotopia

$$H : S^k \times [0, 1] \rightarrow \lim X_n$$

entre  $\alpha$  e  $p \circ \beta$ , o que conclui a demonstração. □

O resultado anterior é também uma consequência imediata do seguinte exercício.

**Exercício 7.20** (Sucessão exacta de Milnor). *Seja  $G_n \xrightarrow{p_n} G_{n-1}$  uma torre de grupos. Defina-se o conjunto*

$$\lim^1 G_n = \left( \prod_n G_n \right) / \lim G_n.$$

Note-se que se os grupos  $G_n$  são abelianos,  $\lim^1 G_n$  é também um grupo abeliano<sup>53</sup>.

(a) Mostre que se  $X_n \xrightarrow{p_n} X_{n-1}$  é uma torre de fibrações entre espaços conexos por arcos, existe para cada  $k \geq 1$  uma sucessão exacta curta<sup>54</sup>

$$0 \rightarrow \lim^1 \pi_{k+1}(X_n) \rightarrow \pi_k(\lim X_n) \rightarrow \lim(\pi_k X_n) \rightarrow 0.$$

(b) (Critério de Mittag-Leffler) Mostre que se para cada  $n$  (ou equivalentemente, para  $n$  suficientemente grande) existe  $k(n)$  tal que para  $m > k(n)$  as imagens de  $G_m$  em  $G_n$  coincidem então  $\lim^1 G_n = 0$ .

Podemos agora demonstrar o resultado principal da teoria de obstrução.

**Teorema 7.21.** *Seja  $(B, A)$  um complexo CW relativo,  $X$  um espaço abeliano, e  $f : A \rightarrow X$  uma aplicação. Existe uma extensão de  $f$  a  $B$  sse certas classes de cohomologia<sup>55</sup> definidas indutivamente*

$$o_n(f) \in H^{n+1}(B, A; \pi_n(X))$$

se anulam.

*Proof.* Consideremos a torre de Postnikov de fibrações principais (31) de  $X$ . Seja  $i : A \rightarrow B$  inclusão. Durante a demonstração iremos usar o Teorema 7.7 para identificar classes de homotopia de aplicações para espaços de Eilenberg-MacLane com classes de cohomologia. Note-se que podemos supôr que todas as aplicações  $X_n \rightarrow X_{n-1}$  são fibrações e então qualquer levantamento a menos de homotopia de uma aplicação para  $X_{n-1}$  pode ser substituído por um levantamento estrito.

A demonstração do Teorema consiste em identificar as obstruções ao levantamento indutivo de uma extensão ao longo da torre de Postnikov. Podemos então aplicar a Proposição 7.19 e HELP, para obter a extensão desejada.

Existe uma aplicação  $g_1$  fazendo o seguinte diagrama comutar a menos de homotopia

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & X \\ \downarrow i & & \downarrow k_1 \\ B & \xrightarrow{g_1} & X_1 = K(\pi_1(X), 1) \end{array}$$

comutar sse a classe de cohomologia  $f^*(k_1) \in H^1(A; \pi_1(X))$  está na imagem de  $i^*$ . Considerando a sucessão exacta do par

$$H^1(X; \pi_1(X)) \xrightarrow{i^*} H^1(A; \pi_1(X)) \xrightarrow{\delta} H^2(X, A; \pi_1(X))$$

vemos que isso é verdade sse a classe

$$o_2(f) \stackrel{def}{=} \delta(f^*(k_1)) \in H^2(X, A; \pi_1(X))$$

se anula.

<sup>53</sup> $\lim^1$  é o functor derivado à direita do functor  $\lim$  da categoria de torres de grupos abelianos para a categoria dos grupos abelianos. Dada uma sucessão exacta curta de torres  $A_n \rightarrow B_n \rightarrow C_n$  temos uma sucessão exacta curta

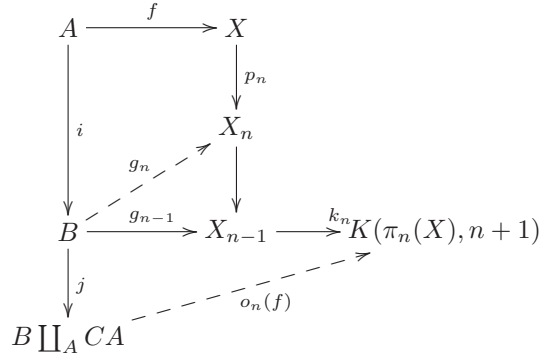
$$0 \rightarrow \lim A_n \rightarrow \lim B_n \rightarrow \lim C_n \rightarrow \lim^1 A_n \rightarrow \lim^1 B_n \rightarrow \lim^1 C_n \rightarrow 0$$

como o leitor pode facilmente verificar.

<sup>54</sup>A exactidão tem o sentido habitual no caso em que  $k = 1$ .

<sup>55</sup>Estas classes são chamadas *classes de obstrução*.

Suponhamos indutivamente que dispomos de uma aplicação  $g_{n-1} : B \rightarrow X_{n-1}$  fazendo o diagrama seguinte comutar.

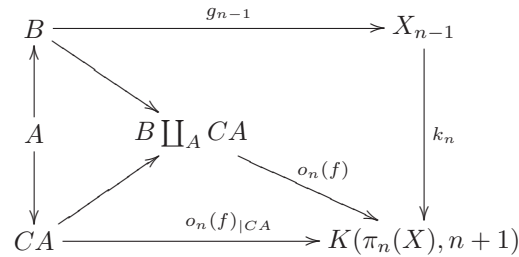


Como  $X_n \rightarrow X_{n-1} \rightarrow K(\pi_n(X), n+1)$  é nulhomotópica, uma escolha de nulhomotopia de  $k_n \circ g_{n-1} \circ i$  dá-nos uma extensão  $o_n(f)$  de  $k_n \circ g_{n-1}$  à cofibra de homotopia de  $i$ . Procuramos um levantamento  $g_n$  de  $g$  que faça o trapézio e o triângulo no diagrama ambos comutarem. A demonstração ficará concluída quando mostrarmos que este levantamento existe sse a aplicação  $o_n(f)$  é nula.

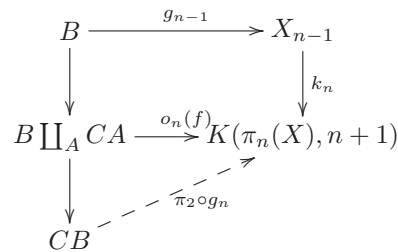
Podemos identificar  $X_n$  com a fibra de homotopia de  $k_n$ . Então

$$X_n \subset X_{n-1} \times \text{Map}_*([0, 1], K(\pi_n(X), n+1))$$

Por adjunção, a aplicação  $o_n(f)$  determina precisamente um levantamento de  $g_{n-1}|_A$  a  $X_n$ , isto é temos um diagrama



e o levantamento  $g_n$  existe sse pudermos completar o diagrama



onde  $\pi_2$  designa a projecção

$$X_{n-1} \times \text{Map}_*([0, 1], K(\pi_n(X), n+1)) \rightarrow \text{Map}_*([0, 1], K(\pi_n(X), n+1))$$

e não estamos a distinguir na notação uma aplicação da sua adjunta.

Claramente se  $\pi_2 \circ g_n$  existe,  $o_n(f) = 0$  porque  $CB$  é contráctil. Por outro lado se  $o_n(f) = 0$  a propriedade da extensão das homotopias do par  $(CB, B \coprod_A CA)$  permite-nos achar uma extensão de  $o_n(f)$  a  $CB$ . Isto conclui a demonstração.  $\square$

**Nota 7.22.** *Seria mais preciso falar de conjuntos de obstrução*

$$\{o_n\} \subset H^{n+1}(X, A; \pi_n(X))$$

em vez de classes de obstrução. De facto, apenas a classe de obstrução relativa ao primeiro grupo de obstrução não nulo está bem definida (chama-se a esta classe a obstrução primária). As classes seguintes dependem da classe de homotopia da escolha de cada levantamento e esta não é única em geral. Devemos assim considerar todos os levantamentos possíveis em cada estágio. O levantamento seguinte será possível se para algum deles a classe de obstrução determinada pelo levantamento se anular. Ficam assim definidos indutivamente conjuntos de obstrução  $\{o_n\}$  e a extensão de uma aplicação  $f : A \rightarrow X$  é possível sse todos eles contêm a classe nula (equivalentemente, se os conjuntos de obstrução estão definidos para todo o  $n \in \mathbb{N}$ ).

Um caso particular do Teorema 7.21 merece destaque.

**Corolário 7.23** (Obstruções à extensão de uma homotopia). *Seja  $X$  um espaço abeliano,  $(B, A)$  um complexo CW relativo e  $f, g : B \rightarrow X$  aplicações tais que  $f|_A \simeq g|_A$ . Então as obstruções à existência de uma homotopia entre  $f$  e  $g$  são classes*

$$o_n(f, g) \in H^n(B, A; \pi_n(X)).$$

*Proof.* Seja  $H : A \times [0, 1] \rightarrow X$  uma homotopia entre  $f|_A$  e  $g|_A$ . As aplicações  $f$  e  $g$  são homotópicas sse existe uma escolha de  $H$  tal que a aplicação

$$f \coprod_A H \coprod_A g : (B \times 0) \coprod_{A \times 0} (A \times [0, 1]) \coprod_{A \times 1} (B \times 1) \longrightarrow X$$

se estende a  $B \times [0, 1]$ . De acordo com o Teorema 7.21, estas obstruções estão em

$$H^{n+1}(B \times [0, 1], (B \times 0) \coprod_{A \times 0} (A \times [0, 1]) \coprod_{A \times 1} (B \times 1); \pi_n(X)) \simeq H^n(B, A; \pi_n(X)).$$

$\square$

**Corolário 7.24.** *Seja  $X$  um espaço abeliano,  $(B, A)$  um complexo CW relativo. Então*

- (i) *Se  $H^{n+1}(B, A; \pi_n(X)) = 0$ , qualquer aplicação  $A \rightarrow X$  se estende a  $B$ .*
- (ii) *Se  $H^n(B, A; \pi_n(X)) = 0$ , quaisquer extensões de uma aplicação  $f : A \rightarrow X$  a  $B$  são homotópicas relativamente a  $A$ .*

Uma outra consequência imediata do Teorema 7.21 é a seguinte generalização do Corolário 5.68.

**Corolário 7.25.** *Se  $X$  e  $Y$  são espaços abelianos e  $f : X \rightarrow Y$  induz um isomorfismo em homologia, então  $f$  é uma equivalência fraca.*

*Proof.* Podemos assumir que  $X$  e  $Y$  são complexos celulares. Substituindo  $Y$  pelo cilindro da aplicação  $f$  podemos assumir que  $f$  é uma inclusão. Por hipótese temos então

$$H^*(Y, X; \mathbb{Z}) = 0$$

e portanto pelo Corolário 7.23, existe uma extensão a  $Y$  da identidade em  $X$ .

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\text{id}} & X \\ \downarrow f & \nearrow r & \\ Y & & \end{array}$$

ou seja  $X$  é um retrato de  $Y$ . As obstruções à existência de uma homotopia entre  $f \circ r$  e  $\text{id}_Y$  estendendo a homotopia constante em  $X$  estão em

$$H^n(Y, X; \pi_n(Y)) = 0$$

logo  $r$  é um retrato por deformação. □

De acordo com o Exercício 4.24 um espaço dotado de uma multiplicação é abeliano, pelo que o resultado anterior inclui o seguinte resultado de aplicação frequente.

**Corolário 7.26.** *Uma aplicação contínua entre  $H$ -espaços que induz um isomorfismo em homologia é uma equivalência fraca.*

**Sistemas de Moore-Postnikov.** De forma inteiramente análoga ao tratamento das obstruções à extensão de uma aplicação podemos obter uma teoria de obstrução à existência de levantamentos

$$\begin{array}{ccc} & & X \\ & \nearrow & \downarrow f \\ A & \xrightarrow{f} & Y \end{array}$$

ou mais geralmetne levantamentos relativos

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{g} & X \\ \downarrow i & \nearrow f & \downarrow f \\ B & \longrightarrow & Y \end{array}$$

Para tal faz-se uso de uma versão relativa da torre de Postnikov chamada a *torre de Moore-Postnikov*.

**Proposição 7.27.** *Seja  $f : X \rightarrow Y$  uma aplicação com  $Y$  semi-localmente simplesmente conexo. Existe uma factorização*

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ & \searrow p_n & \nearrow q_n \\ & & X_n \end{array}$$

tal que

- $p_{n*} : \pi_k(X) \rightarrow \pi_k(X_n)$  é um isomorfismo para  $k < n$  e um epimorfismo para  $k = n$ ,
- $q_{n*} : \pi_k(X_n) \rightarrow \pi_k(Y)$  é um isomorfismo para  $k > n$  e um monomorfismo para  $k = n$ .





e do facto de  $F_n$  ser a secção de Postnikov de ordem  $n-1$  de  $F$  (a fibra de homotopia de  $f$ ) conclui-se que temos uma sucessão de fibração

$$K(\pi_n(F), n) \rightarrow X_{n+1} \rightarrow X_n.$$

**Definição 7.29.** Uma aplicação  $f : X \rightarrow Y$  entre espaços conexos por arcos com fibra de homotopia  $F$  diz-se simples se  $f_*(\pi_1(X))$  é um subgrupo normal de  $\pi_1(Y)$  com quociente abeliano e  $\pi_1(X)$  age trivialmente em  $\pi_n(F)$  para  $n \geq 0$ .

Na definição anterior, note-se que  $\pi_1(Y)/f_*(\pi_1(X)) = \pi_0(F)$ . A condição sobre o homomorfismo induzido por  $f$  garante que o revestimento associado ao subgrupo  $f_*(\pi_1(X))$  é um revestimento regular com grupo de transformações de revestimento abeliano. Um tal revestimento é a fibra de homotopia de uma aplicação para  $K(\pi_0(F); 1)$ . Os argumentos da demonstração do Teorema 7.18 permitem obter o seguinte resultado.

**Teorema 7.30.** Sejam  $X$  e  $Y$  espaços conexos e  $Y$  semilocalmente simplesmente conexo. Uma aplicação simples  $p : X \rightarrow Y$  admite uma torre de Moore-Postnikov de fibrações principais.

*Proof.* Exercício. □

Nas condições do Teorema anterior temos portanto um diagrama

$$(32) \quad \begin{array}{ccccc} & & \vdots & & \\ & & \downarrow & & \\ & & X_{n+1} & \xrightarrow{k_{n+1}} & K(\pi_{n+1}(F), n+2) \\ & \nearrow p_n & \downarrow & & \\ F & & X_n & \xrightarrow{k_n} & K(\pi_n(F), n+1) \\ & \searrow p_{n-1} & \downarrow & & \\ & & \vdots & & \\ & & X_1 & \xrightarrow{k_1} & K(\pi_1(F), 2) \\ & \searrow p_1 & \downarrow & & \\ & & Y & \xrightarrow{k_0} & K(\pi_0(F), 1) \\ & \searrow f & & & \end{array}$$

Um argumento análogo ao do Teorema 7.21 dá-nos agora o Teorema fundamental da Teoria de Obstrução.

**Teorema 7.31.** Seja  $(B, A)$  um complexo CW relativo,  $p : X \rightarrow Y$  uma aplicação simples entre espaços conexos por arcos e  $F$  a fibra de homotopia de  $p$ . Dado um diagrama comutativo,

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & X \\ i \downarrow & \nearrow s & \downarrow p \\ B & \xrightarrow{g} & Y \end{array}$$

existe uma aplicação  $s$  fazendo o diagrama comutar a menos de homotopia sse certas classes de obstrução definidas indutivamente para  $n \geq 0$ ,

$$o_n(f) \in H^{n+1}(B, A; \pi_n(F))$$

se anulam.

*Proof.* Exercício. □

Uma caso particular importante do teorema anterior é o caso em que  $A = \emptyset$ . Nesse caso, as obstruções chamam-se *obstruções ao levantamento* da aplicação  $g$  e estão em

$$H^{n+1}(B; \pi_n(F)).$$

Se além disso, a aplicação  $g: B \rightarrow Y$  é a aplicação identidade, as obstruções anteriores são as *obstruções à existência de uma secção* da aplicação  $p$ , que estão em

$$H^{n+1}(Y; \pi_n(F)).$$

Observações análogas ao Corolário 7.23 são também válidas na presente situação. Em particular destacamos o seguinte corolário.

**Corolário 7.32.** *Se  $p: X \rightarrow Y$  é uma fibração sobre um complexo CW com fibra contráctil,  $p$  admite uma secção e duas secções são homotópicas enquanto secções.*

**Exercício 7.33.** *Mostre que nas condições do Corolário 7.32 o espaço das secções de  $p$  é fracamente contráctil.*

**Exemplo 7.34.** Seja  $M$  uma variedade orientável de dimensão  $n \geq 2$ . Escolhendo uma métrica sobre  $M$  temos o fibrado das esferas tangentes unitárias

$$S^{n-1} \rightarrow E \xrightarrow{p} M.$$

O fibrado  $E$  admite uma secção sse o fibrado tangente a  $M$  admite uma secção que nunca se anula. A orientabilidade de  $M$  é equivalente à trivialidade da acção de  $\pi_1(E)$  em  $\pi_{n-1}(S^{n-1})$  (exercício). De acordo com o Teorema 7.31 neste caso temos uma única obstrução à existência de uma secção de  $p$  (a obstrução primária) que está em

$$H^n(M; \pi_{n-1}(S^{n-1})) = H^n(M; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}.$$

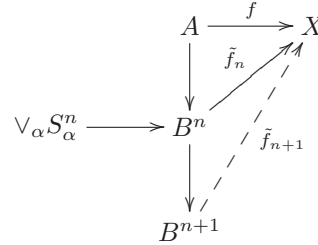
É um bom exercício identificar esta classe de obstrução com a classe de Euler do fibrado tangente de  $M$  (cf. Nota 6.103)<sup>56</sup>. O inteiro a que corresponde é a característica de Euler de  $M$ .

**Exercício 7.35.** *Mostre a unicidade das aplicações  $p_n$  na torre (32).*

---

<sup>56</sup>Mais geralmente, a obstrução primária à existência de uma secção que nunca se anula de um fibrado vectorial orientável é a classe de Euler.

**Formulação dual da Teoria de Obstrução.** Há uma formulação dual da Teoria de Obstrução que descrevemos brevemente no caso da obstrução à extensão de uma aplicação. Para mais detalhes ver [Wh2, VI.5] ou [HuS]. Seja  $(B, A)$  um complexo CW relativo e designemos por  $B^n$  o esqueleto relativo de dimensão  $n$ . Consideremos o problema de estender indutivamente uma aplicação  $f: A \rightarrow X$  aos esqueletos  $B^n$ :



Claramente é possível estender a aplicação  $\tilde{f}_n$  a uma célula  $e_{\alpha}^{n+1}$  sse o elemento de  $\pi_n(X)$  representado pela composição

$$g_{\alpha}: S_{\alpha}^n \rightarrow B^n \xrightarrow{\tilde{f}_n} X$$

se anula. No entanto, o ponto de base com respeito ao qual consideramos  $\pi_n(X)$  varia com a célula! Se  $X$  é um espaço abeliano, podemos arbitrar um ponto de base  $* \in X$  e uma vez que dispomos de isomorfismos canônicos de  $\pi_n(X, *)$  com  $\pi_n(X, x)$  para todo o  $x \in X$ , vemos que a aplicação  $\tilde{f}_n$  se estende a  $B^{n+1}$  sse a cadeia celular

$$c_{n+1}(\tilde{f}_n) \in C^{n+1}(B, A; \pi_n(X, *))$$

determinada pela fórmula

$$[e_{\alpha}^{n+1}] \mapsto [g_{\alpha}] \in \pi_n(X, *)$$

é identicamente nula.<sup>57</sup> É possível verificar que  $c_{n+1}(\tilde{f}_n)$  é na realidade um cociclo celular (exercício) e que fica assim definida uma classe de cohomologia

$$o_{n+1} \in H^{n+1}(B, A; \pi_n(X)).$$

Considerando a sucessão de cofibração

$$\vee_{\beta} S_{\beta}^{n-1} \rightarrow B^{n-1} \rightarrow B^n \rightarrow \vee_{\beta} S_{\beta}^n$$

vemos que (para  $X$  abeliano) há uma acção natural de

$$C^n(B, A; \pi_n(X)) \simeq [\vee_{\beta} S_{\beta}^n, X]_*$$

na classe de homotopia  $[\tilde{f}_n] \in [B^n, X]$ , e não é difícil verificar que se  $g \in C^n(B, A; \pi_n(X))$  temos

$$c_{n+1}(\tilde{f}_n + g) = c_{n+1}(\tilde{f}_n) + \delta(g) \in C^{n+1}(B, A; \pi_n(X)).$$

Conclui-se que é possível estender a aplicação  $\tilde{f}_n$  ao esqueleto  $B^{n+1}$  alterando-a nas células de dimensão  $n$  sse a classe de cohomologia  $o_{n+1} \in H^{n+1}(B, A; \pi_n(X))$  se anula.

É possível identificar as obstruções obtidas desta forma com as definidas acima usando o sistema de Postnikov quando  $X$  é simples. Para  $X$  arbitrário o processo que acabámos de descrever dá-nos classes de obstrução em cohomologia com coeficientes locais. As obstruções ao levantamento podem ser tratadas de forma análoga.

<sup>57</sup> Se  $X$  não é abeliano, obtemos de qualquer forma uma cadeia celular com coeficientes no sistema de coeficientes locais em  $B$  formado pelos grupos  $\{\pi_n(X, g_{\alpha}(*))\}$  (conforme [Wh2]).

Finalmente mencionamos que é possível dar um tratamento da teoria de obstrução via "sistemas de Moore-Postnikov" para espaços (ou mais geralmente aplicações) arbitrários. Nesse caso é necessário substituir espaços de Eilenberg-MacLane por espaços que classificam (na categoria de homotopia dos espaços sobre  $K(\pi_1(X), 1)$ ) a cohomologia com coeficientes locais. Estes espaços são fibrações sobre  $K(\pi_1(X), 1)$  com fibra  $K(\pi_n(X), n)$  em que a acção de monodromia coincide com a acção de  $\pi_1(X)$  em  $\pi_n(X)$ . Ver [Ro] para mais detalhes.

## 8. FIBRADOS, CLASSES CARACTERÍSTICAS E $K$ -TEORIA.

Nesta secção explicamos a classificação de fibrados e usamo-la para estudar classes características e alguns elementos de  $K$ -teoria. Boas referências para a classificação de fibrados são [Ste] e [Hu]. Para classes características, é impossível melhorar a exposição em [MiS] e para  $K$ -teoria recomenda-se o clássico [At] ou [Hu].

**Definições e exemplos.** Começamos por dar as definições básicas de fibrado e morfismo entre fibrados e ver alguns exemplos.

**Definição 8.1.** *Seja  $G$  um grupo topológico e  $F$  um  $G$ -espaço<sup>58</sup> com a acção de  $G$  efectiva<sup>59</sup>. Um fibrado com fibra típica  $F$  e grupo estrutural  $G$  é um triplo  $\xi = \{p : E \rightarrow B, F, G\}$  tal que existe uma cobertura aberta  $\{U_\alpha\}$  de  $B$  e homeomorfismos (chamados trivializações locais)*

$$\phi_\alpha : U_\alpha \times F \rightarrow p^{-1}(U_\alpha)$$

satisfazendo

- (i)  $p(\phi_\alpha(x, y)) = x$ ,
- (ii) *Existem aplicações contínuas  $g_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \rightarrow G$  chamadas aplicações de transição tais que a composta*

$$(U_\alpha \cap U_\beta) \times F \xrightarrow{\phi_\beta^{-1} \circ \phi_\alpha} (U_\alpha \cap U_\beta) \times F$$

é dada por

$$(33) \quad (x, y) \mapsto (x, g_{\alpha\beta}(x) \cdot y).$$

A condição sobre a efectividade da acção de  $G$  em  $F$  é uma mera questão de conveniência e não implica qualquer perda de generalidade. Qualquer acção de  $G$  num espaço  $F$  corresponde a uma única acção efectiva (do quociente de  $G$  pelo subgrupo normal fechado de  $G$  que fixa todos os pontos de  $F$ ).

Na definição de fibrado dada anteriormente (Definição 3.34) não havia qualquer referência a um grupo estrutural. No entanto, por adjunção, dar uma aplicação invertível

$$(U_\alpha \cap U_\beta) \times F \rightarrow (U_\alpha \cap U_\beta) \times F$$

sobre  $U_\alpha \cap U_\beta$  é equivalente<sup>60</sup> a dar uma aplicação contínua

$$g_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \rightarrow \text{Homeo}(F)$$

<sup>58</sup>Um  $G$ -espaço é um espaço dotado de uma acção (contínua) de  $G$  à esquerda  $G \times X \rightarrow X$  notada  $(g, x) \mapsto g \cdot x$ .

<sup>59</sup>Uma acção diz-se efectiva se o único elemento de  $G$  que age como a aplicação identidade é o elemento neutro de  $G$ .

<sup>60</sup>Se  $F$  for localmente compacto e Hausdorff, ou para  $F$  arbitrário se trabalharmos numa categoria adequada de espaços topológicos.

onde  $\text{Homeo}(F)$  denota o grupo topológico de homeomorfismos de  $F$  com a topologia compacta-aberta. Assim, a Definição 3.34 coincide na nova terminologia com a definição de um fibrado com fibra típica  $F$  e grupo estrutural  $\text{Homeo}(F)$ .

Finalmente, observemos que como a acção de  $G$  sobre  $F$  é efectiva, as aplicações de transição são univocamente determinadas por uma cobertura trivializante, isto é, a aplicação  $g_{\alpha\beta}$  em (33) é única. Em particular, para todo o  $x \in U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma$  temos a seguinte condição

$$(34) \quad g_{\beta\gamma}(x)g_{\alpha\beta}(x) = g_{\alpha\gamma}(x)$$

que se chama a **condição de cociclo**. Em particular, note-se que

$$g_{\alpha\alpha}(x) = e$$

é a aplicação constante igual ao elemento neutro de  $G$  e portanto

$$g_{\alpha\beta}(x) = g_{\beta\alpha}(x)^{-1}.$$

Reciprocamente, seja  $\{U_\alpha\}$  uma cobertura aberta de  $X$  e

$$g_{\alpha\beta}: U_\alpha \cap U_\beta \rightarrow G$$

uma família de aplicações contínuas satisfazendo a condição (34). Então, dado um  $G$ -espaço  $F$  com acção efectiva de  $G$ , podemos definir

$$E = \left( \coprod_{\alpha} U_\alpha \times F \right) / \sim$$

onde  $\sim$  é a relação de equivalência determinada por

$$U_\beta \times F \ni (x, y) \sim (x, g_{\alpha\beta}(x)y) \in U_\alpha \times F \quad \text{para } x \in U_\alpha \cap U_\beta.$$

Note-se que sendo a acção de  $G$  em  $F$  efectiva, a relação  $\sim$  é uma relação de equivalência sse as aplicações  $g_{\alpha\beta}$  satisfazem (34).

Há uma projecção natural

$$p: E \rightarrow B$$

determinada pela equação

$$p|_{U_\alpha \times F} = i_\alpha \circ \pi_1,$$

onde  $i_\alpha: U_\alpha \rightarrow X$  é a inclusão e  $\pi_1$  designa a projecção no primeiro factor, e é fácil verificar (exercício) que  $\{p: E \rightarrow B, F, G\}$  é um fibrado com fibra  $F$  e grupo estrutural  $G$ .

**Exemplo 8.2.** (i) Um *fibrado vectorial* é um fibrado com fibra  $\mathbb{R}^n$  e grupo estrutural  $GL(n; \mathbb{R})$ . De facto, neste caso a estrutura canónica de adição e multiplicação por escalar em  $\mathbb{R}^n$  determina uma tal estrutura nas fibras por meio das trivializações locais, que está bem definida porque são preservadas pelas aplicações de transição.

(ii) Um *fibrado vectorial com uma métrica* é um fibrado com fibra  $\mathbb{R}^n$  e grupo de estrutura  $O(n)$ . De facto um tal fibrado dispõe de uma métrica em cada fibra induzida pela métrica canónica em  $\mathbb{R}^n$  através das trivializações locais. Reciprocamente, dada uma métrica em  $p: E \rightarrow B$ , as trivializações locais

$$\phi_\alpha: U_\alpha \times \mathbb{R}^n \rightarrow p^{-1}(U_\alpha)$$

induzem uma métrica  $h_\alpha$  no fibrado trivial sobre  $U_\alpha$  e não é difícil ver (exercício) que existe uma aplicação contínua

$$\lambda: U_\alpha \rightarrow GL(n; \mathbb{R})$$

tal que a aplicação  $\psi_\alpha: U_\alpha \times \mathbb{R}^n \rightarrow U_\alpha \times \mathbb{R}^n$  dada por

$$(x, y) \mapsto (x, \lambda(x)y)$$

é uma isometria entre a métrica canónica do lado esquerdo e a métrica  $h_\alpha$  do lado direito. As novas trivializações locais  $\phi_\alpha \circ \psi_\alpha$  determinam então uma estrutura de fibrado com grupo estrutural  $O(n)$  em  $p: E \rightarrow B$ .

**Definição 8.3.** *Sejam  $\xi_i = \{p_i: E_i \rightarrow B_i, F, G\}$  com  $i = 0, 1$  fibrados com fibra  $F$  e grupo estrutural  $G$ . Um morfismo  $f: \xi_0 \rightarrow \xi_1$  é um par de aplicações  $(f, \bar{f})$  fazendo o diagrama comutar<sup>61</sup>*

$$\begin{array}{ccc} E_0 & \xrightarrow{f} & E_1 \\ \downarrow p_0 & & \downarrow p_1 \\ B_0 & \xrightarrow{\bar{f}} & B_1 \end{array}$$

e tal que dado  $x \in B_0$  e trivializações locais

$$\phi: U \times F \rightarrow p_0^{-1}(U) \quad \psi: V \times F \rightarrow p_1^{-1}(V)$$

com  $x \in U$  e  $\bar{f}(x) \in V$ , existe uma função contínua

$$\lambda: (U \cap \bar{f}^{-1}(V)) \rightarrow G$$

tal que a composição

$$(U \cap \bar{f}^{-1}(V)) \times F \xrightarrow{\psi^{-1} \circ \phi} V \times F$$

é dada pela expressão

$$(x, y) \mapsto (\bar{f}(x), \lambda(x) \cdot y).$$

Dois fibrados com a mesma base dizem-se isomorfos se existe um morfismo  $(f, \text{id}_B)$  entre eles.

Com a definição de morfismo de fibrado acima, todos os morfismos de fibrados são essencialmente dados pela seguinte construção, como explica o Exercício 8.5.

**Definição 8.4.** *Seja  $\xi = \{p: E \rightarrow B, F, G\}$  um fibrado e  $g: A \rightarrow B$  uma aplicação contínua. O pullback de  $\xi$  por  $g$  é o fibrado*

$$g^*\xi = \{\pi_1: A \times_B E \rightarrow A, F, G\}.$$

**Exercício 8.5.** *Seja  $\xi = \{p: E \rightarrow B, F, G\}$  e  $g: A \rightarrow B$  uma aplicação contínua.*

- (a) *Mostre que  $g^*\xi$  é de facto um fibrado com fibra  $F$  e grupo estrutural  $G$ .*  
 (b) *Mostre que sendo  $(f, \bar{f}): \xi_1 \rightarrow \xi_2$  é um morfismo de fibrados, existe um isomorfismo canónico*

$$\xi_1 \xrightarrow{\cong} \bar{f}^*(\xi_2).$$

Dados dois fibrados  $\xi = \{p: E \rightarrow B, F, G\}$  e  $\eta = \{q: X \rightarrow A, F, G\}$ , sendo  $\{U_\alpha\}$  uma cobertura de  $B$  que trivializa  $\xi$  e  $\{V_\gamma\}$  uma cobertura de  $A$  que trivializa  $\eta$ , um morfismo

$$f: \xi \rightarrow \eta$$

é determinado por aplicações

$$\lambda_{\alpha\gamma}: U_\alpha \cap \bar{f}^{-1}(V_\gamma) \rightarrow G$$

<sup>61</sup>Note-se que  $f$  determina  $\bar{f}$  daí denotar o morfismo apenas por  $f$ .

como na Definição (que são únicas uma vez que a acção de  $G$  em  $F$  é efectiva). Sendo  $g_{\alpha\beta}$  e  $h_{\gamma\delta}$  as aplicações de transição para os fibrados  $\xi$  e  $\eta$  respectivamente, estas aplicações satisfazem a condição

$$(35) \quad h_{\gamma\delta}(\bar{f}x)\lambda_{\alpha\gamma}(x) = \lambda_{\beta\delta}(x)g_{\alpha\beta}(x) \quad \text{para } x \in U_\alpha \cap U_\beta \cap \bar{f}^{-1}(V_\delta \cap V_\gamma).$$

Reciprocamente, dadas aplicações  $\lambda_{\alpha\gamma}$  satisfazendo (35) é fácil verificar que estas definem um morfismo de fibrados.

O caso de isomorfismos de fibrados é particularmente importante. Sejam  $\xi = \{p : E \rightarrow B, F, G\}$  e  $\eta = \{q : X \rightarrow B, F, G\}$  fibrados sobre a mesma base. Dadas coberturas que trivializam  $\xi$  e  $\eta$ , podemos intersectá-las para obter uma cobertura  $\{U_\alpha\}$  que trivializa os dois fibrados simultaneamente. Sendo  $\{g_{\alpha\beta}\}$  e  $\{h_{\alpha\beta}\}$  funções de transição para  $\xi$  e  $\eta$  respectivamente, a discussão do parágrafo anterior mostra que  $\xi$  e  $\eta$  são isomorfos sse existem funções

$$\lambda_\alpha : U_\alpha \rightarrow G$$

tais que

$$(36) \quad h_{\alpha\beta}(x) = \lambda_\beta(x)g_{\alpha\beta}(x)\lambda_\alpha^{-1}(x).$$

Se a relação (36) se verifica diz-se que os cociclos  $\{g_{\alpha\beta}\}$  e  $\{h_{\alpha\beta}\}$  são cohomólogos e podemos definir o conjunto de classes de equivalência

$$\hat{H}_{\{U_\alpha\}}^1(X; G) \stackrel{def}{=} \{g_{\alpha\beta} \text{ cociclo}\} / \sim.$$

Se  $\mathcal{V}$  é um refinamento de  $\mathcal{U}$ , há uma aplicação natural

$$\hat{H}_{\mathcal{U}}^1(X; G) \rightarrow \hat{H}_{\mathcal{V}}^1(X; G)$$

e definimos o conjunto de *classes de cohomologia de Čech* de  $X$  com coeficientes em  $G$  pela fórmula

$$\hat{H}^1(X; G) = \text{colim}_{\mathcal{U}} \hat{H}_{\mathcal{U}}^1(X; G).$$

A discussão anterior dá-nos assim uma primeira solução do problema de classificação de fibrados sobre um espaço  $X$ .

**Teorema 8.6.** *Seja  $G$  um grupo topológico e  $F$  um  $G$ -espaço efectivo. O conjunto das classes de isomorfismo de fibrados com grupo estrutural  $G$  e fibra típica  $F$  sobre  $X$  está em correspondência biunívoca com o conjunto*

$$\hat{H}^1(X; G).$$

Note-se que a classificação depende apenas do grupo estrutural e não da fibra considerada. De facto, há uma fibra de certa forma "universal" - o próprio grupo  $G$  com a acção dada pela multiplicação à esquerda, e qualquer fibrado determina e é determinado por um fibrado deste tipo da forma que agora descrevemos.

**Definição 8.7.** *Um fibrado com grupo estrutural  $G$  diz-se principal se a fibra típica é  $G$  e a acção de  $G$  sobre a fibra é a multiplicação  $G \times G \rightarrow G$  de  $G$ .*

Usaremos a notação abreviada  $\xi = \{p : E \rightarrow B, G\}$  para um fibrado principal.

**Proposição 8.8.** *Se  $\xi = \{p : E \rightarrow B, G\}$  é um fibrado principal,  $G$  age livremente à direita em  $E$  e  $p$  identifica-se naturalmente com a aplicação quociente  $E \rightarrow E/G$  desta acção.*

*Proof.* Sejam  $\phi_\alpha : U_\alpha \times G \rightarrow p^{-1}(U_\alpha)$  e  $\phi_\beta : U_\beta \times G \rightarrow p^{-1}(U_\beta)$  trivializações locais. Há uma acção de  $G$  à direita em  $p^{-1}(U_\alpha)$  dada por

$$\phi_\alpha(x, h) \cdot g = \phi_\alpha(x, hg).$$

Se  $x \in U_\alpha \cap U_\beta$  temos

$$\phi_\beta^{-1}\phi_\alpha(x, hg) = (x, g_\alpha\beta(x)hg) = \phi_\beta^{-1}\phi_\alpha(x, h) \cdot g,$$

e portanto esta acção está bem definida em  $E$ . Claramente trata-se de uma acção livre. Localmente a aplicação  $p$  é um produto e portanto uma aplicação quociente. Sendo a acção de  $G$  transitiva em cada fibra conclui-se que  $p^{-1}(U_\alpha)/G \simeq U_\alpha$ , e portanto  $E/G \simeq B$ .  $\square$

Na realidade, não há na prática grande distinção entre fibrados principais e acções livres de grupos topológicos.

**Definição 8.9.** *Seja  $X$  um  $G$ -espaço,  $x \in X$  e  $G_x = \{g \in G : g \cdot x = x\}$  o grupo de isotropia do ponto  $x$ . Uma fatia para a acção de  $G$  em  $x$  é um  $G_x$ -espaço  $S \subset X$  tal que a aplicação<sup>62</sup>*

$$G \times_{G_x} S \xrightarrow{a} X$$

*definida pela acção*

$$a([g, s]) = g \cdot s$$

*é um homeomorfismo sobre um aberto de  $X$ .*

A definição anterior foi feita para uma acção de  $G$  à esquerda mas é óbvio como modificá-la para uma acção à direita. Note-se aliás que as acções à direita e à esquerda estão em correspondência bijectiva natural via o antiautomorfismo canónico  $g \mapsto g^{-1}$  do grupo em questão.

**Proposição 8.10.** *Seja  $X$  um espaço com uma acção livre à direita do grupo topológico  $G$ . A aplicação quociente  $X \rightarrow X/G$  é um  $G$ -fibrado principal sse a acção de  $G$  em  $X$  tem uma fatia em cada ponto.*

*Proof.* Exercício.  $\square$

Em condições normais, existem fatias para acções.

**Teorema 8.11** (Palais). *Seja  $G$  um grupo de Lie e  $X$  um espaço completamente regular<sup>63</sup>. Se  $G$  age em  $X$  e para cada  $x \in X$  existe uma vizinhança  $U$  de  $x$  tal que o conjunto  $\{g \in G : g \cdot U \cap U \neq \emptyset\}$  tem fecho compacto em  $G$ , então existe uma fatia para a acção de  $G$  em cada ponto  $x \in X$ .*

*Proof.* Ver [Pa].  $\square$

**Nota 8.12.** *Note-se que a condição sobre  $G$  no teorema anterior é automática se  $G$  é compacto (nesse caso o Teorema acima deve-se a Mostow). A demonstração do Teorema anterior para grupos de Lie compactos e para acções livres é mais simples e deve-se a Gleason [G1].*

Para  $F$  um  $G$ -espaço com acção efectiva, vamos agora estabelecer uma correspondência bijectiva entre classes de isomorfismo de  $G$ -fibrados principais e  $G$ -fibrados com fibra típica  $F$ .

<sup>62</sup>Recorde que  $G \times_H S \stackrel{def}{=} G \times S / \sim$  onde  $(gh, s) \sim (g, hs)$  para  $h \in H$ .

<sup>63</sup>Recorde-se que um espaço é completamente regular se é Hausdorff e dado  $x \in X$ ,  $F \subset X$  fechado com  $x \notin F$  existe  $f : X \rightarrow [0, 1]$  contínua com  $f(F) = 0$  e  $f(x) = 1$ .



**Proposição 8.13.** *Seja  $\xi = (p : E \rightarrow B, G)$  um fibrado principal e  $F$  um  $G$ -espaço. Seja  $K = \{g \in G : g \cdot x = x \text{ para todo } x \in X\}$ . A aplicação*

$$q : E \times_G F \rightarrow B$$

*definida pela expressão*

$$q([e, y]) = p(e)$$

*define um fibrado  $\xi[F]$  com grupo de estrutura  $G/K$  e fibra  $F$  chamado o fibrado associado a  $\xi$  com fibra  $F$ . Se  $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}$  é uma cobertura que trivializa  $\xi$ , então  $\mathcal{U}$  trivializa também  $\xi[F]$  e as funções de transição de  $\xi[F]$  obtêm-se das de  $\xi$  compondo-as com o homomorfismo  $G \rightarrow G/K$ .*

*Proof.* Sejam  $\phi_\alpha : U_\alpha \times G \rightarrow p^{-1}(U_\alpha)$  trivializações locais de  $\xi$  e

$$g_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \rightarrow G$$

as aplicações de transição correspondentes. Notando que há um homeomorfismo canónico

$$G \times_G F = F$$

definido pela expressão  $[(g, y)] \mapsto gy$ , vemos que

$$\psi_\alpha = \phi_\alpha \times_G \text{id}_F : (U_\alpha \times G) \times_G F = U_\alpha \times F \longrightarrow p^{-1}(U_\alpha) \times_G F = q^{-1}(U_\alpha)$$

são homeomorfismos preservando a projecção na base. As aplicações

$$\psi_\beta^{-1} \circ \psi_\alpha : U_\alpha \times F \rightarrow U_\beta \times F$$

é então dada pela expressão

$$(x, y) \mapsto \psi_\beta^{-1}([\phi_\alpha(x, 1), y]) = [(x, g_{\alpha\beta}(x)1), y] = (x, g_{\alpha\beta}(x)y).$$

pelo que as aplicações de transição de  $q$  coincidem com as do fibrado  $\xi$  e em particular são contínuas.  $\square$

Uma boa maneira de pensar no fibrado associado  $\xi[F]$  é "o fibrado com as mesmas aplicações de transição que  $\xi$  e fibra  $F$ " embora isto só seja exacto, se a acção de  $G$  em  $F$  é efectiva.

Reciprocamente, podemos associar um fibrado principal a qualquer fibrado com fibra  $G$ . A maneira "livre de coordenadas" de fazer isto é a seguinte. Seja  $\xi = \{p : E \rightarrow B, F, G\}$  um fibrado e  $\tau = \{F \rightarrow *, F, G\}$  o fibrado (trivial) sobre um ponto. Para cada  $x \in B$ , o conjunto  $\text{Iso}(F, F_x)$  dos morfismos de fibrados

$$\begin{array}{ccc} F & \longrightarrow & E \\ \downarrow & & \downarrow \\ * & \xrightarrow{x} & B \end{array}$$

induzindo a inclusão do ponto  $x$  na base é um torsor<sup>64</sup> sobre  $G$ . O conjunto de todos os morfismos de fibrados

$$\text{Hom}(\tau, \xi) \subset \text{Top}(F, E)$$

dispõe de uma topologia natural (a topologia de subespaço determinada pela topologia compacta-aberta em  $\text{Top}(F, E)$ ), e há uma projecção natural

$$\text{Hom}(\tau, \xi) \rightarrow B$$

<sup>64</sup>Estamos a usar aqui a efectividade da acção.

definida por

$$f \mapsto \bar{f}(\ast) \in B.$$

**Proposição 8.14.** *Seja  $\xi = \{p : E \rightarrow B, F, G\}$  um fibrado. Se a topologia compacta-aberta em  $\text{Top}(F, F)$  induz a topologia de  $G$  e  $B$  é localmente compacto e Hausdorff<sup>65</sup>, então*

$$q : \text{Hom}(\tau, \xi) \rightarrow B$$

*é um  $G$ -fibrado principal, chamado o fibrado principal associado a  $\xi$ . Se  $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}$  é uma cobertura trivializante para  $\xi$ ,  $\mathcal{U}$  é também uma cobertura trivializante para  $q$  e as aplicações de transição dos dois fibrados coincidem.*

*Proof.* Exercício. □

Novamente, o fibrado associado é portanto "o fibrado principal com as mesmas funções de transição que  $\xi$ ".

**Nota 8.15.** *Se a condição sobre a topologia de  $G$  e  $B$  não se verificar, podemos à mesma construir um fibrado principal usando uma cobertura trivializante para  $\xi$  e as funções de transição de  $\xi$ , e chamamos então a este fibrado o fibrado principal associado a  $\xi$ .*

**Exemplo 8.16.** Se  $\xi = \{p : E \rightarrow B, \mathbb{R}^n, GL(n; \mathbb{R})\}$  é um fibrado vectorial e  $x \in B$  temos

$$\text{Iso}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}_x^n) = \{ \text{Referenciais na fibra } p^{-1}(x) \}$$

uma vez que os isomorfismos lineares entre  $\mathbb{R}^n$  e um espaço vectorial  $V$  se identificam canonicamente com os referenciais em  $V$ . É fácil ver que a topologia usual de  $GL(n; \mathbb{R})$  é a topologia induzida pela topologia compacta-aberta em  $\text{Top}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ . O fibrado principal associado a  $\xi$  chama-se usualmente o *fibrado dos referenciais*.

**Exercício 8.17.** *Seja  $\xi = \{p : E \rightarrow B, F, G\}$  um fibrado e  $\eta$  o fibrado principal associado. Mostre que há um isomorfismo canónico*

$$\eta[F] = \xi.$$

O seguinte resultado é uma consequência imediata do exercício anterior e das definições.

**Corolário 8.18.** *Dois fibrados  $\xi_i = \{p_i : E_i \rightarrow B, F, G\}$  com  $i = 1, 2$  são isomorfos sse os fibrados principais associados  $\eta_i$  são isomorfos.*

Este resultado diz-nos portanto que o problema de classificação de fibrados se reduz ao problema de classificação de fibrados principais.

Vamos agora considerar a functorialidade dos fibrados relativamente ao grupo estrutural. O seguinte resultado é claro.

**Lema 8.19.** *Seja  $\phi : H \rightarrow G$  um homomorfismo contínuo de grupos topológicos e  $\xi = \{p : E \rightarrow B, H\}$  um fibrado principal. Considerando a acção de  $H$  em  $G$  determinada pelo homomorfismo,  $\xi[G]$  é um  $G$ -fibrado principal.*

Note-se que as funções de transição de  $\xi[G]$  se obtêm das de  $\xi$  aplicando o homomorfismo  $\phi$ .

---

<sup>65</sup>Ou se usarmos uma categoria conveniente de espaços topológicos de modo a que a adjunção  $\text{Top}(X, \text{Top}(Y, Z)) = \text{Top}(X \times Y, Z)$  seja válida sem restrições.

**Definição 8.20.** *Seja  $\phi : H \rightarrow G$  um homomorfismo contínuo,  $\xi = \{p : E \rightarrow B, F, G\}$  um fibrado e  $\xi'$  o seu  $G$ -fibrado principal associado. Uma  $H$ -estrutura<sup>66</sup> em  $\xi$  é uma escolha de um  $H$ -fibrado principal  $\eta$  e um isomorfismo  $\eta\xi' \simeq \eta[G]$ . No caso em que  $\phi$  é a inclusão de um subgrupo de  $G$ , se  $\xi$  admite uma  $H$ -estrutura diz-se que  $\xi$  admite uma redução do grupo de estrutura a  $H$ .*

Em termos das funções de transição, uma  $H$ -estrutura é a factorização das funções de transição de  $\xi$  através do homomorfismo  $H \rightarrow G$  para alguma escolha de trivialização. Em particular, se  $H < G$ ,  $\xi$  admite uma redução ao grupo de estrutura  $H$  se existe uma trivialização local de  $\xi$  cujas funções de transição tomam valores no subgrupo  $H$ . Note-se ainda que, por definição, um  $G$ -fibrado admite uma  $H$ -estrutura sse o  $G$ -fibrado principal associado admite uma  $H$ -estrutura. Finalmente, observe-se que uma redução do grupo de estrutura ao subgrupo trivial é precisamente uma trivialização do fibrado em questão.

**Exemplo 8.21.** *Seja  $\xi = \{p : E \rightarrow B, \mathbb{R}^n, GL(n; \mathbb{R})\}$  um fibrado vectorial. Uma redução do grupo de estrutura a  $GL^+(n; \mathbb{R})$  identifica-se com uma escolha de orientação.*

De facto, se  $U \in H^n(E, E \setminus 0; \mathbb{Z})$  é uma orientação, e escolhidas trivializações locais

$$\phi_\alpha : V_\alpha \times \mathbb{R}^n \rightarrow p^{-1}(V_\alpha)$$

podemos (multiplicando-as se necessário por uma matrix de determinante  $-1$  em cada componente conexa dos  $V_\alpha$ ) obter novas trivializações  $\psi_\alpha$  tal que  $\psi_\alpha^*(U)$  é a orientação canónica. As aplicações de transição para os  $\psi_\alpha$  tomarão então valores em  $GL^+(n; \mathbb{R})$ .

Reciprocamente, uma redução do grupo de estrutura a  $GL^+(n; \mathbb{R})$  determina uma orientação: se  $\psi_\alpha$  são trivializações locais com aplicações de transição em  $GL^+(n; \mathbb{R})$ , então as orientações canónicas em  $U_\alpha$  de  $V_\alpha \times \mathbb{R}^n$  determinam orientações

$$\psi^{-1*}(U_\alpha) \in H^n(p^{-1}(V_\alpha), p^{-1}(V_\alpha) \setminus 0; \mathbb{Z})$$

que pela Proposição 6.99 coincidem nas intersecções  $p^{-1}(V_\alpha \cap V_\beta)$  e portanto (conforme a demonstração da Proposição 6.100) determinam uma orientação  $U \in H^n(E, E \setminus 0; \mathbb{Z})$ .

**Exemplo 8.22.** No Exemplo 8.2(ii) vimos essencialmente que um fibrado vectorial admite uma redução do grupo de estrutura a  $O(n)$  sse admite uma métrica.

**Exercício 8.23.** *Mostre que um fibrado vectorial  $\xi$  admite uma redução ao grupo  $GL(n; \mathbb{C}) \subset GL(n; \mathbb{R})$  sse existe um automorfismo  $J : \xi \rightarrow \xi$  com  $J^2 = -\text{id}_\xi$ . Tal  $J$  chama-se uma estrutura complexa em  $\xi$ .*

Dado um fibrado  $\xi = \{p : E \rightarrow B, F, G\}$  escrevemos

$$\Gamma(\xi) \stackrel{\text{def}}{=} \{s : B \rightarrow E \mid ps = \text{id}_B\}$$

para o espaço das secções (contínuas) de  $\xi$ .

**Proposição 8.24.** *Seja  $\xi = \{p : E \rightarrow B, G\}$  um fibrado principal e  $F$  um  $G$ -espaço. Há uma bijecção canónica*

$$\Gamma(\xi[F]) = \{f : E \rightarrow F \mid f(e \cdot g) = g^{-1} \cdot f(e)\}$$

<sup>66</sup>Mais precisamente devia chamar-se a isto uma  $\phi$ -estrutura, mas deixamos o homomorfismo  $\phi$  implícito.

*Proof.* Seja  $f : E \rightarrow F$  uma aplicação satisfazendo  $f(e \cdot g) = g^{-1} \cdot f(e)$ . Então a aplicação

$$S : E \rightarrow E \times_G F$$

definida por

$$S(e) = [e, f(e)]$$

é contínua e satisfaz  $S(eg) = S(e)$ . Uma vez que  $B$  é o espaço quociente de  $E$  pela acção de  $G$ ,  $S$  determina uma aplicação contínua  $s : B \rightarrow E \times_G F$ , que é claramente uma secção.

Reciprocamente, seja  $q : E \times_G F \rightarrow B$  a projecção de  $\xi[F]$ . Um conjunto de trivializações locais

$$\phi_\alpha : U_\alpha \times G \rightarrow p^{-1}(U_\alpha)$$

com funções de transição  $g_{\alpha\beta}(x)$  determina um conjunto de trivializações locais

$$\psi_\alpha : U_\alpha \times F \rightarrow q^{-1}(U_\alpha)$$

cujas funções de transição são ainda  $g_{\alpha\beta}(x)$ .<sup>67</sup> Uma secção

$$s : B \rightarrow E \times_G F$$

é determinada em termos das trivializações locais por aplicações

$$x \mapsto (x, s_\alpha(x)) \in U_\alpha \times F$$

satisfazendo

$$g_{\alpha\beta}(x)s_\alpha(x) = s_\beta(x)$$

Localmente podemos definir uma aplicação

$$U_\alpha \times G \xrightarrow{f_\alpha} F$$

pela equação

$$f_\alpha(x, g) = g^{-1}s_\alpha(x).$$

Como

$$f_\beta(x, g_{\alpha\beta}(x)g) = g^{-1}g_{\beta\alpha}(x)s_\beta(x) = g^{-1}s_\alpha(x),$$

estas funções determinam uma função  $f : E \rightarrow G$  e claramente  $f(ge) = g^{-1}f(e)$  uma vez que esta igualdade é satisfeita pelos  $f_\alpha$ .

É fácil verificar que as correspondências definidas acima são inversas o que conclui a demonstração.  $\square$

**Teorema 8.25.** *Seja  $\xi = \{p : E \rightarrow B, G\}$  um fibrado principal, e  $H < G$  um subgrupo fechado. Então  $\xi$  admite uma redução ao grupo de estrutura  $H$  sse  $\xi[G/H]$  admite uma secção. Em particular,  $\xi$  é trivial sse admite uma secção.*

*Proof.* Suponhamos que  $\xi$  admite uma redução do grupo de estrutura a  $H$ . Então existe uma trivialização de  $\xi$  sobre uma cobertura aberta  $\{U_\alpha\}$  de  $B$

$$\phi_\alpha : U_\alpha \times G \rightarrow p^{-1}(U_\alpha)$$

com aplicações de transição

$$g_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \rightarrow H.$$

Temos trivializações locais para  $\xi[G/H] = \{q : E \times_G G/H, G/H, G\}$

$$\psi_\alpha : U_\alpha \times G/H \rightarrow q^{-1}(U_\alpha)$$

<sup>67</sup>Mais precisamente as funções de transição são a composta de  $g_{\alpha\beta}(x)$  com a projecção de  $G$  no seu quociente que é o grupo de estrutura do fibrado  $\xi[F]$ .

definidas por

$$\psi_\alpha(x, gH) = [\phi_\alpha(x, g), eH]$$

As aplicações de transição para estas trivializações locais são as mesmas, e uma vez que  $H$  age trivialmente em  $G/H$ , a secção definida por

$$s(x) = \psi_\alpha(x, eH) \text{ se } x \in U_\alpha$$

está bem definida.

Reciprocamente, se  $s$  é uma secção, então pela Proposição 8.24 existe uma aplicação  $f : E \rightarrow G/H$  tal que  $f(eg) = g^{-1}f(e)$ . É fácil verificar que

$$p|_{f^{-1}(eH)} : f^{-1}(eH) \rightarrow B$$

é um  $H$ -fibrado principal  $\eta$  e que há um isomorfismo canónico  $\eta[G] \simeq \xi$  dado por

$$(e, g) \mapsto eg.$$

e portanto  $\xi$  admite uma redução do grupo de estrutura a  $H$ .  $\square$

Na realidade, com definições convenientes vê-se que o espaço das reduções de grupo de estrutura se identifica com o espaço das secções (exercício).

**Exemplo 8.26.** Seja  $Q \subset \mathbb{R}^{n^2}$  o espaço das matrizes simétricas definidas positivas (isto é o espaço das métricas em  $\mathbb{R}^n$ ). Qualquer matriz não singular  $A \in GL(n; \mathbb{R})$  admite uma decomposição polar única

$$A = BC$$

onde  $B \in Q$  e  $C \in O(n)$ . É fácil verificar que a aplicação

$$Q \times O(n) \rightarrow GL(n; \mathbb{R})$$

determinada pelo produto é um homeomorfismo (na realidade, um difeomorfismo). Conclui-se que

$$GL(n; \mathbb{R})/O(n) \simeq Q$$

é contráctil (note-se que  $Q$  é convexo). Portanto não há qualquer obstrução à existência de um fibrado com secção  $GL(n; \mathbb{R})/O(n)$  e pelo Teorema 8.25 vemos que qualquer fibrado com grupo estrutural  $GL(n; \mathbb{R})$  admite uma redução do grupo de estrutura a  $O(n)$ .

**Exemplo 8.27.** O espaço das estruturas complexas em  $\mathbb{R}^{2n}$  é o subespaço  $\{J \in GL(2n, \mathbb{R}) : J^2 = -\text{id}\}$ .  $GL(2n, \mathbb{R})$  age transitivamente neste espaço com grupo de isotropia  $GL(n; \mathbb{C}) < GL(2n; \mathbb{R})$  pelo que o espaço das estruturas complexas pode identificar-se com o espaço homogéneo

$$GL(2n, \mathbb{R})/GL(n, \mathbb{C}).$$

Dado um fibrado vectorial  $\eta$  com fibrado principal associado  $\xi$ , as secções do fibrado  $\xi[GL(2n, \mathbb{R})/GL(n, \mathbb{C})]$  identificam-se naturalmente com estruturas complexas no fibrado  $\eta$  conforme o Exercício 8.23.

Terminamos esta secção com um corolário do Teorema 8.25 que será utilizado na secção seguinte sobre a classificação de fibrados.

**Corolário 8.28.** *Sejam  $\xi_i = \{p_i : E_i \rightarrow B_i, G\}$  com  $i = 1, 2$  fibrados principais. Há uma bijecção canónica*

$$\text{Hom}(\xi_1, \xi_2) = \Gamma(\xi_1[E_2])$$

entre os morfismos de fibrados entre  $\xi_1$  e  $\xi_2$  e as secções do fibrado associado a  $\xi_1$  com fibra  $E_2$  em que a acção (à esquerda) de  $G$  sobre  $E_2$  é definida por  $g \cdot x \stackrel{\text{def}}{=} x \cdot g^{-1}$ .

*Proof.* Um morfismo  $f : \xi_1 \rightarrow \xi_2$  é precisamente uma aplicação  $G$ -equivariante  $f : E_1 \rightarrow E_2$ . Pela Proposição 8.24 estas identificam-se com secções do fibrado  $\xi_1[E_2]$ .  $\square$

**Classificação de fibrados.** O nosso objectivo seguinte é explicar que o functor contravariante

$$K_G : \text{Top} \rightarrow \text{Set}$$

que associa a um espaço  $X$  o conjunto

$$K_G(X) = \{\text{classes de isomorfismo de } G\text{-fibrados principais sobre } X\}$$

e uma aplicação contínua  $f$  a função definida pelo pullback de fibrados por  $f$  se factoriza pela relação de homotopia e é um functor representável na categoria de homotopia. Para que esta afirmação seja verdadeira é necessário restringir a classe de fibrados que consideramos. <sup>68</sup>

**Definição 8.29.** *Um fibrado diz-se enumerável se é trivializável sobre uma cobertura enumerável<sup>69</sup> da base.*

**Teorema 8.30.** *Seja  $\xi = \{p : E \rightarrow B, F, G\}$  um fibrado enumerável e  $f, g : A \rightarrow B$  aplicações homotópicas. Então  $f^*(\xi) \simeq g^*(\xi)$ .*

*Proof.* Basta-nos mostrar que se  $\eta$  é um  $G$ -fibrado sobre  $A \times [0, 1]$ , e  $i_k : A \times k \rightarrow A \times [0, 1]$  com  $k = 0, 1$  denotarem as inclusões, então

$$(37) \quad \eta \simeq \pi_1^*(i_1^*(\eta)).$$

Pois nesse caso, sendo  $H : A \rightarrow [0, 1]$  uma homotopia entre  $f$  e  $g$  temos

$$f^*(\xi) = i_0^*H^*(\xi) \simeq i_0^*\pi_1^*i_1^*H^*(\xi) = i_1^*H^*(\xi) = g^*(\xi).$$

Resta-nos portanto construir um morfismo de fibrados  $\eta \rightarrow \eta$  cobrindo  $i_1 \circ \pi_1$ . A construção é muito semelhante à usada na demonstração do Teorema 3.33.

Começamos por mostrar que (37) é verdade localmente, isto é, que se  $\eta$  é um fibrado enumerável sobre  $A \times [0, 1]$  então existe uma cobertura enumerável  $\{U_i\}$  de  $A$  tal que a restrição de  $\eta$  a  $U_i \times [0, 1]$  é trivial.

Seja  $\{V_\alpha\}$  uma cobertura enumerável de  $A \times [0, 1]$  tal que a restrição de  $\eta$  a cada  $V_\alpha$  é trivial e sejam  $\phi_\alpha : A \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  funções contínuas tais que  $\phi_\alpha^{-1}([0, 1]) = V_\alpha$ . Para cada  $n \in \mathbb{N}$  e  $\bar{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$  definimos a função  $\phi_{\bar{\alpha}} : A \rightarrow [0, 1]$  pela fórmula

$$\phi_{\bar{\alpha}}(x) = \prod_{i=1}^n \left( \min_{t \in [\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}]} \phi_{\alpha_i}(x, t) \right).$$

Estas aplicações são contínuas e escrevendo

$$\mathcal{U}_n = \{\phi_{\bar{\alpha}}^{-1}([0, 1])\}$$

<sup>68</sup>Esta restrição é uma questão técnica que não tem qualquer importância na prática.

<sup>69</sup>Ver Definição 3.30.

temos, pelo Lema 3.32(d) que

$$\mathcal{U} = \cup_n \mathcal{U}_n$$

admite um refinamento enumerável que continuaremos a denotar por  $\mathcal{U}$ .

Claramente se um fibrado sobre  $U \times [a, c]$  é trivial sobre  $U \times [a, b]$  e  $U \times [b, c]$  então é trivial, donde concluímos que para cada  $U_i \in \mathcal{U}$ , a restrição de  $\eta$  a  $U_i \times [0, 1]$  é trivial. Sejam

$$h_i: U_i \times [0, 1] \times G \rightarrow \eta|_{U_i \times [0, 1]}$$

isomorfismos e  $\{\psi_i: A \rightarrow [0, 1]\}$  uma partição da unidade subordinada à cobertura  $\{U_i\}$ . Vamos usar esta partição da unidade para combinar os isomorfismos  $h_i$  no isomorfismo desejado.

Escolhamos uma ordem total no conjunto dos índices  $i$ . Para cada  $i$  seja  $t_i: A \rightarrow [0, 1]$  a função definida por

$$t_i(a) = \sum_{j < i} \psi_j(a)$$

(contínua porque a soma é localmente finita). Dada uma função contínua  $s: A \rightarrow [0, 1]$  tal que  $s + \psi_i \leq 1$ , seja

$$G_s = \{(a, t): t \geq s(a)\} \subset A \times [0, 1].$$

Para cada  $i$  e cada função contínua definimos o morfismo de fibrados

$$\lambda_{i,s}: \eta|_{G_s} \rightarrow \eta|_{G_{s+\psi_i}}$$

pela expressão

$$\lambda(e) = \begin{cases} e & \text{se } \pi_1(p(e)) \notin U_i \\ h_i(a, \max\{s(a) + \psi_i(a), t\}, g) & \text{se } a \in U_i \text{ e } e = h_i(a, t, g) \end{cases}$$

Dado  $a \in A$  existe um aberto  $W$  que intersecta apenas um número finito de abertos  $U_{i_1}, \dots, U_{i_k}$  com  $i_1 < \dots < i_k$ . O isomorfismo pretendido  $\lambda: \eta \rightarrow \eta|_{A \times 1}$  é definido sobre  $A \times [0, 1]$  pela fórmula,

$$\lambda(e) = \lambda_{i_k, t_{i_k}} \circ \dots \circ \lambda_{i_1, 0}(e).$$

Fica como exercício verificar que  $\lambda$  está bem definido e é contínuo.  $\square$

O resultado anterior diz-nos que um fibrado enumerável  $\xi$  sobre  $B$  determina uma transformação natural de funtores contravariantes

$$(38) \quad T_\xi: [X, B] \rightarrow K_G(X)$$

definida por

$$T_\xi(f) = f^*(\xi).$$

**Definição 8.31.** Um fibrado  $\xi$  diz-se universal se  $T_\xi$  é um isomorfismo natural. Nesse caso a base de  $\xi$  chama-se o espaço classificante do grupo  $G$  e denota-se por  $BG$ . O espaço total do  $G$ -fibrado principal universal denota-se por  $EG$ .

Notemos que pelo argumento habitual (Lema de Yoneda), se um fibrado universal existe ele é único a menos de isomorfismo e  $BG$  é único a menos de equivalência de homotopia.

**Definição 8.32.** Um fibrado principal  $\xi$  diz-se  $n$ -universal se a transformação natural (38) é um isomorfismo para todos os fibrados de dimensão  $\leq n$ .

Note-se novamente que o Lema de Yoneda garante que o tipo de homotopia fraco da base de um fibrado  $\infty$ -universal está bem definido. Tomando uma aproximação celular podemos assumir que  $BG$  é um complexo celular. Usaremos a mesma notação

$$EG \rightarrow BG$$

para designar um fibrado  $\infty$ -universal.

O seguinte teorema dá um critério muito útil para que um fibrado principal seja  $n$ -universal.

**Teorema 8.33.** *Um fibrado principal  $\xi = \{p: E \rightarrow B, G\}$  é  $n$ -universal sse  $\pi_k(E) = 0$  para todo o  $k \leq n$ .*

*Proof.* Seja  $\xi = \{p: E \rightarrow B, G\}$  um fibrado com  $\pi_k(E) = 0$  para  $k \leq n$ . Vejamos que  $\xi$  é  $n$ -universal. Seja  $X$  um complexo celular de dimensão  $\leq n$  e  $\eta$  um  $G$ -fibrado principal sobre  $X$ . Pelo Corolário 8.28, dar um morfismo de fibrados principais  $\xi \rightarrow \eta$  equivale a dar uma secção de  $\eta[E]$ . Como  $\pi_k(E) = 0$  para  $k \leq n$  e  $X$  tem dimensão  $\leq n$ , não há obstruções à existência de uma secção. Isto mostra que a aplicação (38)

$$T_\xi: [X, B] \rightarrow K_G(X)$$

é sobrejectiva. Para ver que é injectiva, sejam  $f, g: X \rightarrow B$  aplicações contínuas,  $\eta_0 = f^*(\xi)$  e  $\eta_1 = g^*(\xi)$ , e  $\varphi: \eta_0 \rightarrow \eta_1$  um isomorfismo. Consideremos o fibrado sobre  $X \times [0, 1]$

$$\eta = f^*(\xi) \times [0, 1] = \pi^*(f^*(\xi))$$

onde  $\pi: X \times [0, 1] \rightarrow X$  designa a projecção. Sendo  $F: \eta_0 \rightarrow \xi$  e  $G: \eta_1 \rightarrow \xi$  as aplicações de fibrados que cobrem  $f$  e  $g$  respectivamente, temos um morfismo:

$$\begin{array}{ccc} f^*(\xi) \times \{0, 1\} & \xrightarrow{F \amalg G \circ \varphi^{-1}} & \xi \\ \downarrow & & \downarrow p \\ X \times \{0, 1\} & \xrightarrow{f \amalg g} & B \end{array}$$

que, pelo Corolário 8.28 corresponde a uma secção  $s$  de  $\eta[E]$  sobre  $X \times \{0, 1\}$ . Uma vez que  $\dim X \leq n$ , e  $\pi_k(E) = 0$  para  $k \leq n$ , não há qualquer obstrução a prolongar esta secção a  $X \times [0, 1]$ . Este prolongamento corresponde a um morfismo de fibrados

$$\eta \rightarrow \xi$$

que cobre uma homotopia entre  $f$  e  $g$ , o que mostra que  $T_\xi$  é injectiva.

Finalmente suponhamos que  $\xi = \{p: E \rightarrow B, G\}$  é  $n$ -universal. Tendo em conta a identificação entre morfismos e secções, vemos que todas as secções de um fibrado trivial  $\{\pi_1: S^k \times E \rightarrow S^k, G, E\}$  sobre  $S^k$  são homotópicas para  $k \leq n$ . Mas uma tal secção corresponde de forma natural a uma aplicação  $S^k \rightarrow E$  e portanto isto acontece sse  $\pi_k(E) = 0$  para  $k \leq n$ .  $\square$

De acordo com o resultado anterior, para determinar um fibrado  $n$ -universal basta, essencialmente, achar um espaço  $n$ -conexo com uma acção livre de  $G$ . Antes de vermos alguns exemplos vejamos algumas consequências do Teorema anterior.

**Proposição 8.34.** *Há uma equivalência de homotopia fraca entre  $G$  e  $\Omega BG$ .*



*Proof.* Uma vez que  $PBG$  é contráctil, o diagrama

$$\begin{array}{ccc} PBG & \xrightarrow{*} & EG \\ & \searrow \pi & \swarrow p \\ & & BG \end{array}$$

comuta a menos de homotopia. Uma vez que a aplicação  $p$  é uma fibração, a propriedade do levantamento das homotopias permite substituir a aplicação constante  $*$  por uma aplicação de fibrações  $f : PBG \rightarrow BG$ . Pela sucessão exacta longa de homotopia,  $f$  induz uma equivalência fraca entre as fibras  $\Omega BG$  e  $G$ .  $\square$

**Proposição 8.35.** *Seja  $G$  um grupo topológico e  $H < G$  um subgrupo tal que  $G \rightarrow G/H$  é um fibrado<sup>70</sup>. Então se  $\xi = \{EG \rightarrow BG, G\}$  é um fibrado  $\infty$ -universal,*

$$\xi[G/H] = \{EG \rightarrow EG/H, H\}$$

*é um fibrado  $\infty$ -universal. Em particular há uma sucessão de fibração natural*

$$G/H \rightarrow BH \rightarrow BG.$$

*Proof.* Exercício.  $\square$

**Exemplo 8.36** (O fibrado universal com grupo  $O(k)$  e  $GL(k)$ ). Seja  $V_{k,n}$  a variedade de Stiefel dos  $k$ -referenciais ortonormais em  $\mathbb{R}^n$ . Assim,

$$V_{k,n} = \{(v_1, \dots, v_k) \in (\mathbb{R}^n)^k : v_i \cdot v_j = 0 \text{ para } i \neq j, \|v_i\| = 1\}.$$

O grupo ortogonal  $O(n)$  age transitivamente em  $V_{k,n}$ , e sendo  $\{e_i\}$  a base canónica de  $\mathbb{R}^n$ , o grupo de isotropia de

$$(e_1, \dots, e_k) \in V_{k,n}$$

é o subgrupo  $O(n-k) \subset O(n)$  com inclusão determinada pela inclusão de  $\mathbb{R}^{n-k} \subset \mathbb{R}^n$  nas últimas coordenadas. Temos portanto uma bijecção contínua

$$O(n)/O(k) \rightarrow V_{k,n}$$

que é necessariamente um homeomorfismo. Há uma acção natural de  $O(k)$  em  $V_{k,n}$  correspondendo às mudanças de base no  $k$ -plano determinado por um referencial, que é claramente livre. Não é difícil ver (exercício) que há uma fatia para esta acção<sup>71</sup> e logo

$$V_{k,n} \rightarrow G_{k,n} \stackrel{def}{=} V_{k,n}/O(k)$$

é um  $O(k)$ -fibrado principal. O espaço  $G_{k,n}$  chama-se a *variedade de Grassmann* dos  $k$ -planos em  $\mathbb{R}^n$ .

Note-se que para  $k = 1$ , temos  $V_{1,n} = S^{n-1}$ ,  $O(1) = \mathbb{Z}/2$  e  $G_{1,n} = \mathbb{R}P^{n-1}$ .

As sucessões exactas longas das fibrações

$$O(n) \rightarrow O(n+1) \rightarrow V_{1,n+1} = S^n$$

mostram que as inclusões

$$O(n) \rightarrow O(n+1)$$

<sup>70</sup> $G \rightarrow G/H$  é um fibrado sse a acção de  $H$  em  $G$  por translacção à esquerda admite uma fatia. Por exemplo, se  $G$  é um grupo de Lie, esta condição é equivalente a  $H$  ser um subgrupo fechado - o que é sempre uma condição necessária.

<sup>71</sup>Isto é também uma consequência de  $O(k)$  ser um grupo de Lie compacto conforme a Nota 8.12.

são  $n - 1$ -equivalências. Conclui-se que  $O(n - k) \rightarrow O(n)$  é uma  $(n - k - 1)$ -equivalência e portanto, que

$$V_{k,n} = O(n)/O(n - k)$$

é  $(n - k - 1)$ -conexo. Do Teorema 8.33 conclui-se que

$$V_{k,n+k+1} \rightarrow G_{k,n+k+1}$$

é um  $O(k)$ -fibrado  $n$ -universal. Tomando o limite quando  $n \rightarrow \infty$  obtemos o  $O(k)$ -fibrado universal

$$V_{k,\infty} \rightarrow G_{k,\infty}$$

dos  $k$ -referenciais ortonormados em  $\mathbb{R}^\infty$  sobre o espaço dos  $k$ -planos em  $\mathbb{R}^\infty$ . Ou seja, com a notação acima, temos

$$EO(k) = V_{k,\infty} \quad BO(k) = G_{k,\infty}.$$

O Exemplo 8.26 sugere que não há qualquer diferença entre classificação de fibrados com grupo estrutural  $O(k)$  ou  $GL(k)$  e esse é de facto o caso. Podemos repetir toda a construção acima usando referenciais em vez de referenciais ortonormados. Sendo  $\bar{V}_{k,n} \subset \mathbb{R}^{nk}$  o espaço dos  $k$ -referenciais em  $\mathbb{R}^n$ ,  $GL(k)$  age livremente em  $\bar{V}_{k,n}$  com quociente  $G_{k,n}$ . É fácil ver directamente que esta acção admite uma fatia em cada ponto (estamos também nas condições do Teorema 8.11) e portanto o Teorema 8.33 garante que

$$\bar{V}_{k,\infty} \rightarrow G_{k,\infty}$$

é o  $GL(k)$ -fibrado universal. Assim,

$$BGL(k) \simeq BO(k).$$

Alternativamente, podíamos deduzir a equivalência da Proposição 8.35 e do facto de  $GL(k)/O(k)$  ser contráctil.

Note-se que o fibrado com fibra  $\mathbb{R}^k$  associado a estes fibrados universais é isomorfo ao *fibrado tautológico* que tem por fibra sobre  $S \in G_{k,\infty}$  o próprio subespaço vectorial  $S \subset \mathbb{R}^{infy}$  e que portanto este fibrado é o fibrado vectorial universal no sentido óbvio.

O caso particular  $k = 1$  do exemplo anterior merece um destaque particular. Um fibrado vectorial com fibra  $\mathbb{R}$  chama-se um *fibrado linha real*. De acordo com o exemplo anterior, o espaço classificante para os fibrados linha reais é  $G_{1,\infty} \simeq \mathbb{R}P^\infty \simeq K(\mathbb{Z}/2, 1)$ . Atendendo ao Teorema 7.7 dar um fibrado linha real sobre  $X$  equivale a dar uma classe de cohomologia  $x \in H^1(X; \mathbb{Z}/2)$ , nomeadamente o pullback do gerador de  $H^1(\mathbb{R}P^\infty; \mathbb{Z}/2)$  pela classe de homotopia

$$f: X \rightarrow K(\mathbb{Z}/2, 1)$$

que classifica o fibrado linha em questão. Esta classe chama-se a *classe de Stiefel-Whitney* do fibrado linha real  $\xi$  e nota-se  $w_1(\xi)$ . Temos portanto o seguinte resultado.

**Teorema 8.37.** *Seja  $X$  um complexo celular. A aplicação*

$$w_1: K_{O(1)}(X) \rightarrow H^1(X; \mathbb{Z}/2)$$

*que associa a um fibrado linha real a sua classe de Stiefel-Whitney é uma bijecção.*

**Nota 8.38.** É um corolário do Teorema de Peter-Weyl [BtD], que qualquer grupo de Lie compacto  $K$  admite uma representação fiel de dimensão finita. Equivalentemente, existe um homomorfismo injetivo

$$K \rightarrow O(n)$$

para algum  $n$ , que realiza  $K$  como um subgrupo fechado de um grupo ortogonal. A Proposição 8.35 garante então que

$$V_{n,\infty} \rightarrow V_{n,\infty}/K$$

é um  $K$ -fibrado universal, isto é,  $BK = V_{n,\infty}/K$ .

**Exercício 8.39.** Enuncie e demonstre resultados análogos aos do Exemplo 8.36 para fibrados com grupo estrutural  $U(n)$ ,  $GL(n; \mathbb{C})$ ,  $Sp(n)$  e  $GL(n; \mathbb{H})$ .

Novamente o caso do grupo  $U(1)$  ou  $GL(1; \mathbb{C})$  merece destaque. Um fibrado com este grupo de estrutura e fibra  $\mathbb{C}$  chama-se um *fibrado de linha complexo*. O espaço classificante destes fibrados é

$$\mathbb{C}P^\infty = K(\mathbb{Z}, 2).$$

Sendo  $a \in H^2(\mathbb{C}P^\infty; \mathbb{Z})$  um gerador, podemos associar a cada fibrado linha complexo  $\xi$ , classificado por uma classe de homotopia  $f : X \rightarrow K(\mathbb{Z}, 2)$  uma classe de cohomologia

$$c_1(\xi) \stackrel{\text{def}}{=} f^*(a)$$

chamada a *classe de Chern* de  $\xi$  e novamente temos o seguinte resultado.

**Teorema 8.40.** Seja  $X$  um complexo celular. A aplicação

$$c_1 : K_{U(1)}(X) \rightarrow H^2(X; \mathbb{Z})$$

que associa a um fibrado linha complexo a sua classe de Chern é uma bijecção.

**Exemplo 8.41** (Revestimentos regulares). Seja  $G$  um grupo discreto. Um fibrado principal com grupo de estrutura  $G$  e espaço total conexo por arcos é precisamente o que se chama um revestimento regular<sup>72</sup>. Pela classificação dos revestimentos, um revestimento regular sobre um espaço de base conexo por arcos  $X$  corresponde a um subgrupo normal de  $N \triangleleft \pi_1(X, *)$  com quociente

$$\pi_1(X, *) / N \simeq G.$$

Um tal homomorfismo sobrejectivo corresponde precisamente a uma classe de conjugação (em  $G$ ) de homomorfismos sobrejectivos

$$\pi_1(X, *) \rightarrow G.$$

Se o espaço total do fibrado principal com grupo de estrutura  $G$  não é conexo, escolhendo uma componente conexa, obtemos um subgrupo de  $H < G$  que age transitivamente nas fibras dessa componente conexa, e é fácil ver que tais revestimentos correspondem biunivocamente a classes de conjugação de homomorfismos

$$\pi_1(X, *) \rightarrow G$$

com imagem um subgrupo conjugado a  $H$ . Assim, em geral, obtemos a seguinte relação para um espaço  $X$  conexo por arcos (e semi-localmente simplesmente conexo):

$$[X, BG] \simeq \text{Hom}(\pi_1(X, *), G) / \text{conjugação}.$$

<sup>72</sup>Recorde que um revestimento se diz regular se o grupo de transformações do revestimento age transitivamente nas fibras.

**Exercício 8.42.** *Mostre que se  $X$  é um complexo celular*

$$[X, K(G, 1)]_* = \text{Hom}(\pi_1(X), G).$$

**A construção de Milnor.** Vamos agora dar a primeira construção geral de um espaço classificante para um grupo topológico, que se deve a John Milnor. Começamos por recordar que a *junção* de dois espaços  $X, Y$  é o quociente

$$X * Y = (X \times [0, 1] \times Y) / \sim$$

onde  $\sim$  é a relação de equivalência gerada por

$$(x, 0, y) \sim (x', 0, y) \quad \text{e} \quad (x, 1, y) \sim (x, 1, y').$$

A maneira de pensar em  $X * Y$  é como "as combinações convexas de pontos de  $X$  e  $Y$ ", e é costume escrever

$$tx + (1-t)y = [(x, t, y)].$$

**Exemplo 8.43.** Consideremos as esferas unitárias  $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$  e  $S^m \subset \mathbb{R}^{m+1}$  mergulhadas em  $\mathbb{R}^{n+m+2}$  pela inclusão das primeiras, e últimas coordenadas respectivamente. A projecção radial

$$tx + (1-t)y \mapsto \frac{tx + (1-t)y}{\|tx + (1-t)y\|}$$

determina um homeomorfismo

$$S^n * S^m \simeq S^{n+m+1}.$$

**Exercício 8.44.** *Mostre que  $X * Y$  tem o mesmo tipo de homotopia  $\Sigma X \wedge Y$ . Sugestão:  $\Sigma X \wedge Y$  é um quociente de  $X * Y$ .*

Vamos precisar de considerar junções iteradas de vários espaços. Um ponto em  $X_1 * \dots * X_n$  é representado por uma combinação linear formal

$$\sum_{i=1}^n t_i x_i$$

com  $x_i \in X_i$ ,  $t_i \in [0, 1]$  e  $\sum_{i=1}^n t_i = 1$ .

**Definição 8.45.** *Seja  $G$  um grupo topológico. Defina-se*

$$EG = \text{colim}_n \overbrace{G * \dots * G}^n$$

onde as inclusões são dadas pela expressão

$$\sum_{i=1}^n t_i g_i \mapsto \sum_{i=1}^n t_i g_i + 0g.$$

O grupo  $G$  age à direita em  $EG$  de forma natural pela fórmula

$$\left( \sum_{i=1}^n t_i g_i \right) \cdot g = \sum_{i=1}^n t_i (g_i \cdot g)$$

e escreve-se

$$BG = EG/G$$

para o espaço quociente por esta acção.

Para cada  $i \in \mathbb{N}$  temos uma função

$$t_i: EG \rightarrow [0, 1]$$

definida por

$$t_i\left(\sum_{j=1}^n s_j g_j\right) = s_i$$

que é contínua por definição da topologia em  $EG$ . Designando por  $U_i$  os abertos

$$U_i = t_i^{-1}([0, 1]) \subset EG$$

temos ainda para cada  $i$  uma função

$$x_i: U_i \rightarrow G$$

definida pela expressão

$$x_i\left(\sum_{j=1}^n s_j g_j\right) = g_i.$$

Não é difícil verificar que a topologia em  $EG$  é a topologia inicial determinada pelas funções  $t_i$  e  $g_i$ , no sentido em que  $f: EG \rightarrow Y$  é contínua sse  $t_i \circ f$  são contínuas e as funções  $x_i \circ f$  são contínuas no seu domínio (exercício).

Note-se que a acção de  $G$  em  $EG$  da Definição 8.45 é claramente livre, e a caracterização da topologia de  $EG$  dada no parágrafo anterior mostra que se trata de uma acção contínua.

**Teorema 8.46** (Milnor). *A aplicação*

$$\pi: EG \rightarrow BG$$

*é um  $G$ -fibrado principal universal.*

*Proof.* Para cada  $k$  temos

$$\pi_k(EG) = \operatorname{colim}_n \pi_k(\overbrace{G * \dots * G}^n) = 0$$

uma vez que a junção iterada de  $n$  cópias de  $G$  é  $(n-1)$ -conexa pelo Exercício 8.44. Tendo em conta o Teorema 8.33, resta-nos portanto mostrar que a aplicação  $\pi$  é um fibrado principal enumerável.

Sejam  $V_i = \pi(U_i)$  os abertos de  $BG$  determinados pelos abertos saturados  $U_i \subset EG$ . As aplicações

$$\phi_i: V_i \times G \xleftarrow{\phi_i} U_i$$

que invertem as aplicações  $U_i \rightarrow V_i \times G$  dadas pela fórmula

$$\sum t_j g_j \mapsto ([\sum t_j g_j], g_i)$$

definem trivializações locais. De facto, a continuidade é fácil de verificar, as aplicações são claramente equivariantes com respeito à acção canónica de  $G$  em  $V_i \times G$  e facilmente se vê que as funções de transição

$$\phi_{ij}: V_i \cap V_j \rightarrow G$$

são dadas pela expressão

$$\phi_{ij}(a) = x_j(a)x_i(a)^{-1}$$

sendo portanto contínuas.

Resta-nos achar uma partição de unidade subordinada à cobertura  $\{V_i\}$  de  $BG$ . As funções  $t_i : U_i \rightarrow [0, 1]$  induzem funções contínuas  $t_i : V_i \rightarrow ]0, 1]$ . Se definirmos  $w_i : BG \rightarrow [0, 1]$  por

$$w_i = \max\{0, t_i - \sum_{j < i} t_j\}$$

é fácil verificar que

$$\varphi_i = \frac{w_i}{\sum_j w_j}$$

é uma partição da unidade (localmente finita) subordinada à cobertura  $V_i$ .  $\square$

**Nota 8.47.** *Mostrámos apenas a universalidade da construção de Milnor para fibrados cuja base é um complexo celular, mas é possível demonstrar que se trata de facto de um fibrado universal no sentido mais geral da Definição 8.32 (ver [Hu, Theorem 4.12.2]).*

**Exemplo 8.48.** Se  $G = \mathbb{Z}/2$ , a junção de  $n$  cópias de  $G$  identifica-se naturalmente com  $S^{n-1}$  e mediante esta identificação, o gerador de  $\mathbb{Z}/2$  age via a aplicação antipodal. Assim,

$$E\mathbb{Z}/2 = S^\infty \quad \text{e} \quad B\mathbb{Z}/2 = \mathbb{R}P^\infty.$$

**Exercício 8.49.** *Mostre que  $BS^1$  se identifica com  $\mathbb{C}P^\infty$ .*

Note-se que a construção de  $BG$  dada acima é functorial. Se  $\phi : G \rightarrow H$  é um homomorfismo contínuo, temos uma aplicação

$$B\phi : BG \rightarrow BH.$$

Se  $\phi$  é uma equivalência fraca, o mesmo sucede com  $B\phi$  (pelas sucessões exactas longas das fibrações universais). Por exemplo, as inclusões

$$O(n) \subset GL(n, \mathbb{R}) \quad \text{e} \quad U(n) \subset GL(n, \mathbb{C})$$

são equivalências fracas, pelo que

$$BO(n) \simeq BGL(n; \mathbb{R}) \quad \text{e} \quad BU(n) \simeq BGL(n, \mathbb{C}).$$

Algo que podíamos também concluir do facto de qualquer fibrado vectorial real (respectivamente complexo) admitir uma métrica (respectivamente uma métrica hermitiana) conforme o Exemplo 8.26.

O efeito da aplicação  $\phi$  no fibrado universal é aplicar o homomorfismo  $\phi$  às funções de transição, e portanto se  $f : X \rightarrow BG$  classifica um fibrado sobre  $X$ , o  $H$ -fibrado classificado por  $B\phi \circ f$  é também o fibrado obtido aplicando o homomorfismo às funções de transição. Em particular temos o seguinte resultado.

**Proposição 8.50.** *Seja  $G \rightarrow H$  a inclusão de um subgrupo. Um  $H$ -fibrado principal  $\xi$  sobre  $X$  classificado pela aplicação  $f : X \rightarrow BG$  admite uma redução do grupo de estrutura sse existe uma factorização*

$$\begin{array}{ccc} & & BG \\ & \nearrow & \downarrow B\phi \\ X & \xrightarrow{f} & BH \end{array}$$

Um outro resultado muito útil é o seguinte.

**Proposição 8.51.** *Seja*

$$1 \rightarrow K \rightarrow G \rightarrow H \rightarrow 1$$

*uma sucessão exacta curta de grupos topológicos (tal que a acção de  $K$  em  $G$  admite uma fatia). Então*

$$BK \rightarrow BG \rightarrow BH$$

*é uma sucessão de fibração.*

*Proof.* Há uma aplicação natural de  $BK$  para a fibra de homotopia de  $BG \rightarrow BH$  que é uma equivalência fraca pela sucessão exacta longa de homotopia uma vez que esta se identifica com a sucessão exacta de homotopia do fibrado

$$K \rightarrow G \rightarrow H.$$

□

**Exercício 8.52.** *Mostre que  $BG \times BH \simeq B(G \times H)$ .*

**Exemplo 8.53.** A sucessão exacta

$$SO(n) \rightarrow O(n) \rightarrow \mathbb{Z}/2$$

dá azo a uma sucessão de fibração

$$BSO(n) \longrightarrow BO(n) \xrightarrow{w_1} K(\mathbb{Z}/2, 1)$$

para uma certa classe  $w_1 \in H^1(BO(n); \mathbb{Z}/2)$  que se chama a *primeira classe de Stiefel-Whitney*. Note-se que esta classe é não trivial uma vez que a composta

$$B\mathbb{Z}/2 \rightarrow BO(n) \rightarrow B\mathbb{Z}/2$$

é a identidade.

Tendo em conta a Proposição 8.50 isto significa que um fibrado vectorial sobre um complexo celular  $X$  classificado por

$$f: X \rightarrow BO(n)$$

admite uma orientação sse  $f^*(w_1) = 0$ .

**Exercício 8.54.** *Qual é o análogo do exemplo anterior para fibrados vectoriais complexos?*

**Classes características.** Na secção anterior reduzimos o problema da classificação dos fibrados ao cálculo de um conjunto de classes de homotopia. Na prática não é fácil calcular estes conjuntos excepto nalgumas situações particulares (como as dos Teoremas 8.37 e 8.40), e é necessário encontrar métodos que nos permitam pelo menos distinguir fibrados não isomorfos. O método mais bem sucedido é o de associar aos fibrados certos invariantes cohomológicos que se chamam classes (de cohomologia) características do fibrado. Além de algumas generalidades sobre classes características, nesta secção vamos apresentar as classes características mais utilizadas para fibrados vectoriais reais e complexos - as classes de Stiefel-Whitney e de Chern e estudar algumas das suas propriedades. A referência canónica para este assunto é [MiS]. O nosso tratamento é essencialmente o de [Hu].

**Definição 8.55.** *Uma classe característica de  $G$ -fibrados com coeficientes em  $R$  é uma transformação natural*

$$K_G(X) \rightarrow H^*(X; R).$$

Mais geralmente interessa considerar classes características com valores em teorias de cohomologia generalizadas mas não vamos ter ocasião de as considerar aqui.

Pelo Lema de Yoneda o anel das classes características com coeficientes num anel  $R$  identifica-se com o anel

$$H^*(BG; R).$$

As classes características de fibrados vectoriais têm uma importância particular nas aplicações. De acordo com a discussão anterior, os anéis formados pelas classes características de fibrados vectoriais são os anéis de cohomologia de  $BO(n)$  e  $BU(n)$ , ou seja das Grassmannianas de planos de dimensão  $n$  em  $\mathbb{R}^\infty$  e  $\mathbb{C}^\infty$  respectivamente.

Nos fibrados vectoriais há estrutura adicional nas classes de isomorfismo de fibrados, dada pela soma directa (também chamada soma de Whitney) e pelo produto tensorial. Em termos dos espaços classificantes estas operações são dadas por classes de homotopia

$$BO(n) \times BO(m) \xrightarrow{\oplus} BO(n+m) \quad \text{e} \quad BO(n) \times BO(m) \xrightarrow{\otimes} BO(nm),$$

que classificam a soma directa e o produto tensorial dos fibrados universais (ou tau-tológicos) sobre  $BO(n)$  e  $BO(m)$  respectivamente. Analogamente para os fibrados vectoriais complexos.

No caso dos fibrados linha, tomando  $n = m = 1$  temos uma aplicação

$$\mathbb{R}P^\infty \times \mathbb{R}P^\infty \xrightarrow{\otimes} \mathbb{R}P^\infty.$$

que corresponde a uma classe de cohomologia em  $H^1(\mathbb{R}P^\infty \times \mathbb{R}P^\infty; \mathbb{Z}/2)$ . Sendo  $x \in H^1(\mathbb{R}P^\infty; \mathbb{Z}/2)$  um gerador, temos

$$\otimes^*(x) = a(x \times 1) + b(1 \times x)$$

para alguns  $a, b \in \mathbb{Z}/2$ . A composição de  $\otimes$  com a inclusão de cada um dos factores em  $\mathbb{R}P^\infty \times \mathbb{R}P^\infty$  é claramente a identidade, pelo que  $a = b = 1$  donde se conclui que  $\otimes$  classifica a soma em  $H^1(; \mathbb{Z}/2)$ .

**Proposição 8.56.** *A classe de Stiefel-Whitney  $w_1 : KO_{(1)}(X) \rightarrow H^1(X; \mathbb{Z}/2)$  identifica o produto tensorial de fibrados de linha reais com a soma em cohomologia.*

**Exercício 8.57.** *Mostre que a classe de Chern  $c_1$  identifica o produto tensorial de fibrados linha complexos sobre  $X$  com a soma em  $H^2(X; \mathbb{Z})$ .*

**Exercício 8.58.** *Mostre que a operação de tomar o fibrado linha dual é o inverso para a operação produto tensorial e que no caso complexo esta operação corresponde ainda à operação de conjugação.*

Vamos agora estudar as classes de Stiefel-Whitney de fibrados vectoriais reais e as classes de Chern para fibrados vectoriais complexos. Na prática, o que se usa para efeitos de cálculo são certos axiomas simples satisfeitos por estas classes. Para enunciar estes axiomas é conveniente considerar que as classes tomam valores nos anéis graduados

$$H^*(X; R) = \bigoplus_{i=0}^{\infty} H^i(X; R).$$

**Axiomas para as classes de Stiefel-Whitney:** A classe de Stiefel-Whitney total de um fibrado vectorial real  $\xi$  sobre  $X$  é uma classe característica

$$w(\xi) = 1 + w_1(\xi) + w_2(\xi) + \dots + w_i(\xi) + \dots \quad \text{com } w_i(\xi) \in H^i(X; \mathbb{Z}/2)$$

que satisfaz

$$(W0) \quad w_i(\xi) = 0 \text{ se } i > \dim \xi,$$



- (W1) Sendo  $\gamma$  o fibrado linha tautológico sobre  $\mathbb{R}P^1$ , tem-se que  $w_1(\gamma) \neq 0$ .
- (W2)  $w(\xi \oplus \eta) = w(\xi)w(\eta)$ .

De forma inteiramente análoga temos

**Axiomas para as classes de Stiefel-Whitney:** A classe de Chern total de um fibrado vectorial complexo  $\xi$  sobre  $X$  é uma classe característica

$$c(\xi) = 1 + c_1(\xi) + c_2(\xi) + \dots + c_i(\xi) + \dots \quad \text{com } c_i(\xi) \in H^{2i}(X; \mathbb{Z})$$

que satisfaz

- (C0)  $c_i(\xi) = 0$  se  $i > \dim_{\mathbb{C}} \xi$ ,
- (C1) Sendo  $\gamma$  o fibrado linha tautológico sobre  $\mathbb{C}P^1$ , tem-se que  $c_1(\gamma)$  é um gerador de  $H^2(\mathbb{C}P^1; \mathbb{Z})$ .
- (C2)  $c(\xi \oplus \eta) = c(\xi)c(\eta)$ .

Uma vez que o tratamento dos casos real e complexo é inteiramente paralelo iremos tratar em detalhe apenas o caso real deixando o outro como exercício.

Começamos por notar as seguintes consequências imediatas dos axiomas.

**Proposição 8.59.** Designamos por  $\mathbb{R}^n$  o fibrado trivial de dimensão  $n$ .

- (i)  $w(\mathbb{R}^n) = 1$ ,
- (ii)  $w(\xi \oplus \mathbb{R}) = w(\xi)$ ,
- (iii) Se  $\gamma$  denotar o fibrado linha tautológico sobre  $\mathbb{R}P^\infty$ , tem-se que  $w_1(\gamma)$  é o gerador de  $H^1(\mathbb{R}P^\infty; \mathbb{Z}/2)$ .

*Proof.* (i) é uma consequência da naturalidade das classes características, uma vez que o fibrado trivial é o pullback do fibrado universal por uma aplicação constante. (ii) é uma consequência de (i) e (W2). Finalmente, (iii) é uma consequência de (W1), naturalidade, e o facto de a inclusão  $\mathbb{R}P^1 \rightarrow \mathbb{R}P^\infty$  induzir um isomorfismo em  $H^1(\ ; \mathbb{Z}/2)$ .  $\square$

Antes de vermos que estes axiomas caracterizam as classes características e demonstrar a existência de tais classes vejamos um exemplo típico de aplicação.

**Exemplo 8.60** (Cálculo de  $w(T\mathbb{R}P^n)$ ). O fibrado tangente de  $\mathbb{R}P^n$  identifica-se naturalmente com o subespaço do fibrado tangente de  $S^n$  que é invariante mediante a acção da aplicação antípoda. Não é difícil (faça um desenho) identificar este último com o fibrado

$$\text{Hom}(\gamma, \gamma^\perp)$$

onde  $\gamma$  designa o fibrado tautológico sobre  $\mathbb{R}P^n$  e  $\gamma^\perp$  o complementar ortogonal de  $\gamma$  em  $\mathbb{R}^n$ . Uma vez que

$$\gamma^\perp \oplus \mathbb{R} \simeq \mathbb{R}^{n+1}$$

temos

$$T\mathbb{R}P^n \oplus \mathbb{R} = \text{Hom}(\gamma, \gamma^\perp) \oplus \text{Hom}(\gamma, \gamma) = (\gamma^*)^{n+1}.$$

Um fibrado linha real é isomorfo ao seu dual, e pelo axioma (W1) e naturalidade temos

$$w(\gamma) = 1 + x$$

onde  $x$  denota um gerador de  $H^1(\mathbb{R}P^n; \mathbb{Z}/2)$  logo do axioma (W3) concluímos que

$$(39) \quad w(T\mathbb{R}P^n) = (1 + x)^{n+1} = 1 + (n + 1)x + \binom{n + 1}{2}x^2 + \dots + (n + 1)x^n.$$

**Exercício 8.61.** *Mostre que em termos das expansões binárias  $n = a_0a_1 \dots a_n$  e  $m = b_0b_1 \dots b_n$ , com  $a_i, b_i = 0$  ou  $1$ , se tem*

$$\binom{n}{m} = \prod_i \binom{a_i}{b_i} \pmod{2}.$$

Recorde-se que, pelo Teorema de Whitney, qualquer variedade  $M$  de dimensão  $n$  admite uma imersão em  $\mathbb{R}^{2n-1}$ . Se  $M$  admite uma imersão em  $\mathbb{R}^k$ , então designando por  $\nu$  o fibrado normal da imersão temos

$$TM \oplus \nu = \mathbb{R}^k$$

e portanto, pelos axiomas (W0) e (W2) concluímos que o inverso multiplicativo de  $w(TM)$  no anel  $H^*(M; \mathbb{Z}/2)$  está concentrado em grau  $\leq k - n = \dim \nu$ .

A equação (39) permite-nos então tirar a seguinte conclusão.

**Teorema 8.62.** *Se  $n = 2^r$  então  $\mathbb{R}P^n$  não admite uma imersão em  $\mathbb{R}^{2n-2}$ .*

*Proof.* A fórmula (39) diz-nos que

$$w(T\mathbb{R}P^n) = (1+x)^{2^r}(1+x) = (1+x^{2^r})(1+x) = (1+x+x^n).$$

O inverso multiplicativo deste elemento em  $H^1(\mathbb{R}P^n; \mathbb{Z}/2)$  é

$$1 + (x+x^n) + \dots + (x+x^n)^k + \dots = 1 + x + \dots + x^{n-1}$$

pelo que o fibrado normal de qualquer imersão tem dimensão pelo menos  $n-1$ .  $\square$

**Nota 8.63.** *Acabámos de calcular a menor dimensão de um espaço euclidiano em que  $\mathbb{R}P^n$  se pode imergir para  $n$  uma potência de 2. Esta dimensão é desconhecida em geral apesar de haver muita informação sobre o assunto. O método usual para obter minorantes para esta dimensão é o que acabamos de exemplificar (usando classes características com valores em teorias de cohomologia generalizadas). Convida-se o leitor a tentar calcular os minorantes implicados pelas classes de Stiefel-Whitney para outros valores de  $n$ .*

Vamos agora dar uma construção das classes de Stiefel-Whitney seguindo um método introduzido por Grothendieck que tem a vantagem de poder ser aplicado em outras situações (nomeadamente em Geometria Algébrica).

**Definição 8.64.** *Seja  $\pi : E \rightarrow X$  um fibrado vectorial real de dimensão  $n$ . A projectivização de  $E$  é o fibrado  $p : P(E) \rightarrow X$  com fibra  $\mathbb{R}P^{n-1}$  associado ao fibrado principal determinado por  $E$ .*

Sobre  $P(E)$  há um fibrado linha real tautológico  $\gamma$  cuja fibra sobre  $l \in P(E)$  é a linha  $l \subset p^{-1}(\pi(l))$ . Note-se que a restrição de  $\gamma$  a cada fibra de  $P(E) \rightarrow X$  é o fibrado tautológico sobre  $\mathbb{R}P^{n-1}$ . Seja

$$w \in H^1(P(E); \mathbb{Z}/2)$$

a classe de Stiefel-Whitney (no sentido do Teorema 8.37) de  $\gamma$ . Uma vez que  $w$  gera a cohomologia da fibra, pelo Teorema de Leray-Hirsch temos que

$$H^*(P(E); \mathbb{Z}/2) = H^*(X; \mathbb{Z}/2) \langle 1, w, \dots, w^{n-1} \rangle$$

como módulo sobre  $H^*(X; \mathbb{Z}/2)$ . Isso significa que existem classes únicas  $w_i(E) \in H^i(X; \mathbb{Z}/2)$  tais que

$$(40) \quad w^n = \sum_{i=0}^{n-1} p^*(w_{n-i}(E))w^i$$

a que chamamos *as classes de Stiefel-Whitney do fibrado*  $E \rightarrow X$ . Com esta definição temos a seguinte fórmula para a álgebra de cohomologia da projectivização de um fibrado vectorial.

**Teorema 8.65** (Fórmula do fibrado projectivo). *Se  $E$  é um fibrado vectorial real de dimensão  $n$ ,*

$$H^*(P(E); \mathbb{Z}/2) = H^*(X; \mathbb{Z}/2)[w]/(w^n(E) + \dots w_1(E)w^{n-1} + w^n).$$

Vejam agora que as classes definidas em (40) são classes características e satisfazem os axiomas (W0)-(W2). A naturalidade e o axioma (W0) são imediatos da definição. Se  $E \rightarrow X$  é um fibrado linha, então  $P(E) = X$  e o fibrado tautológico sobre  $P(E)$  identifica-se naturalmente com  $E$ . Se  $X = \mathbb{R}P^1$ , o fibrado tautológico é classificado pela inclusão  $\mathbb{R}P^1 \subset \mathbb{R}P^\infty$  pelo que  $w \neq 0$  e portanto, pela fórmula (40),  $w_1(E) \neq 0$ , o que mostra (W1). Note-se em particular que para um fibrado linha a classe  $w_1$  definida pela fórmula (40) coincide com a do Teorema 8.37.

Para verificar o axioma (W2) vamos fazer uso de uma construção que tem interesse por si mesma.

**Teorema 8.66** (Princípio da cisão<sup>73</sup>). *Seja  $\xi$  um fibrado vectorial sobre  $B$ . Existe um espaço  $X$  e uma aplicação  $f: X \rightarrow B$  tais que*

- (i)  $f^*: H^*(B; \mathbb{Z}/2) \rightarrow H^*(X; \mathbb{Z}/2)$  é um monomorfismo,
- (ii)  $f^*(\xi)$  é uma soma de fibrados linha sobre  $X$ .

*Proof.* Seja  $p: P(\xi) \rightarrow B$  a projectivização de  $\xi$ . A aplicação  $p^*$  é injectiva em cohomologia como vimos acima. Sendo  $\gamma$  o fibrado linha tautológico sobre  $P(\xi)$  temos

$$p^*(\xi) = \gamma \oplus \eta$$

onde  $\eta$  é um fibrado vectorial sobre  $P(\xi)$  de dimensão inferior. Podemos agora repetir este processo para o fibrado  $\eta$  sobre  $P(\xi)$  e por indução obtemos o resultado pretendido.  $\square$

**Nota 8.67.** *A aplicação  $f: X \rightarrow B$  na demonstração anterior é na realidade um fibrado sobre  $B$ , nomeadamente o fibrado associado ao fibrado vectorial  $\xi$  com fibra a variedade bandeira<sup>74</sup>*

$$O(n)/(\mathbb{Z}/2)^n$$

onde  $(\mathbb{Z}/2)^n \subset O(n)$  é o subgrupo das matrizes diagonais. Os pontos desta variedade estão em correspondência natural com as bandeiras em  $\mathbb{R}^n$ , ou seja com as sucessões crescentes de subespaços

$$V_1 \subset V_2 \subset \dots \subset V_{n-1} \subset \mathbb{R}^n$$

com  $\dim V_i/V_{i-1} = 1$ .

De facto, o fibrado  $P(\xi)$  é o fibrado associado a  $\xi$  com fibra

$$\mathbb{R}P^{n-1} = O(n)/(\mathbb{Z}/2 \times O(n-1))$$

<sup>73</sup>Em inglês *splitting principle*

<sup>74</sup>Em inglês *flag variety*.

pele que temos um diagrama de pullback

$$\begin{array}{ccc} P(\xi) & \xrightarrow{\gamma \oplus p^* \xi} & B\mathbb{Z}/2 \times BO(n-1) \\ \downarrow p & & \downarrow \\ B & \xrightarrow{\xi} & BO(n) \end{array}$$

e portanto aplicando esta construção repetidamente obtemos um fibrado

$$O(n)/(\mathbb{Z}/2)^n \longrightarrow X \xrightarrow{f} B.$$

Uma consequência importante do Teorema 8.66 é a unicidade de uma classe característica satisfazendo (W0)-(W2).

**Corolário 8.68.** *Os axiomas (W0)-(W2) determinam completamente as classes de Stiefel-Whitney.*

*Proof.* A classe  $w_1$  para fibrados linha é completamente determinada pelo axioma (W1) e por naturalidade. Se  $\xi$  é um fibrado vectorial sobre  $B$ , seja  $f : X \rightarrow B$  é uma aplicação que cinde  $\xi$ , de forma que

$$f^*(\xi) = \gamma_1 \oplus \dots \oplus \gamma_n$$

com  $\gamma_i$  fibrados linha sobre  $X$ . Pelos axiomas (W0),(W2) e naturalidade temos

$$f^*(w(\xi)) = w(f^*(\xi)) = (1 + w_1(\gamma_1)) \dots (1 + w_1(\gamma_n)).$$

Como  $f^*$  é injectivo em cohomologia com coeficientes  $\mathbb{Z}/2$  esta equação determina completamente  $w(\xi)$  o que conclui a demonstração.  $\square$

Resta-nos verificar que as classes características definidas por (40) satisfazem o axioma (W2).

**Proposição 8.69.** *As classes definidas em (40) satisfazem (W2).*

*Proof.* Por naturalidade e pelo Princípio da cisão 8.66 basta mostrar que se

$$\xi = \gamma_1 \oplus \dots \oplus \gamma_n$$

é uma soma de fibrados linha então

$$w(\xi) = (1 + w_1(\gamma_1)) \dots (1 + w_1(\gamma_n)).$$

Seja  $q : P(\xi) \rightarrow B$  a projeção de  $\xi$  e consideremos a sucessão exacta

$$(41) \quad 0 \rightarrow \gamma \rightarrow q^*(\xi) \rightarrow \mu \rightarrow 0$$

onde  $\gamma$  designa o fibrado linha tautológico sobre  $P(\xi)$  e  $\mu = q^*(\xi)/\gamma$ .

Fazendo o produto tensorial de (41) com  $\gamma^*$  obtemos uma inclusão  $\mathbb{R} \subset \gamma^* \otimes q^*(\xi)$  e portanto uma secção

$$s : P(\xi) \rightarrow \gamma^* \otimes q^*(\xi)$$

que nunca se anula. Sejam

$$\pi_i : \gamma^* \otimes q^*(\xi) \rightarrow \gamma^* \otimes q^*(\gamma_i)$$

as projecções e  $s_i = \pi_i \circ s$ . Os conjuntos abertos  $V_i = \{x \in P(\xi) : s_i(x) \neq 0\}$  satisfazem

$$V_1 \cup \dots \cup V_n = P(\xi)$$

e sobre o aberto  $V_i$  o fibrado  $\gamma^* \otimes q^*(\gamma_i)$  é trivial. Portanto

$$w_1(\gamma^* \otimes q^*(\gamma_i)) = w_1(\gamma^*) + w_1(q^*(\gamma_i)) = 0 \in H^1(V_i; \mathbb{Z}/2)$$

ou, equivalentemente,

$$w_1(\gamma^* \otimes q^*(\gamma_i)) \in \text{im}(H^1(P(\xi), V_i; \mathbb{Z}/2) \rightarrow H^1(P(\xi); \mathbb{Z}/2)).$$

Como os abertos  $\{V_i\}$  formam uma cobertura aberta de  $P(\xi)$  conclui-se que

$$(42) \quad \prod_{i=1}^n (w_1(\gamma^*) + w_1(q^*(\gamma_i))) = 0 \in H^*(P(\xi); \mathbb{Z}/2).$$

Uma vez que  $w = w_1(\gamma^*)$ , comparando os coeficientes de  $w^{n-i}$  nas equações (40) e (42) obtemos o resultado desejado.  $\square$

Finalmente, para terminar esta secção vejamos que as classes de Stiefel-Whitney são "todas" as classes características de fibrados vectoriais reais com coeficientes em  $\mathbb{Z}/2$ .

**Teorema 8.70.** *Seja  $\xi$  o fibrado vectorial universal sobre  $BO(n)$ . Então*

$$H^*(BO(n); \mathbb{Z}/2) = \mathbb{Z}/2[w_1(\xi), \dots, w_n(\xi)].$$

*Proof.* A aplicação

$$\mathbb{R}P^\infty \times \dots \times \mathbb{R}P^\infty \xrightarrow{f} BO(n)$$

que classifica a soma directa de  $n$  cópias do fibrado linha tautológico é uma aplicação de cisão para o fibrado universal (ver Nota 8.67) pelo que  $f^*$  é uma aplicação injectiva em  $H^*(; \mathbb{Z}/2)$ . Claramente a imagem de  $f^*$  está contida nos invariantes pelo grupo simétrico de

$$H^*((\mathbb{R}P^\infty)^n; \mathbb{Z}/2) = \mathbb{Z}/2[x_1, \dots, x_n]$$

onde  $x_i = w_1(\pi_i^*(\gamma))$ . Por outro lado, sendo  $\xi$  o fibrado universal sobre  $BO(n)$ , pelo axioma (W2)  $f^*(w_i(\xi))$  é a componente de grau  $i$  do produto

$$(1 + x_1) \dots (1 + x_n)$$

que é precisamente o  $i$ -ésimo polinómio simétrico elementar  $\sigma_i(x_1, \dots, x_n)$ . Como os invariantes de  $\mathbb{Z}/2[x_1, \dots, x_n]$  pela acção do grupo simétrico formam a álgebra polinomial gerada pelos polinómios  $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ , conclui-se que a imagem de  $f^*$  consiste precisamente nos invariantes e portanto

$$H^*(BO(n); \mathbb{Z}/2) = \mathbb{Z}/2[w_1(\xi), \dots, w_n(\xi)]$$

como pretendíamos demonstrar.  $\square$

**Exercício 8.71.** *Calcule  $H^*(BSO(n); \mathbb{Z}/2)$ .*

**Exercício 8.72.** *Enuncie e demonstre as versões complexas de todos os resultados desta secção.*

**Exercício 8.73.** *Se  $E$  é um fibrado vectorial complexo, mostre que  $c_i(\overline{E}) = (-1)^i c_i(E)$ .*

**Exercício 8.74.** *Mostre que a redução mod 2 de  $c_i$  é a classe  $w_{2i}$  do fibrado vectorial real subjacente.*

**Exercício 8.75.** *Mostre que se  $\xi$  é um fibrado vectorial complexo de dimensão  $n$ ,  $c_n(\xi)$  coincide com a classe de Euler do fibrado vectorial real subjacente (com a orientação dada pela estrutura complexa).*

**Exercício 8.76.** As classes de Pontryagin de um fibrado vectorial real  $E \rightarrow X$  são as classes  $p_i(E) \in H^{4i}(X; \mathbb{Z})$  definidas pela fórmula

$$p_i(E) = c_{2i}(E \otimes \mathbb{C}).$$

Mostre que

$$p_k(E \oplus F) = \sum_i p_i(E)p_{k-i}(F) \text{ mod torsão } 2.$$

**A definição de  $K$ -teoria.** Nesta secção vamos aproveitar o estudo prévio da classificação de fibrados para introduzir a  $K$ -teoria de um espaço topológico. A  $K$ -teoria foi introduzida em Geometria Algébrica por Grothendieck para formular uma generalização do teorema de Riemann-Roch a que se chama agora o Teorema de Grothendieck-Riemann-Roch. A construção foi estudada na categoria dos espaços topológicos por Atiyah e Hirzebruch um ano mais tarde, dando origem ao primeiro exemplo de uma teoria de cohomologia generalizada. No curto espaço que vamos dedicar a este assunto não é possível fazer jus à importância do papel desempenhado por esta teoria em Topologia e Geometria. Para uma introdução a este assunto a partir de primeiros princípios recomenda-se ao leitor o texto clássico de Atiyah [At] ou, para um tratamento mais profundo, [Bo2] e [Hu].

Conforme já mencionámos, o conjunto de classes de isomorfismo de fibrados vectoriais sobre um espaço  $X$  está dotado de estrutura adicional fornecida pelas operações de soma directa e produto tensorial. Nesta secção vamos escrever

$$\text{Vect}(X)$$

para o conjunto de classes de isomorfismo de fibrados vectoriais reais sobre  $X$  de qualquer dimensão (e  $\text{Vect}_{\mathbb{C}}(X)$  para o análogo complexo). Novamente o tratamento dos casos reais e complexos é inteiramente análogo.

As operações  $\oplus$  e  $\otimes$  dão a  $\text{Vect}(X)$  a estrutura de um semi-anel comutativo (isto é, a soma não dispõe de inversos mas todos os restantes axiomas de anel são verificados). Temos além disso um homomorfismo de semi-anéis

$$r: \text{Vect}(X) \rightarrow \mathbb{N}$$

que associa a um fibrado a sua dimensão.

Dado um monóide abeliano  $(M, +)$  a *construção de Grothendieck* associa a  $M$  o grupo abeliano universal determinado por  $M$

$$K(M) = (\mathbb{Z} \cdot M)/R(M)$$

onde  $\mathbb{Z} \cdot M$  designa o grupo abeliano livre gerado pelo conjunto  $M$  e  $R(M)$  designa o subgrupo gerado por

$$m_1 + m_2 - (m_1 \oplus m_2)$$

onde  $+$  designa a soma no grupo abeliano livre e  $\oplus$  a soma em  $M$ . É fácil verificar que a aplicação  $m \mapsto 1 \cdot m$  é o morfismo de monóides abelianos inicial que tem por contradomínio um grupo abeliano<sup>75</sup>. Note-se que associando os termos de uma soma formal de acordo com o sinal dos coeficientes, qualquer elemento de  $K(M)$  é representado por um elemento da forma

$$[m_1] - [m_2]$$

<sup>75</sup>Isto é,  $K$  é o functor adjunto à direita do functor esquecido da categoria dos grupos abelianos para a categoria dos monóides abelianos.

com  $m_1, m_2 \in M$ . Uma construção alternativa de  $K(M)$  é dada no seguinte exercício.

**Exercício 8.77.** *Seja  $(M, +)$  um monóide abeliano. Mostre que há um isomorfismo natural entre  $K(M)$  e o quociente  $M \times M / \Delta(M)$  onde  $\Delta(M) = \{(m, m) : m \in M\}$  (que é um grupo abeliano com o inverso dado por  $-[(m, n)] = [(n, m)]$ ).*

Finalmente, é fácil verificar que se  $M$  é um semi-anel, o produto em  $M$  determina um produto em  $K(M)$  que lhe dá uma estrutura de anel.

**Definição 8.78.** *Se  $X$  é um espaço compacto e Hausdorff, o anel de  $K$ -teoria real de  $X$  é*

$$KO(X) = K(\text{Vect}(X)),$$

e o anel de  $K$ -teoria

$$K(X) = K(\text{Vect}_{\mathbb{C}}(X)).$$

A razão de restringir a definição anterior a espaços compactos e Hausdorff será explicada mais adiante. Um elemento de  $K(X)$  pode ser escrito na forma

$$[E] - [F]$$

onde  $E$  e  $F$  são fibrados vectoriais sobre  $X$ . Note-se ainda que o homomorfismo  $\text{Vect}(X) \rightarrow \mathbb{N}$  se estende a um homomorfismo de anéis

$$r: K(X) \rightarrow \mathbb{Z}$$

que se chama a *dimensão virtual* da classe em  $K(X)$ .

**Proposição 8.79.** *Se  $X$  é compacto e Hausdorff e  $p: E \rightarrow X$  um fibrado vectorial, existe  $N$  tal que  $E$  é um subfibrado do fibrado trivial  $X \times \mathbb{R}^N \rightarrow X$ .*

*Proof.* Seja  $\{U_1, \dots, U_k\}$  uma cobertura aberta de  $X$  que trivializa  $E$ ,

$$\phi_i: p^{-1}(U_i) \rightarrow U_i \times \mathbb{R}^n$$

trivializações locais e  $\psi_i: U_i \rightarrow [0, 1]$  uma partição da unidade subordinada a esta cobertura. É imediato verificar que a aplicação

$$E \rightarrow X \times \mathbb{R}^{nk}$$

definida pela fórmula

$$e \mapsto \left( p(e), \sum_{i=1}^k \psi_i(p(e)) \phi_i(e) \right)$$

está bem definida e é injectiva em cada fibra.  $\square$

**Corolário 8.80.** *Se  $X$  é compacto e Hausdorff, qualquer classe de  $KO(X)$  pode escrever-se na forma  $[E] - [\mathbb{R}^N]$  com  $E \in \text{Vect}(X)$ .*

*Proof.* Por definição, qualquer classe em  $KO(X)$  pode escrever-se na forma  $[H] - [F]$  com  $H, F \in \text{Vect}(X)$ . Seja

$$0 \rightarrow F \rightarrow \mathbb{R}^N \rightarrow G \rightarrow 0$$

uma sucessão exacta. Escolhendo uma métrica temos

$$F \oplus G \simeq \mathbb{R}^N$$

e portanto

$$-[F] = [G] - [\mathbb{R}^N] \Rightarrow [H] - [F] = [H + G] - [\mathbb{R}^N].$$

$\square$

Usando a caracterização de  $K(X)$  dada no Exercício 8.77 é fácil mostrar o seguinte resultado.

**Corolário 8.81.** *Se  $E_1$  e  $E_2$  são fibrados vectoriais sobre um espaço compacto e Hausdorff,  $[E_1] = [E_2]$  sse existe  $N$  tal que  $E_1 + \mathbb{R}^N \simeq E_2 + \mathbb{R}^N$ .*

*Proof.* Exercício. □

Os dois corolários anteriores permitem-nos representar o functor de  $K$ -teoria para espaços compactos e Hausdorff na categoria de homotopia. De facto, o seu conteúdo é que uma classe em  $K(X)$  não é mais do que um par formado por *um fibrado vectorial estável*, isto é, um elemento no colimite

$$\operatorname{colim}_n \operatorname{Vect}_n(X)$$

onde  $\operatorname{Vect}_n(X)$  designa o conjunto das classes de isomorfismo de fibrados vectoriais de dimensão  $n$  e o limite é tomado com respeito à operação de adicionar um fibrado linha trivial, juntamente com um inteiro - a dimensão virtual da classe em questão.

A operação de adicionar um fibrado linha trivial é classificada pelas inclusões

$$BO(n) \rightarrow BO(n+1) \quad \text{e} \quad BU(n) \rightarrow BU(n+1)$$

logo escrevendo

$$BO = \operatorname{colim}_n BO(n)$$

e

$$BU = \operatorname{colim}_n BU(n)$$

obtemos o seguinte resultado.

**Teorema 8.82.** *Se  $X$  é compacto e Hausdorff*

$$KO(X) = [X, \mathbb{Z} \times BO] \quad \text{e} \quad K(X) = [X, \mathbb{Z} \times BU].$$

O resultado anterior não seria verdadeiro para um espaço arbitrário  $X$  e é a razão porque insistimos na compacidade de  $X$  na Definição 8.78. Em Topologia Algébrica é costume usar a fórmula do Teorema 8.82 para definir os funtores de  $K$ -teoria (a que se chama por vezes  $K$ -teoria representável).

A operação de soma directa é classificada por aplicações

$$BU(n) \times BU(m) \xrightarrow{\oplus} BU(n+m)$$

que é compatível com as aplicações  $BU(n) \rightarrow BU(n+1)$ , no sentido em que o diagrama

$$\begin{array}{ccccc} BU(n) \times BU(m) & \xrightarrow{\oplus} & BU(n+m) & \longrightarrow & BU \\ \downarrow & & & \nearrow & \\ BU(n+1) \times BU(m+1) & \xrightarrow{\oplus} & BU(n+m+2) & & \end{array}$$

comuta a menos de homotopia. Isto dá-nos uma<sup>76</sup> aplicação

$$BU \times BU \xrightarrow{\oplus} BU$$

<sup>76</sup>Na realidade, é necessário verificar que o termo  $\lim^1$  na sucessão exacta de Milnor relevante é 0 para ver que não há ambiguidade na classe de homotopia desta aplicação. Alternativamente pode-se construir a aplicação de forma mais cuidadosa.



que classifica a soma em  $K$ -teoria. Mais precisamente, a soma é classificada pela aplicação

$$(\mathbb{Z} \times BU) \times (\mathbb{Z} \times BU) \longrightarrow \mathbb{Z} \times BU$$

que tem o comportamento óbvio nas componentes conexas, e restrita a cada componente conexa é dada por  $\oplus$ . É fácil ver que esta operação é associativa a menos de homotopia. Pelo Corolário 5.16 segue-se que esta multiplicação dispõe de um inverso  $\ominus: \mathbb{Z} \times BU \rightarrow \mathbb{Z} \times BU$  (que classifica a diferença de duas classes em  $K(X)$ ).

Dados fibrados vectoriais  $\xi$  sobre  $X$  e  $\eta$  sobre  $Y$ , escrevemos

$$\xi \hat{\otimes} \eta = \pi_1^*(\xi) \otimes \pi_2^*(\eta)$$

onde  $\pi_1: X \times Y \rightarrow X$  e  $\pi_2: X \times Y \rightarrow Y$  designam as projecções. Designaremos ainda pelo mesmo nome a composta

$$X \times Y \xrightarrow{\xi \hat{\otimes} \eta} BU(n+m) \longrightarrow BU.$$

Seja  $\gamma$  o fibrado tautológico sobre  $\mathbb{C}P^1$  e consideremos as aplicações

$$\gamma \hat{\otimes} \xi_n \ominus \gamma \hat{\otimes} \mathbb{C}^n \ominus \mathbb{C} \hat{\otimes} \xi_n \oplus \mathbb{C}^n: S^2 \times BU(n) \longrightarrow BU$$

onde  $\xi_n$  denota o fibrado tautológico sobre  $BU(n)$ . É fácil verificar que estas aplicações são compatíveis com as inclusões  $BU(n) \rightarrow BU(n+1)$  e portanto determinam uma aplicação

$$\tilde{\beta}: S^2 \times BU \rightarrow BU.$$

A restrição de  $\tilde{\beta}$  a  $S^2 \vee BU \subset S^2 \times BU$  é nulhomotópica, o que nos dá a *aplicação de Bott*

$$\beta: S^2 \wedge BU \rightarrow BU$$

com adjunta (a que damos o mesmo nome)

$$\beta: \Sigma BU \rightarrow \Omega BU \simeq U.$$

Usando o fibrado tautológico sobre  $\mathbb{O}P^1$  obtém-se de forma análoga a aplicação de Bott

$$\beta: \Sigma^7 BO \rightarrow \Omega BO \simeq O.$$

**Teorema 8.83** (Teorema da Periodicidade de Bott). *As aplicações de Bott induzem equivalências fracas*

$$BU \simeq (\Omega U)_e \quad e \quad BO \simeq (\Omega^7 O)_e$$

onde  $e$  designa a componente conexa do ponto de base.

Há muitas demonstrações diferentes deste resultado, todas elas com interesse. A demonstração original de Bott [Bo1] fez-se usando Teoria de Morse no espaço dos caminhos. Bott demonstrou que o mínimo para o funcional energia em  $\Omega U(n)$  é atingido num subconjunto difeomorfo a  $U(2n)/(U(n) \times U(n))$  e que todos os outros pontos críticos têm um índice que tende para  $\infty$  com  $n$ . Passando ao limite é possível deduzir o Teorema 8.83. A melhor demonstração é talvez a que constrói um inverso explícito para  $\beta$  usando operadores de Toeplitz e o facto de o espaço dos operadores de Fredholm num espaço de Hilbert separável se identificar com  $\mathbb{Z} \times BU$  (ver [At, Hu]). Com as ferramentas desenvolvidas ao longo deste curso é possível (mas não fácil) demonstrar directamente que  $\beta$  é uma equivalência de homotopia. Pelo Corolário 7.26 "basta" calcular o efeito de  $\beta$  em homologia. Ver [MiT] para uma demonstração seguindo esta linha.

O Teorema da Periodicidade de Bott dá-nos um  $\Omega$ -espectro periódico

$$\mathbb{Z} \times BU \rightarrow U \rightarrow \mathbb{Z} \times BU \rightarrow U \rightarrow \dots$$

e portanto uma teoria de cohomologia generalizada. Dá-nos também um cálculo dos grupos de homotopia dos espaços  $U$  e  $BU$  (os coeficientes da teoria de cohomologia generalizada). Temos

$$\pi_k(U) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{se } k \text{ é ímpar,} \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

e resultados análogos (mas mais complicados) no caso real.

## 9. SUGESTÕES DE LEITURA

A maior omissão neste curso introdutório à teoria de homotopia é provavelmente a de um estudo das operações de cohomologia para a cohomologia usual com coeficientes em  $\mathbb{Z}/p$ . Estas operações formam (para cada primo  $p$ ) uma álgebra  $\mathcal{A}_p$  chamada a *álgebra de Steenrod* cujo estudo é imprescindível para uma compreensão mais aprofundada da categoria de homotopia. A referência standard é [Ste2] mas para uma exposição mais pedagógica e com mais aplicações recomendamos [MT]

Um outro tópico que se segue aos que tratámos de forma natural é o estudo geral de teorias de (co)homologia generalizadas e teoria de homotopia estável. Os fundamentos da teoria de homotopia estável sofreram uma revolução nos últimos 10 anos (ver [EKM, HSS]) que é em parte responsável pela crescente interacção com outras áreas da Matemática, mas para uma primeira introdução recomendamos [Ad3] e [Sw].

Finalmente, apesar de necessariamente se encontrar já algo desactualizado, o livro [Ad4] (como todos os deste autor) é fortemente recomendado.

## REFERENCES

- [Ad] J. F. Adams, On the Non-Existence of elements of Hopf invariant one, *Annals of Math* **72** (1960) 20–104.
- [Ad2] J. F. Adams, Vector Fields on Spheres, *Annals of Math* **75** (1962), 603–632.
- [Ad3] J. F. Adams, Stable homotopy and generalized homology, *Chicago Lectures in Mathematics*, (1972)
- [Ad4] J. F. Adams, Algebraic Topology - A student's guide, London Mathematical Society Lecture Note Series, No. 4. Cambridge University Press, London-New York, (1972). vi+300 pp.
- [AGP] M. Aguilar, S. Gitler, C. Prieto, Algebraic Topology from a homotopical viewpoint, Universitext, Springer (2002).
- [At] M. Atiyah, K-theory, Walter Benjamin (1968).
- [BKN] T. Bauer, N. Kitchloo, D. Notbohm and E. Pedersen, Finite loop spaces are manifolds. *Math. Annal.* (2004).
- [BM] A. L. Blakers and W. S. Massey, The homotopy groups of a triad. III., *Annals of Mathematics* **58** (1953), 409–417.
- [BoM] R. Bott and J. Milnor, On the parallelizability of the spheres, *Bull. Amer. Math. Soc.* **64** (1958), 87–89.
- [Bo1] R. Bott, The stable homotopy of the classical groups, *Ann. of Math.* **70** (1959) 313–337.
- [Bo2] R. Bott, Lectures on  $K(X)$ , Harvard lecture notes (1967).
- [Br] W. Browder, Torsion in  $H$ -spaces, *Annals of Math.* **74** (1961) 24–51.
- [BtD] Bröcker and T. tom Dieck, Representations of compact Lie Groups, *Grad. Texts in Math.*
- [DS] W. Dwyer and J. Spalinski, Homotopy theories and model categories, in *Handbook of Algebraic Topology* edited by I. M. James, North-Holland (1995). Disponível em <http://www.nd.edu/~wgd>.
- [Du] J. Dugundji, *Topology*, Allyn and Bacon (1966).

- [EKM] A. Elmendorf, I. Kriz, M. Mandell e P. May, Rings, Modules and Algebras in Stable Homotopy Theory, American Math. Soc. Monographs **47** (1997).
- [Fr] M. Freedman, The topology of four-dimensional manifolds, *Journal of Differential Geometry* **17** (1982), 357–453.
- [Gl] A. Gleason, Spaces with a compact Lie group of transformations, *Proc. Amer. Math. Soc.* **1**, (1950), 35–43.
- [Go1] T. Goodwillie, Calculus I. The first derivative of pseudoisotopy theory. *K-Theory* **4** (1990), 1–27.
- [Go2] T. Goodwillie, Calculus II. Analytic functors. *K-Theory* **5** (1992), 295–332.
- [Go3] T. Goodwillie, Calculus III. The Taylor series of a homotopy functor. *Geometry and Topology*, (2003).
- [Ha] A. Hatcher, Algebraic Topology. Cambridge University Press, Cambridge, 2002. xii+544 pp. Disponível em <http://www.math.cornell.edu/~hatcher>
- [Ha2] A. Hatcher, Vector Bundles and K-theory. Disponível em <http://www.math.cornell.edu/~hatcher>
- [Ha3] A. Hatcher, Spectral Sequences in Algebraic Topology. Disponível em <http://www.math.cornell.edu/~hatcher>
- [Hi] P. Hirschhorn, Model categories and their localizations, American Mathematical Society Monographs (2002).
- [Hop] M. Hopkins, Algebraic Topology and Modular Forms, Proceedings of the ICM Beijing (2002).
- [Ho] M. Hovey, Model Categories, American Mathematical Society Monographs (2000).
- [HSS] M. Hovey, B. Shipley e J. Smith, Symmetric Spectra, *Journal of the Amer. Math. Soc.* **13**, (2000), 149–208.
- [HuS] S. T. Hu, Homotopy Theory, Academic Press (1959).
- [Hu] D. Husemoller, Fibre bundles (3rd edition), Graduate Texts in Mathematics **20**, Springer (1994).
- [LF] P. Lima-Filho, Completions and fibrations of topological monoids, *Transactions of the Amer. Math. Soc.* **340** (1993), 127–147.
- [Mn] C. Maunder, Algebraic Topology, Dover (1996).
- [Ma] P. May, A concise course in Algebraic Topology, Chicago Lectures in Mathematics, University of Chicago Press (1999), disponível em <http://www.math.uchicago.edu/~may>
- [Mc] C. McCord, Classifying spaces and infinite symmetric products, *Trans. Amer. Math. Soc.* **146** (1969), 273–298.
- [ML] J. McCleary, A User's Guide to Spectral Sequences, Cambridge Studies in Advanced Mathematics 54, 2nd edition, CUP (2001).
- [Mi] H. Miller, <http://www.lehigh.edu/~dmd1/hm31>
- [Mi2] H. Miller, Leray in OFlagXVIIA: The origins of sheaf theory, sheaf cohomology and spectral sequences. Disponível em <http://www-math.mit.edu/~hrm>.
- [Mln] J. Milnor, On spaces having the homotopy type of a CW-complex, *Transactions of the AMS*, **90** (1959), 272–280.
- [MM] J. Milnor e J. Moore, On the structure of Hopf algebras, *Annals of Math.* **81** (1965), 211–264.
- [MiS] J. Milnor e J. Stasheff, Characteristic classes, *Annals of Mathematics Studies*, PUP (1974).
- [MiT] M. Mimura e H. Toda, Topology of Lie Groups, I and II, *Translations of Mathematical Monographs* **91**, AMS (1991).
- [MT] R. Mosher e M. Tangora, Cohomology operations and applications in homotopy theory, Harper & Row, (1968).
- [Mu] J. Munkres, Topology (2nd edition), Addison-Wesley (2000)
- [Pa] R. Palais, On the existence of Slices for Actions of Non-Compact Lie Groups, *Annals of Math* (2) **73** (1961), 295–323.
- [Qu] D. Quillen, Homotopical Algebra, *Lecture Notes in Math.* (1968)
- [RF] R. Fritsch and R. Piccinini, Cellular structures in topology, *Cambridge Studies in Advanced Mathematics* 9, CUP (1990).
- [Ro] C. Robinson, Moore-Postnikov factorizations for non-simple fibrations, III. *Journal of Math.* **16** (1972), 234–242.
- [Se1] J.-P. Serre, Homologie Singulière des Espaces Fibrés, *Ann. of Math*(2) **54** (1951), 425–505.

- [Se2] J.-P. Serre, Groupes de Homotopie et Classes de Groupes Abéliens, *Ann. of Math(2)* **58** (1953), 258-294.
- [Sp] E. Spanier, *Algebraic Topology*, Springer (1989).
- [St] S. Stolz, Simply connected manifolds of positive scalar curvature, *Ann. of Math(2)* **136** (1992), 511-540.
- [Sta] J. Stasheff, *H-spaces from a homotopy viewpoint*, *Lecture Notes in Mathematics* (1971).
- [Ste] N. Steenrod, *The topology of fibre bundles*, *Annals of Mathematics Studies*, PUP (1950).
- [Ste2] N. Steenrod, *Cohomology Operations*, *Annals of Mathematics Studies*, PUP (1962).
- [Su] D. Sullivan, Genetics of Homotopy Theory and the Adams conjecture, *Annals of Math.(2)* **100** (1974), 1-79.
- [Sw] R. Switzer, *Algebraic Topology - Homotopy and Homology*, *Classics in Mathematics*, Springer (2002).
- [Th] R. Thom, Quelques propriétés globales des variétés différentiables, *Comm. Math. Helv.* **28** (1954), 17-86.
- [Vo] V. Voevodsky,  $\mathbf{A}^1$ -homotopy theory. *Proceedings of the International Congress of Mathematicians*, Vol. I (Berlin, 1998). *Doc. Math.* 1998, Extra Vol. I, 579-604.
- [We] C. Weibel, *An Introduction to Homological Algebra*, *Cambridge Studies in Advanced Mathematics* 34, CUP (1997).
- [Wh] G. Whitehead, Fifty years of homotopy theory, *Bulletin of the AMS* **8** (1983), 1-29.
- [Wh2] G. Whitehead, *Elements of homotopy theory*, *Graduate Texts in Mathematics*, Springer (1979).
- [JWh] J. H. C. Whitehead, A certain exact sequence, *Annals of Math.* **52** (1950), 51-110.

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA, INSTITUTO SUPERIOR TÉCNICO, AV. ROVISCO PAIS, 1049-001 LISBOA, PORTUGAL, FAX: (351)218417598  
*E-mail address:* `ggranja@math.ist.utl.pt`