Topologia Algébrica

Outono de 1999

Série de problemas 5 (14 de Dezembro).

(1) Seja

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{i} B \xrightarrow{j} C \longrightarrow 0$$

uma sucessão exacta curta de grupos abelianos. Mostre que as seguintes afirmações são equivalentes:

(a) $i(A)$ é um somando directo de B. Isto é, $B \simeq i(A) \oplus D$ para algum subgrupo D de B.

(b) Existe um homomorfismo $k : B \longrightarrow A$ tal que $k \circ i = \mathrm{id}_A$

(c) Existe um homomorfismo $l : C \longrightarrow B$ tal que $j \circ l = \mathrm{id}_C$

Quando qualquer das condições acima se verifica, diz-se que a sucessão exacta curta *cinde*.

(2) Seja G um grupo abeliano finitamente gerado. Então existe $k \geq 0$ tal que $G \simeq \mathbb{Z}^k \oplus T$ onde $T = \{x \in G : nx = 0 \text{ para algum } n \in Z - \{0\}\}$ é o subgrupo dos elementos de torsão de G. Define-se $\mathrm{rk}(G) = k$. Equivalentemente, $\mathrm{rk}(G) = \dim_{\mathbb{Q}} G \otimes \mathbb{Q}$ é a dimensão do espaço vectorial $G \otimes \mathbb{Q}$.

Se C_* é um complexo em cadeia tal que $H_*(C_*)$ é finitamente gerado define-se o **i-ésimo número de Betti de** C_* por

$$b_i(C_*) := \mathrm{rk}(H_i(C_*))$$

e a **característica de Euler** de C_* por[1]

$$\chi(C_*) = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i b_i(C_*)$$

Se X é um espaço topológico com $H_*(X)$ finitamente gerado (por exemplo se X for um complexo celular finito) define-se $b_i(X) = \mathrm{rk}\, H_i(X)$ e $\chi(X) = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i b_i(X)$

(a) Mostre que se C_* é um complexo em cadeia finitamente gerado (isto é, tal que o grupo $\oplus_i C_i$ é finitamente gerado) então

$$\chi(C_*) = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \,\mathrm{rk}\, C_i$$

(b) Mostre que se X é um complexo celular finito, com n_i células em dimensão i então

$$\chi(X) = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i n_i$$

(c) Se X e Y são complexos celulares finitos, $X \times Y$ tem uma decomposição celular natural. Mostre que $\chi(X \times Y) = \chi(X)\chi(Y)$

[1] Note que a soma é finita uma vez que a homologia é finitamente gerada