Topologia Algébrica

Outono de 1999

Série de problemas 4 (23 de Novembro).

1. Mostre o **Lema dos 5**: Dado um diagrama comutativo de grupos abelianos

$$\begin{array}{ccccccccc} A_1 & \xrightarrow{i_1} & A_2 & \xrightarrow{i_2} & A_3 & \xrightarrow{i_3} & A_4 & \xrightarrow{i_4} & A_5 \\ \downarrow{\scriptstyle g_1} & & \downarrow{\scriptstyle g_2} & & \downarrow{\scriptstyle g_3} & & \downarrow{\scriptstyle g_4} & & \downarrow{\scriptstyle g_5} \\ B_1 & \xrightarrow{j_1} & B_2 & \xrightarrow{j_2} & B_3 & \xrightarrow{j_3} & B_4 & \xrightarrow{j_4} & B_5 \end{array}$$

   com linhas exactas. Então
   (a) Se g_2 e g_4 são epimorfismos e g_5 é um monomorfismo então g_3 é um epimorfismo.
   (b) Se g_2 e g_4 são monomorfismos e g_1 é um epimorfismo então g_3 é um monomorfismo.

   Em particular se g_1, g_2, g_4 e g_5 são isomorfismos, então g_3 também é.
2. Mostre o **Lema da cobra**: Se

$$0 \longrightarrow A_* \xrightarrow{i_\sharp} B_* \xrightarrow{j_\sharp} C_* \longrightarrow 0$$

   é uma sucessão exacta curta de complexos em cadeia, então a sucessão induzida em homologia

$$\cdots \xrightarrow{\partial} H_n(A) \xrightarrow{i_*} H_n(B) \xrightarrow{j_*} H_n(C) \xrightarrow{\partial} H_{n-1}(A) \xrightarrow{i_*} \cdots$$

   é exacta (onde ∂ é o homomorfismo de bordo definido na aula).
3. Use a sucessão de Mayer-Vietoris para calcular $H_*(X)$ com
   (a) $X = \mathbb{R}P^2$
   (b) $X = \Sigma_2$ (Um toro com 2 buracos)
   (c) $X = S^n \times Y$ (em função de $H_*(Y)$) *Sugestão: Indução em n*
   (d) $X = S^3 - S$ onde $S = \{(x, y, 0) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1\} \cup \{(x, 0, z) \in \mathbb{R}^3 : (x-1)^2 + z^2 = 1\}$ e $S^3 = \mathbb{R}^3 \cup \{\infty\}$
   Sugestão: Note que para ambas as circunferências acima, $S^3 - S^1$ é homeomorfo a um toro sólido $S^1 \times e^2$ onde $e^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$
4. Seja $S^{2n-1} \longrightarrow \mathbb{C}P^{n-1}$ a aplicação quociente (que associa a cada ponto $x \in S^{2n-1} \subset \mathbb{C}^n$ a linha a que pertence). Mostre que o espaço que se obtém colando uma célula de dimensão $2n$ a $\mathbb{C}P^{n-1}$ por esta aplicação é homeomorfo a $\mathbb{C}P^n$.

   O exercício seguinte não é para entregar
5. Sejam X, Y e Z espaços topológicos pontuados. Omitimos o ponto de base da notação mas no que se segue, está subentendido que as homotopias preservam o ponto de base e que a homologia é homologia reduzida.
   (a) Mostre que $[X \vee Y, Z] = [X, Y] \times [Y, Z]$ (isto é, há um isomorfismo natural entre os dois conjuntos)
   (b) Mostre que $H_*(X \vee Y) = H_*(X) \oplus H_*(Y)$
   (c) Sejam $i_1, i_2 : \Sigma X \longrightarrow \Sigma X \vee \Sigma X$ as inclusões do primeiro e segundo somandos. Defina-se $\Delta : \Sigma X \longrightarrow \Sigma X \vee \Sigma X$ por

$$\Delta([t, x]) = \begin{cases} i_1([2t, x]) & \text{se } t \leq 1/2 \\ i_2([2t-1, x]) & \text{se } t > 1/2 \end{cases}$$

   Mostre que Δ induz uma estrutura de grupo no conjunto $[\Sigma X, Z]$
   (d) Moste que a aplicação

$$[\Sigma X, Y] \xrightarrow{h} \mathrm{Hom}(H_*(\Sigma X), H_*(Y))$$

   definida por $h(f) = f_*$ é um homomorfismo de grupos[1].

[1] Este homomorfismo generaliza o homomorfismo de Hurewicz, que corresponde ao caso em que $\Sigma X = S^n$