Topologia Algébrica

Outono de 1999

Série de problemas 3 (2 de Novembro).

1. Seja G um grupo. Uma acção de G num espaço X diz-se **própriamente descontínua** se para cada $x \in X$ existe uma vizinhança U de x tal que $gU \cap hU = \emptyset$ para $g \neq h \in G$. Mostre que para uma tal acção com X conexo e localmente conexo por arcos, a aplicação quociente
$$p : X \longrightarrow X/G$$
é um revestimento regular (o espaço das órbitas X/G tem a topologia quociente).
2. Seja $p : \tilde{X} \longrightarrow X$ um revestimento, Y um espaço conexo por arcos e $f : Y \longrightarrow X$ uma aplicação contínua. Mostre que se g_1 e $g_2 : Y \longrightarrow \tilde{X}$ são levantamentos de f com $g_1(y) = g_2(y)$ para algum $y \in Y$ então $g_1 = g_2$.
3. Calcule $\pi_n(S^1, 1)$ para todo o $n \in \mathbb{N}$. [1]
4. Explique como mergulhar o revestimento universal de $S^1 \vee S^1$ em $\mathbb{R}^2$.
Sugestão: Atribua comprimentos diferentes aos levantamentos dos geradores com ínicio em pontos diferentes da fibra.
5. Seja Σ_g a superfície orientável de género $g > 1$ (isto é um toro com g buracos).
   (a) Calcule $\pi_1(\Sigma_g)$ [2]
   (b) Mostre que $\pi_1(\Sigma_g) \not\cong \pi_1(\Sigma_h)$ para $g \neq h$. Isto significa que Σ_g e Σ_h têm tipos de homotopia diferentes para $g \neq h$.
6. Seja G um grupo topológico conexo por arcos e semi-localmente simplesmente conexo (por exemplo, um grupo de Lie conexo).
   (a) Mostre que o revestimento universal de G, $\tilde{G}$, tem uma estrutura natural de grupo topológico (uma vez escolhida uma identidade $\tilde{e}$ na fibra sobre a identidade de G) tal que $p : \tilde{G} \longrightarrow G$ é um homomorfismo.
   (b) Mostre que o núcleo de p, $\ker p$ é um subgrupo central de $\tilde{G}$.
   Sugestão: Mostre que um subgrupo discreto e normal de um grupo topológico conexo por arcos é necessáriamente central.
   (c) Mostre que há um isomorfismo natural [3]
$$\pi_1(G, 1) \cong \ker p$$

O exercício seguinte não é para entregar

7. Seja $SO(4) = \{A \in M_4(\mathbb{R}) : AA^t = A^tA = 1, \det A = 1\}$ e $SU(2) = \{q \in \mathbb{H} : |q| = 1\}$. Identifica-se $\mathbb{H}$ com $\mathbb{R}^4$ por meio do isomorfismo usual.
   (a) Mostre que a aplicação
$$\begin{array}{rcl} p : SU(2) \times SU(2) & \longrightarrow & SO(4) \\ (q_1, q_2) & \mapsto & (v \mapsto q_1 \ v \ \overline{q}_2) \end{array}$$
   constitui o revestimento universal de $SO(4)$.
   (b) Mostre que $SO(4)$ é homeomorfo a $\mathbb{R}P^3 \times S^3$.

[1] S^1 é a única esfera para a qual todos os grupos de homotopia são conhecidos.
[2] Pode-se omitir o ponto de base já que Σ_g é conexo por arcos.
[3] Este isomorfismo generaliza os que vimos na aula para S^1, $S^1 \times S^1$ e $SO(3)$.