Topologia Algébrica

Outono de 1999

Série de problemas 1 (29 de Setembro).

1. Mostre que a aplicação que associa a um espaço topológico X o anel das aplicações contínuas de X em $\mathbb{R}$ é a função objecto de um functor contravariante da categoria dos espaços topológicos para a categoria dos anéis.
2. Mostre que a relação de homotopia é uma relação de equivalência no conjunto das aplicações contínuas entre dois espaços topológicos. Mostre que existe uma categoria que tem por objectos os espaços topológicos e por morfismos as classes de homotopia de aplicações contínuas.
3. Seja $\mathcal{C}$ uma categoria, e A,B objectos de $\mathcal{C}$. Um morfismo $f : X \longrightarrow Y$ diz-se **mono** se dados morfismos $g, h : W \longrightarrow X$ tais que $f \circ g = f \circ h$, então $g = h$.
   (a) Defina o que significa um morfismo ser **epi**.
   (b) Mostre que se $\mathcal{C} = \mathcal{S}et$ então os morfismos mono são as funções injectivas e os morfismos epi são as funções sobrejectivas.
   (c) Mostre que em $\mathcal{R}ing$, a categoria dos anéis (com identidade), a inclusão de $\mathbb{Z}$ em $\mathbb{Q}$ é mono e epi (mas não é um isomorfismo!).
   (d) Considere a subcategoria $\mathcal{C}$ de $\mathcal{T}op$ em que os objectos são os espaços normais[1] e os morfismos são as aplicações contínuas. Caracterize os morfismos epi em $\mathcal{C}$.
4. Mostre o lema de Yoneda: Se $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2 : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{S}et$ são functores contravariantes representáveis por objectos A e B respectivamente e $\phi : \mathcal{F}_1 \longrightarrow \mathcal{F}_2$ é uma transformação natural, então existe um morfismo $f : A \longrightarrow B$ tal que ϕ é induzida por f.

[1] Um espaço é normal se é Hausdorff e se dados fechados F_1 e F_2 tais que $F_1 \cap F_2 = \emptyset$ existem abertos U_1, U_2 tais que $F_i \subset U_i$ e $U_1 \cap U_2 = \emptyset$. Recorde que um espaço Hausdorff é normal sse o lema de Urysohn é válido.