A LINGUAGEM DAS CATEGORIAS

GUSTAVO GRANJA

1. Introdução

A linguagem das categorias é uma linguagem muito útil em certas áreas da matemática, e em Topologia Algébrica em particular. A ideia básica é que, sejam quais forem os objectos de estudo, existe uma noção natural de aplicação ou morfismo entre objectos que deve ser tomada em conta. Os objectos e os morfismos juntos formam uma *categoria*, que definiremos a seguir. Como sempre, é uma boa ideia abstrair noções aplicáveis a cada categoria particular mas cuja definição e propriedades dependem apenas dos axiomas verificados por qualquer categoria. É isso que faremos a seguir para alguns dos conceitos mais simples e úteis.

2. Categorias, Functores e transformações naturais

Nesta secção definimos categorias. As categorias são elas mesmas objectos de estudo por isso devemos considerar morfismos entre elas, que se chamam *functores*. Por sua vez, estamos também interessados em estudar functores e portanto interessa considerar morfismos entre functores que se chamam *transformações naturais*.

Categorias.

Definição 2.1. *Uma* ***categoria*** $\mathcal{C}$ *consiste em*

- *Uma classe*[1] *de* objectos $\mathrm{Ob}(\mathcal{C})$
- *Para cada par de objectos* $X, Y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ *um conjunto de* morfismos *ou* setas $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$
- *Para cada* $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ *um* elemento identidade $\mathrm{id}_X \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, X)$
- *Para cada triplo de objectos* $X, Y, Z \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ *uma aplicação de composição*

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y) \times \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y,Z) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Z) \\ (f,g) & \mapsto & g \circ f \end{array}$$

verificando os axiomas
(1) $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$
(2) $f \circ \mathrm{id}_X = f, \mathrm{id}_Y \circ f = f$

Exemplo 2.2. Exemplos de categorias:

(a) A categoria dos conjuntos $\mathcal{S}et$: Os objectos são os conjuntos, e os morfismos as funções. A identidade e a composição são as usuais.
(b) A categoria dos grupos $\mathcal{G}roup$: Os objectos são os grupos e os morfismos os homomorfismos de grupos. A identidade e a composição são as usuais.
(c) A categoria dos grupos abelianos $\mathcal{A}b$: Os objectos são os grupos abelianos. Os morfismos são os homomorfismos de grupos.
(d) A categoria dos anéis comutativos $\mathcal{R}ing$: Os objectos são os anéis comutativos (com identidade) e os morfismos são homomorfismos de anéis (que preservam a identidade).
(e) A categoria das variedades diferenciáveis $\mathcal{M}an$: Os objectos são variedades diferenciáveis e os morfismos são aplicacões diferenciáveis.

Date: December 30, 1999.

[1] Poder ser própria, isto é não ser um conjunto

(f) A categoria dos espaços topológicos $\mathcal{T}op$: Os objectos são espaços topológicos e os morfismos são as aplicações contínuas.
(g) A categoria dos espaços topológicos pontuados $\mathcal{T}op_*$:

$$\begin{aligned} \mathrm{Ob}(\mathcal{T}op_*) &= \{(X, x_0) : X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{T}op), x_0 \in X\} \\ \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}op_*}(\,(X, x_0), (Y, y_0)\,) &= \{f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}op}(X, Y) : f(x_0) = y_0\} \end{aligned}$$

A identidade e a composição são as usuais.
(h) A categoria dos pares de espaços topológicos $\mathcal{P}arTop$:

$$\begin{aligned} \mathrm{Ob}(\mathcal{T}op_*) &= \{(X, A) : A, X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{T}op), A \subset X\} \\ \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}op_*}(\,(X, A), (Y, B)\,) &= \{f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}op}(X, Y) : f(A) \subset B\} \end{aligned}$$

A identidade e a composição são as usuais.

Apenas com base nos axiomas verificados por uma categoria podemos dizer o que se entende por objectos equivalentes:

Definição 2.3. *Seja $\mathcal{C}$ uma categoria. Um morfismo $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ diz-se um **isomorfismo** se existe $g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, X)$ tal que $g \circ f = \mathrm{id}_X$ e $f \circ g = \mathrm{id}_Y$.*

Note que nos exemplos de categoria acima, um isomorfismo é precisamente a noção usual de equivalência entre objectos. Por exemplo, um isomorfismo em $\mathcal{T}op$ não é mais do que um homeomorfismo.

Para definirmos a categoria que é o objecto de estudo da topologia algébrica precisamos de alguns preliminares.

Definição 2.4. *Duas aplicações contínuas $f, g : X \longrightarrow Y$ são **homotópicas** se existe uma aplicação contínua $H : X \times [0, 1] \longrightarrow Y$ tal que $H(x, 0) = f(x)$ e $H(x, 1) = g(x)$. Nesse caso H chama-se uma **homotopia** entre f e g. A relação de homotopia escreve-se $f \sim g$.*

Intuitivamente, duas aplicações são homotópicas, se se podem deformar contínuamente uma na outra. É fácil de verificar que a relação de homotopia é uma relação de equivalência no conjunto das aplicações contínuas entre dois espaços. Além disso, se $f \sim g$ então $f \circ h \sim g \circ h$ e $j \circ f \sim j \circ g$ portanto a seguinte definição faz sentido.

Definição 2.5. *A **categoria de homotopia** $\mathcal{H}o$ é a categoria definida da seguinte forma:*

$$\begin{aligned} \mathrm{Ob}(\mathcal{H}o) &= \mathrm{Ob}(\mathcal{T}op) \\ \mathrm{Hom}_{\mathcal{H}o}(X, Y) &= \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}op}(X, Y)/\sim \end{aligned}$$

Isto é os morfismos são as classes de homotopia de aplicações contínuas entre X e Y. A identidade e a composição são induzidas pela composição e identidade em $\mathcal{T}op$.

*Uma aplicação contínua $f : X \longrightarrow Y$ cuja classe de homotopia é um isomorfismo em $\mathcal{H}o$ chama-se uma **equivalência de homotopia** e diz-se então que X e Y têm o mesmo **tipo de homotopia**.*

A notação utilizada usualmente para o conjunto das classes de homotopia entre dois espaços topológicos é a seguinte:

$$[X, Y] := \mathrm{Hom}_{\mathcal{H}o}(X, Y)$$

Interessa também considerar a noção de homotopia apropriada às categorias $\mathcal{T}op_*$ e $\mathcal{P}arTop$. Nesse caso, as homotopias devem preservar respectivamente o ponto de base ou o subespaço. E dizem-se então **homotopias baseadas** ou **homotopias relativas** respectivamente. A notação utilizada para o conjunto das classes de homotopia é neste caso

$$[(X, x_o), (Y, y_0)]$$

ou

$$[(X, A), (Y, B)]$$

respectivamente. Estas noções permitem definir as categorias de homotopia dos espaços pontuados e dos pares de espaços topológicos, tal como acima.

Os exemplos anteriores são do género que foi referido na introdução. Isto é trata-se de categorias de objectos que são usualmente estudados nas várias áreas da matemática. No entanto, é claro dos axiomas que definem uma categoria que uma categoria é uma *estrutura algébrica*. Eis exemplos mais próximos deste ponto de vista:

Exemplo 2.6. (a) A categoria $\mathcal{G}$ de um grupo: Seja G um grupo. A categoria $\mathcal{G}$ é definida por:

$$\begin{aligned} \mathrm{Ob}(\mathcal{G}) &= \{*\} \\ \mathrm{Hom}_{\mathcal{G}}(*,*) &= G \end{aligned}$$

A identidade do único objecto $*$ é a identidade do grupo e a composição de morfismos é dada pela operação de multiplicação do grupo.

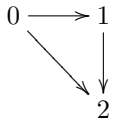
(b) A categoria $\mathbf{n}$: Seja n um número natural. A categoria $\mathbf{n}$ é definida por:

$$\begin{aligned} \mathrm{Ob}(\mathbf{n}) &= \{0,1,\ldots,n\} \\ \mathrm{Hom}_{\mathbf{n}}(k,l) &= \begin{cases} \emptyset & \text{se } k > l \\ \{*\} & \text{se } k \leq l \end{cases} \end{aligned}$$

A identidade é definida da única maneira possível, a composição das setas $k \longrightarrow l$ e $l \longrightarrow m$ é definida como sendo a seta $k \longrightarrow m$.

Uma maneira de representar uma categoria é desenhando um diagrama com objectos e setas entre eles representando os morfismos (é costume omitir as identidades). A composição é indicada por meio da imposição que o diagrama *comute*. Isto é, que dados dois percursos entre objectos no diagrama as correspondentes composições de setas sejam iguais.

Eis, por exemplo, uma representação da categoria **2** do exemplo acima:



Nota 2.7. Note que no exemplo (a) acima poderíamos ter considerado um monóide em vez de um grupo. De facto, uma categoria com um único objecto não é mais do que um monóide, e portanto podemos pensar numa categoria como um "monóide generalizado".

Outros exemplos de categorias podem ser obtidos fazendo construções sobre uma categoria $\mathcal{C}$. Um exemplo particularmente importante advém do facto dos axiomas na definição de uma categoria serem *auto-duais*. Isto é, se numa categoria $\mathcal{C}$ trocarmos o sentido de todas as setas e invertermos a ordem da composição, obtemos ainda uma categoria. Isso faz com que dada qualquer definição ou proposição sobre categorias, *exista sempre uma definição ou proposição* ***dual*** que se obtém invertendo o sentido de todas as setas. Veremos vários exemplos adiante.

Definição 2.8. *Seja $\mathcal{C}$ uma categoria. A* ***categoria oposta*** *de $\mathcal{C}$ é a categoria $\mathcal{C}^{op}$ definida por:*

$$\begin{aligned} \mathrm{Ob}(\mathcal{C}^{op}) &= \mathrm{Ob}(\mathcal{C}) \\ \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^{op}}(X,Y) &= \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y,X) \end{aligned}$$

A identidade em $\mathcal{C}^{op}$ é igual á identidade em $\mathcal{C}$, e a lei de composição é definida por:

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^{op}}(X,Y) \times \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^{op}}(Y,Z) &\longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^{op}}(X,Z) \\ (f,g) &\mapsto f \circ g \end{aligned}$$

Functores.

Definição 2.9. *Sejam $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ categorias. Um* ***functor*** *$\mathcal{F} : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ consiste em*

- *Uma correspondência unívoca*[2]*, chamada* ***função objectos****:*

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Ob}(\mathcal{C}) & \longrightarrow & \mathrm{Ob}(\mathcal{D}) \\ X & \mapsto & \mathcal{F}(X) \end{array}$$

- *Para cada par de objectos* $X, Y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ *uma função chamada* ***função morfismos****:*

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(\mathcal{F}(X),\mathcal{F}(Y)) \\ f & \mapsto & \mathcal{F}(f) \end{array}$$

verificando

$$\mathcal{F}(f \circ g) = \mathcal{F}(f) \circ \mathcal{F}(g)$$

Os functores chamam-se também ***functores covariantes****. Um* ***functor contravariante*** *de* $\mathcal{C}$ *em* $\mathcal{D}$ *é um functor* $\mathcal{C}^{op} \longrightarrow \mathcal{D}$*.*

Note-se que não é necessário exigir que um functor preserve as identidades. Isso é uma consequência imediata do facto de preservar a composição.

Um functor contravariante é simplesmente um functor que inverte o sentido das setas. Veremos exemplos já a seguir.

Exemplo 2.10. Exemplos de functores:

(a) O functor $\pi_0 : \mathcal{T}op \longrightarrow \mathcal{S}et$, que a X associa o conjunto $\pi_0(X)$ das componentes conexas por caminhos de X e que a uma aplicação contínua f associa a função

$$\pi_0(f) : \pi_0(X) \longrightarrow \pi_0(Y)$$

definida por $\pi_0(f)([x]) = [f(x)]$ (onde $[x]$ designa a componente conexa por caminhos a que $x \in X$ pertence).

Na realidade este functor verifica $\pi_0(f) = \pi_0(g)$ se $f \sim g$ e portanto define também um functor $\pi_0 : \mathcal{H}o \longrightarrow \mathcal{S}et$.

(b) O functor esquecido $\mathcal{F} : \mathcal{G}roup \longrightarrow \mathcal{S}et$ que a um grupo associa o conjunto subjacente e a um homomorfismo de grupos associa a função subjacente.

(c) Se $\mathcal{C}$ designa a categoria dos domínios integrais e $\mathcal{D}$ a categoria dos corpos (ambas subcategorias de $\mathcal{R}ing$), existe um functor $K(-)$ que associa a $R \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ o seu corpo de fracções $K(R) \in \mathrm{Ob}(\mathcal{D})$ e que é definido nos morfismos por:

$$\begin{array}{ccc} K(R_1) & \stackrel{K(f)}{\longrightarrow} & K(R_2) \\ \dfrac{a}{b} & \mapsto & \dfrac{f(a)}{f(b)} \end{array}$$

(d) Sendo $\mathcal{V}ect$ a categoria dos espaços vectoriais, existe um functor contravariante $(-)^* : \mathcal{V}ect \longrightarrow \mathcal{V}ect$ que associa a um espaço vectorial V o seu dual, e a uma aplicação linear $f : V \longrightarrow W$ a sua transposta

$$f^* : W^* \longrightarrow V^*$$

(e) O functor contravariante $C^\infty(-;\mathbb{R}) : \mathcal{M}an \longrightarrow \mathcal{R}ing$ que associa a uma variedade diferenciável M as funções reais diferenciáveis em M e cuja função morfismo associa a $f : M \longrightarrow N$ o homomorfismo de anéis

$$\begin{array}{ccc} C^\infty(N;\mathbb{R}) & \stackrel{f^*}{\longrightarrow} & C^\infty(M;\mathbb{R}) \\ \varphi & \mapsto & \varphi \circ f \end{array}$$

Há também exemplos de functores que podem ser construídos apenas com base na definição de categoria.

Exemplo 2.11. Sejam $\mathcal{C}$ uma categoria, e $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$.

[2]Pode não ser uma função porque os objectos não são necessáriamente conjuntos

(a) O functor $\mathcal{F}_X : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{S}et$ é definido da seguinte forma: A função objecto é dada por

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Ob}(\mathcal{C}) & \xrightarrow{\mathcal{F}_X} & \mathrm{Ob}(\mathcal{S}et) \\ A & \mapsto & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, A) \end{array}$$

e dado um morfismo $f : A \longrightarrow B$ em $\mathcal{C}$, $\mathcal{F}(f)$ é definido por

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, A) & \xrightarrow{\mathcal{F}_X(f)} & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, B) \\ g & \mapsto & f \circ g \end{array}$$

(b) O functor contravariante $\mathcal{F}^X : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{S}et$ é definido da seguinte forma: A função objecto é dada por

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Ob}(\mathcal{C}) & \xrightarrow{\mathcal{F}^X} & \mathrm{Ob}(\mathcal{S}et) \\ A & \mapsto & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, X) \end{array}$$

e dado um morfismo $f : A \longrightarrow B$ em $\mathcal{C}$, $\mathcal{F}(f)$ é definido por

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(B, X) & \xrightarrow{\mathcal{F}^X(f)} & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, X) \\ g & \mapsto & g \circ f \end{array}$$

Os functores do exemplo anterior, (ou mais precisamente os naturalmente equivalentes[3] a eles) chamam-se *functores representáveis*. Muitos dos functores de interesse em topologia algébrica são representáveis. Uma das razões porque este conceito é importante é que quando um functor é representável, é suficiente estudar o objecto que o representa.

Transformações naturais.

Definição 2.12. *Sejam $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ categorias, e $\mathcal{F}, \mathcal{G} : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ dois functores. Uma* ***transformação natural*** *entre $\mathcal{F}$ e $\mathcal{G}$ consiste em, para cada objecto X de $\mathcal{C}$ uma aplicação*

$$\phi_X : \mathcal{F}(X) \longrightarrow \mathcal{G}(X)$$

tal que, dado qualquer morfismo $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ o seguinte diagrama comuta

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}(X) & \xrightarrow{\mathcal{F}(f)} & \mathcal{F}(Y) \\ \downarrow{\scriptstyle \phi_X} & & \downarrow{\scriptstyle \phi_Y} \\ \mathcal{G}(X) & \xrightarrow{\mathcal{G}(f)} & \mathcal{G}(Y) \end{array}$$

Uma transformação natural ϕ diz-se uma ***equivalência natural*** *se para todo o X, o morfismo ϕ_X é invertível.*

Note que a inversa de uma equivalência natural (definida como sendo o morfismo inverso em cada objecto) é também uma equivalência natural.

A definição anterior com as alterações óbvias, é também válida para functores contravariantes.

Exemplo 2.13. Exemplos de transformações naturais.

(a) Considerem-se os seguintes functores:

- $(-)^\times : \mathcal{R}ing \longrightarrow \mathcal{G}roup$ que a um anel R associa o grupo multiplicativo $R^\times$ dos elementos invertíveis no anel e a um homomorfismo de anéis a restrição ao subconjunto dos elementos invertíveis.

[3] No sentido da secção seguinte

- $\mathrm{GL}(n;-) : \mathcal{R}ing \longrightarrow \mathcal{G}roup$ que a um anel associa o grupo $\mathrm{GL}(n;R)$ das matrizes $n \times n$ invertíveis com entradas no anel R e a um homomorfismo de anéis $f : R \longrightarrow S$ o homomorfismo de grupos $(a_{ij}) \mapsto (f(a_{ij}))$.

Então $\det_R : GL(n;R) \longrightarrow R^\times$, que associa a cada matriz invertível o seu determinante é uma transformação natural.

(b) Considere-se os functores identidade id e duplo dual $(-)^{**} : \mathcal{V}ect \longrightarrow \mathcal{V}ect$. Então

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{\phi_V} & V^{**} \\ v & \mapsto & (f \mapsto f(v)) \end{array}$$

onde $f \in V^*$ é uma transformação natural. Se restringirmos ϕ à subcategoria dos espaços vectoriais de dimensão finita obtemos uma equivalência natural.

Nota 2.14. O sinal = entre dois objectos matemáticos significa que estes são naturalmente equivalentes. Se formos a ver bem as coisas, *nada* é exactamente igual em Matemática. Mas muitas coisas são naturalmente equivalentes. Por isso se costuma escrever se V é um espaço vectorial de dimensão finita que $V = V^{**}$.

Aproveitamos aqui para definir precisamente o que se entende por functores representáveis.

Definição 2.15. *Sejam $\mathcal{C}$ uma categoria e $\mathcal{F} : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{S}et$ um functor. $\mathcal{F}$ diz-se **representável**, se é naturalmente equivalente a um functor $\mathcal{F}_X$ definido no Exemplo 2.11 para algum X em $\mathrm{Ob}(\mathcal{C})$. Um functor contravariante $\mathcal{F} : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{S}et$ diz-se **representável**, se é naturalmente equivalente a um functor $\mathcal{F}^X$ definido no Exemplo 2.11 para algum X em $\mathrm{Ob}(\mathcal{C})$. Em qualquer dos casos, diz-se que X é um **objecto representante** de $\mathcal{F}$.*

3. Propriedades universais

Propriedades universais são propriedades que identificam uma seta por comparação com todas as "outras setas do mesmo tipo". É a referência a todas as outras setas que justifica o nome universal. Esta ideia é melhor ilustrada por meio de exemplos:

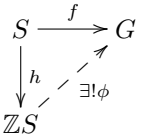
Exemplo 3.1. O grupo abeliano *livre* gerado por um conjunto S: Seja S um conjunto fixo e considerem-se todas as funções $f : S \longrightarrow G$ onde G é um grupo abeliano.

Entre todas estas funções, existe uma especial: considere-se o grupo

$$\mathbb{Z}S := \left\{ \sum_{i \in I} n_i x_i : n_i \in \mathbb{Z}, x_i \in S, I \text{ finito} \right\}$$

formado pelas combinações lineares finitas de pontos de S com coeficientes em $\mathbb{Z}$ [4]. Considere-se a função $h : S \longrightarrow \mathbb{Z}S$ que a cada $x \in S$ associa a combinação linear $1x$.

Esta função tem a seguinte *propriedade universal*: Dada outra seta do mesmo tipo, $f : S \longrightarrow G$ existe um único *homomorfismo de grupos* $\phi : \mathbb{Z}S \longrightarrow G$ tal que $f = \phi \circ h$. Esta propriedade costuma indicar-se por meio do diagrama:



Isto é verdade porque, se ϕ é um homomorfismo que faz o diagrama comutar, então

$$\phi(\sum_i n_i x_i) = \sum_i n_i \phi(x_i) = \sum_i n_i f(x_i)$$

pelo que ϕ fica únicamente determinado em $\mathbb{Z}S$. Por outro lado, a expressão acima define um homomorfismo tal que $\phi \circ h = f$.

[4] Formalmente, $\mathbb{Z}S$ é o grupo das funções $S \longrightarrow \mathbb{Z}$ que associam 0 a todos os pontos de S excepto um número finito, com a soma definida pontualmente.

Por palavras, a propriedade universal diz: dar um homomorfismo de grupos entre $\mathbb{Z}S$ e G é *a mesma coisa* que dar uma função de S em G. Daí, o grupo G se chamar o grupo *livremente* gerado por S. Os pontos de S geram o grupo e não há quaisquer relações entre eles. Para dar um homomorfismo a partir de G podemos escolher livremente os valores a dar aos geradores.

É importante notar que a propriedade universal determina o grupo[5] $\mathbb{Z}S$ a menos de um isomorfismo *único*: De facto, suponhamos que $S \xrightarrow{h_1} U_1$ e $S \xrightarrow{h_2} U_2$ são funções com a propriedade universal (qualquer outra função do mesmo tipo factoriza por elas de forma única). Então

$$\begin{array}{ccc} S & \xrightarrow{h_1} & U_1 \\ {\scriptstyle h_2}\downarrow & \nearrow_{\exists!\psi} \swarrow_{\exists!\phi} & \\ U_2 & & \end{array}$$

Mas então os seguintes diagramas comutam

$$\begin{array}{ccc} S & \xrightarrow{h_1} & U_1 \\ {\scriptstyle h_1}\downarrow & \swarrow_{\psi\circ\phi} & \\ U_1 & & \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} S & \xrightarrow{h_2} & U_2 \\ {\scriptstyle h_2}\downarrow & \nearrow_{\phi\circ\psi} & \\ U_2 & & \end{array}$$

Pela propriedade universal aplicada a estes diagramas, concluímos que $\phi \circ \psi = \mathrm{id}_{U_1}$ e $\psi \circ \phi = \mathrm{id}_{U_2}$. Isto é ϕ e ψ são isomorfismos inversos, que estabelecem uma equivalência *única* entre as duas setas h_1 e h_2.

Exemplo 3.2. O grupo quociente de um grupo G por um seu subgrupo J: Considerem-se os homomorfismos de grupos $f : G \longrightarrow H$ tais que $f(J) = 0$. O grupo quociente G/H é a imagem da seta g com a propriedade universal

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{f} & H \\ {\scriptstyle g}\downarrow & \nearrow_{\exists!\phi} & \\ G/J & & \end{array}$$

A propriedade universal diz que dar um homomorfismo de G/J é a mesma coisa que dar um homomorfismo de G que se anule em J. Como acima, se existir, o grupo quociente é único. Um modelo para o grupo quociente é dado da seguinte forma: A relação $x \sim y \equiv x - y \in J$ define uma relação de equivalência em G. G/J é o conjunto quociente com a soma definida por $[x] + [y] := [x + y]$. É fácil ver que a seta $g : G \longrightarrow G/J$ tal que $g(x) = [x]$ é universal.

Exemplo 3.3. O produto tensorial de dois grupos abelianos G_1 e G_2: Sejam G_1 e G_2 grupos abelianos fixos e. Recorda-se que sendo H um grupo abeliano, uma aplicação $f : G_1 \times G_2 \longrightarrow H$ se diz **bilinear** se

$$f(x + y, z) = f(x, z) + f(y, z) \qquad f(x, w + z) = f(x, w) + f(x, z)$$

Considerem-se todas as aplicações bilineares $f : G_1 \times G_2 \longrightarrow H$. Então, o produto tensorial é o contradomínio da aplicação g com a propriedade universal:

$$\begin{array}{ccc} G_1 \times G_2 & \xrightarrow{f} & H \\ {\scriptstyle g}\downarrow & \nearrow_{\exists!\phi} & \\ G_1 \otimes G_2 & & \end{array}$$

Isto é, para qualquer aplicação bilinear f existe um único homomorfismo de grupos ϕ tal que $f = \phi \circ g$.

[5]Mais ainda, determina a seta $S \longrightarrow \mathbb{Z}S$

Notem que pelo argumento do exemplo anterior, se existir, o produto tensorial está únicamente determinado pela propriedade acima. Aliás, esta *é a maneira certa de pensar no produto tensorial*. Independentemente da construção (já vamos dar uma), o produto tensorial $G_1 \otimes G_2$ é o único grupo abeliano tal que dar um homomorfismo dele num grupo H *é a mesma coisa* que dar uma aplicação bilinear de $G_1 \times G_2$ em H.

Podemos construir um modelo para o produto tensorial da seguinte forma. Considere-se o grupo livre $\mathbb{Z}G_1 \times G_2$ gerado pelo conjunto $G_1 \times G_2$ e considere-se o subgrupo J de $\mathbb{Z}G_1 \times G_2$ gerado pelos elementos da forma $(x+y,z)-(x,z)-(y,z) \in \mathbb{Z}G_1 \times G_2$ e $(x,w+z)-(x,w)-(x,z) \in \mathbb{Z}G_1 \times G_2$. Isto costuma escrever-se

$$J = <(x+y,z)-(x,z)-(y,z),(x,w+z)-(x,w)-(x,z)|x,y \in G_1, w,z \in G_2>$$

Defina-se

$$G_1 \otimes G_2 = (\mathbb{Z}G_1 \times G_2)/J$$

É costume representar a classe de equivalência determinada pelo elemento (x,z) por $x \otimes z$. Defina-se $f : G_1 \times G_2 \longrightarrow G_1 \otimes G_2$ por

$$f(g_1,g_2) = g_1 \otimes g_2$$

Então é fácil verificar que f tem a propriedade universal requerida.

4. Limites e colimites

5. Functores adjuntos

References

[Ada] J. Adámek, H. Herrlich e G. Strecker, *Abstract and concrete categories. The joy of cats.* , Pure and Applied Mathematics. John Wiley & Sons, Inc., New York, 1990.

[Mac] S. MacLane, *Categories for the working mathematician*, GTM 5, Springer Verlag, 1971.