Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

ANÁLISE MATEMÁTICA III

TODOS OS CURSOS

PRIMEIRO TESTE - 4 DE MAIO DE 2002 - DAS 9H ÀS 10H30

(1) Considere a seguinte região em $\mathbb{R}^3$

$$V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq z \leq 1 - (\sqrt{x^2+y^2} - 2)^2,\ x \geq 0, y \geq 0\}.$$

(a) Escreva uma expressão para o volume de V em termos de integrais iterados da forma $\int \left(\int \left(\int dx \right) dy \right) dz$.
(b) Sendo $f(x,y,z) = \frac{z-1}{\sqrt{x^2+y^2}}$, calcule $\int_V f$.

Resolução:

(a) Em V temos $0 \leq z \leq 1$. Para cada $z \in [0,1]$, o corte de V é definido pelas equações

$$1 - (\sqrt{x^2+y^2} - 2)^2) \geq z, \quad x \geq 0, \quad y \geq 0.$$

Uma vez que

$$\begin{aligned} 1 - (\sqrt{x^2+y^2} - 2)^2) \geq z &\iff (\sqrt{x^2+y^2} - 2)^2 \leq 1 - z \\ &\iff 2 - \sqrt{1-z} \leq \sqrt{x^2+y^2} \leq 2 + \sqrt{1-z} \end{aligned}$$

conlcluimos que o corte se trata de um quarto de coroa circular no primeiro quadrante, entre as circunferências de raios $2-\sqrt{1-z}$ e $2+\sqrt{1-z}$. Portanto o volume é dado pela expressão

$$\begin{aligned} \int_V 1 = \int_0^1 \left(\int_0^{2-\sqrt{1-z}} \left(\int_{\sqrt{(2-\sqrt{1-z})^2-y^2}}^{\sqrt{(2+\sqrt{1-z})^2-y^2}} dx \right) dy \right. &+ \\ \left. + \int_{2-\sqrt{1-z}}^{2+\sqrt{1-z}} \left(\int_0^{\sqrt{(2+\sqrt{1-z})^2-y^2}} dx \right) dy \right) dz. & \end{aligned}$$

(b) Em coordenadas cilíndricas, a região V escreve-se

$$0 \leq z \leq 1 - (r-2)^2, \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2},$$

Portanto temos

$$\begin{aligned} \int_V f &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_1^3 \left(\int_0^{1-(r-2)^2} \frac{z-1}{r} r dz \right) dr \right) d\theta \\ &= \frac{\pi}{2} \int_1^3 \frac{1}{2} \left((r-2)^4 - 1 \right) dr \\ &= \frac{\pi}{2} \left(\frac{1}{5} - 1 \right) = -\frac{2\pi}{5}. \end{aligned}$$

(2) Seja $S \subset \mathbb{R}^2$ a região definida por

$$S = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x}{2} \leq y \leq x,\ e^{-x} \leq y \leq 3 + e^{-x}\right\}.$$

Utilizando a mudança de variável

$$\begin{cases} u = \frac{y}{x} \\ v = y - e^{-x} \end{cases}$$

calcule a massa de uma placa plana com a forma de S se a função densidade de massa for dada pela expressão $f(x,y) = \left(\frac{xe^{-x}+y}{x^2}\right)\frac{y}{x}$.

Resolução: A massa da placa é dada pelo integral

$$M = \int_S \left(\frac{xe^{-x}+y}{x^2}\right)\frac{y}{x}.$$

Nas coordenadas (u,v), a região S escreve-se

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} \leq \frac{y}{x} \leq 1, \quad 0 \leq y - e^{-x} \leq 3 \\ \iff &\frac{1}{2} \leq u \leq 1, \quad 0 \leq v \leq 3. \end{aligned}$$

O factor de conversão de volumes é

$$\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| = \frac{1}{|\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}|} = \frac{1}{|\begin{vmatrix} -\frac{y}{x^2} & \frac{1}{x} \\ e^{-x} & 1 \end{vmatrix}|} = \frac{x^2}{xe^{-x}+y}$$

Logo aplicando a fórmula de mudança de variável temos

$$\begin{aligned} M &= \int_{\frac{1}{2}}^{1}\left(\int_0^3 \left(\frac{xe^{-x}+y}{x^2}\right)\frac{y}{x}\left(\frac{x^2}{xe^{-x}+y}\right)dv\right)du \\ &= \int_{\frac{1}{2}}^{1}\left(\int_0^3 udv\right)du \\ &= \int_{\frac{1}{2}}^{1} 3udu \\ &= \frac{3}{2}\left(1 - \frac{1}{4}\right) = \frac{9}{8}. \end{aligned}$$

(3) Considere o campo vectorial $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definido pela expressão

$$F(x,y,z) = (2xyz, x^2z, x^2y + z),$$

e a curva C definida por

$$C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 4, x + y + e^x + e^y = 2e + 2\}.$$

(a) Determine se o campo F é um gradiente.
(b) Sendo α um arco da curva C com início no ponto $(1,1,\sqrt{2})$ e fim no ponto $(1,1,-\sqrt{2})$ calcule

$$\int_\alpha F \cdot dg.$$

(c) Usando o teorema da função implícita, mostre que numa vizinhança do ponto $(1,1,\sqrt{2})$ se pode utilizar a coordenada x para parametrizar a curva C (isto é, que os pontos de C se podem escrever na forma $(x, f(x), g(x))$ com f e g de classe C^1) e aproveite para calcular um vector tangente a C no ponto $(1,1,\sqrt{2})$.

Resolução:

(a) F é um campo de classe C^1 em $\mathbb{R}^3$. Temos

$$\begin{aligned}\frac{\partial F_1}{\partial y} &= 2xz = \frac{\partial F_2}{\partial x}\\ \frac{\partial F_1}{\partial z} &= 2xy = \frac{\partial F_3}{\partial x}\\ \frac{\partial F_2}{\partial z} &= x^2 = \frac{\partial F_3}{\partial y}\end{aligned}$$

logo F é fechado. Uma vez que $\mathbb{R}^3$ é um conjunto em estrela conclui-se que F é um gradiente.

(b) Um potencial ϕ para F obtem-se resolvendo o sistema

$$\left\{\begin{array}{l}\frac{\partial \phi}{\partial x} = 2xyz\\ \frac{\partial \phi}{\partial y} = x^2z\\ \frac{\partial \phi}{\partial z} = x^2y + z\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l}\phi(x,y,z) = x^2yz + C_1(y,z)\\ \phi(x,y,z) = x^2yz + C_2(x,z)\\ \phi(x,y,z) = x^2yz + \frac{z^2}{2} + C_3(x,y)\end{array}\right.$$

donde se conlclui que um potencial para F é dado por

$$\phi(x,y,z) = x^2yz + \frac{z^2}{2}.$$

Pelo teorema fundamental do cálculo temos que

$$\int_\alpha F \cdot dg = \phi(1,1,-\sqrt{2}) - \phi(1,1,\sqrt{2}) = -2\sqrt{2}.$$

(c) A curva C é definida pelo conjunto de nível $(0,0)$ da função $G(x,y,z) = (x^2 + y^2 + z^2 - 4, x + y + e^x + e^y - 2e - 2)$. Esta função é de classe C^1 e $G(1,1,\sqrt{2}) = (0,0)$. Temos

$$\frac{\partial G}{\partial (y,z)} = \left|\begin{array}{cc} 2y & 2z\\ 1+e^y & 0\end{array}\right|,$$

logo

$$\frac{\partial G}{\partial (y,z)}(1,1,\sqrt{2}) = -2\sqrt{2}(1+e) \neq 0$$

e portanto o teorema da função implícita garante a existência de uma vizinhança do ponto $(1,1,\sqrt{2})$ onde se pode utilizar a coordenada x para parametrizar a curva C. Um vector tangente a C no ponto $(1,1,\sqrt{2})$ é dado por $(1, f'(1), g'(1))$. Para calcular as derivadas das funções f, g definidas implicitamente resolvemos o sistema

$$\left\{\begin{array}{l}2x + 2yf'(x) + 2zg'(x) = 0\\ 1 + e^x + (1+e^y)f'(x) = 0\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l}2 + 2f'(1) + 2\sqrt{2}g'(1) = 0\\ 1 + e + (1+e)f'(1) = 0\end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{l}g'(1) = 0\\ f'(1) = -1\end{array}\right.$$

Concluimos portanto que um vector tangente a C no ponto $(1,1,\sqrt{2})$ é o vector $(1,-1,0)$.

(4) Demonstre o Teorema de Green para regiões elementares.
Resolução: Uma região elementar é um conjunto $D \subset \mathbb{R}^2$ para o qual existem intervalos $[a,b],[c,d] \subset \mathbb{R}$ e funções $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}, h,k:[c,d]\to\mathbb{R}$ seccionalmente de classe C^1 tais que

$$\begin{aligned} D &= \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : a\le x\le b, f(x)\le y\le g(x)\} \\ &= \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : c\le y\le d, h(y)\le x\le k(y)\}. \end{aligned}$$

O teorema de Green afirma que se D é uma região elementar e se $F=(P,Q)$ é um campo vectorial de classe C^1 em D, então

$$\int\int_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy = \oint_C Pdx+Qdy$$

onde C designa a curva seccionalmente regular fechada que constitui a fronteira de D percorrida no sentido directo.

Pelo teorema fundamental do cálculo, temos

$$\begin{aligned} \int\int_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy &= \int_a^b \left(\int_{f(x)}^{g(x)} -\frac{\partial P}{\partial y}dy\right)dx + \int_c^d \left(\int_{h(y)}^{k(y)} \frac{\partial Q}{\partial x}dx\right)dy \\ &= \int_a^b P(x,f(x))dx - \int_a^b P(x,g(x))dx + \\ &+ \int_c^d Q(k(y),y)dy - \int_c^d Q(h(y),y)dy. \end{aligned}$$

Por outro lado, a curva C pode ser escrita como a união de curvas seccionalmente regulares

$$\begin{aligned} C_1 &= \{(x,f(x)) : x\in[a,b]\} \\ C_2 &= \{(b,y) : y\in[f(b),g(b)]\} \\ C_3 &= \{(x,g(x)) : x\in[a,b]\} \\ C_4 &= \{(a,y) : x\in[f(a),g(a)]\} \end{aligned}$$

onde C_1, C_2 são percorridas no sentido crescente de x e y respectivamente, enquanto que C_3 e C_4 são percorridas no sentido de x e y descrescente. Conclui-se que

$$\begin{aligned} \oint_C Pdx &= \int_a^b P(x,f(x))dx + \int_{f(b)}^{g(b)} 0dy - \int_a^b P(x,g(x))dx - \int_{f(a)}^{g(a)} 0dy \\ &= \int_a^b P(x,f(x))dx - \int_a^b P(x,g(x))dx \end{aligned}$$

De forma análoga se conclui que

$$\begin{aligned} \oint_C Qdy &= -\int_c^d Q(h(y),y)dy - \int_{h(d)}^{k(d)} 0dx + \int_c^d Q(k(y),y)dy + \int_{h(c)}^{k(c)} 0dx \\ &= \int_c^d Q(h(y),y)dy + \int_c^d Q(k(y),y)dy \end{aligned}$$

o que conclui a demonstração.