Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

ANÁLISE MATEMÁTICA III

TODOS OS CURSOS

PRIMEIRO TESTE - 4 DE MAIO DE 2002 - DAS 9H ÀS 10H30

apresente e justifique todos os cálculos

(1) Considere a seguinte região em $\mathbb{R}^3$

$$V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq z \leq 1 - (\sqrt{x^2+y^2} - 2)^2,\ x \geq 0, y \geq 0\}.$$

(3 val.) (a) Escreva uma expressão para o volume de V em termos de integrais iterados da forma $\int \left(\int \left(\int dx \right) dy \right) dz$.

(3 val.) (b) Sendo $f(x,y,z) = \frac{z-1}{\sqrt{x^2+y^2}}$, calcule $\int_V f$.

(2) Seja $S \subset \mathbb{R}^2$ a região definida por

$$S = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x}{2} \leq y \leq x,\ e^{-x} \leq y \leq 3 + e^{-x} \right\}.$$

(3 val.) Utilizando a mudança de variável

$$\begin{cases} u = \frac{y}{x} \\ v = y - e^{-x} \end{cases}$$

calcule a massa de uma placa plana com a forma de S se a função densidade de massa for dada pela expressão $f(x,y) = \left(\frac{xe^{-x}+y}{x^2} \right) \frac{y}{x}$.

(3) Considere o campo vectorial $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definido pela expressão

$$F(x,y,z) = (2xyz, x^2z, x^2y + z),$$

e a curva C definida por

$$C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 4, x + y + e^x + e^y = 2e + 2\}.$$

(3 val.) (a) Determine se o campo F é um gradiente.

(3 val.) (b) Sendo α um arco da curva C com início no ponto $(1,1,\sqrt{2})$ e fim no ponto $(1,1,-\sqrt{2})$ calcule

$$\int_\alpha F \cdot dg.$$

(3 val.) (c) Usando o teorema da função implícita, mostre que numa vizinhança do ponto $(1,1,\sqrt{2})$ se pode utilizar a coordenada x para parametrizar a curva C (isto é, que os pontos de C se podem escrever na forma $(x, f(x), g(x))$ com f e g de classe C^1) e aproveite para calcular um vector tangente a C no ponto $(1,1,\sqrt{2})$.

(2 val.) (4) Demonstre o Teorema de Green para regiões elementares.