ANÁLISE MATEMÁTICA III
RESUMOS
PRIMAVERA 01/02

GUSTAVO GRANJA

1. Definição e propriedades do integral em $\mathbb{R}^n$

1. Um *intervalo* aberto de $\mathbb{R}^n$ e' um conjunto da forma

$$]a_1, b_1[\times\cdots\times]a_n, b_n[:= \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : a_i < x_i < b_i\}$$

com $-\infty \leq a_i < b_i < +\infty$.

2. O *volume* (ou volume n-dimensional) de um intervalo é definido por

$$\mathrm{Vol}(]a_1, b_1[\times\cdot\times]a_n, b_n[) = (b_1 - a_1)\cdots(b_n - a_n).$$

3. Uma *partição* de um intervalo I é uma subdivisão de I em intervalos mais pequenos $I_1, \ldots, I_k$ disjuntos.

4. Se $I \subset \mathbb{R}^n$ é um intervalo aberto limitado, uma *função em escada* é uma função $s : I \to \mathbb{R}$ para a qual existe uma partição de I em subintervalos $\{I_j\}_{j=1,\ldots,k}$ tal que a restrição de s ao interior de cada intervalo I_j é contante ($= s_j \in \mathbb{R}$ digamos).

5. O *integral* de uma função em escada $s : I \to \mathbb{R}$ é definido por

$$\int_I s = \sum_{i=1}^{k} s_j \,\mathrm{Vol}(I_j).$$

6. Um conjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ tem *medida nula* se para todo o $\epsilon > 0$, existe uma colecção numerável $\{I_j\}_{j=1}^{\infty}$ de intervalos abertos de $\mathbb{R}^n$ tal que
   (a) $A \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} I_j$
   (b) $\sum_{j=1}^{\infty} \mathrm{Vol}(I_j) < \epsilon$

7. *Propriedades dos conjuntos com medida nula:*
   (a) Se B tem medida nula em $\mathbb{R}^n$ e $A \subset B$ então A também tem medida nula em $\mathbb{R}^n$.
   (b) Se $A_1, \ldots, A_n, \ldots$ são conjuntos com medida nula em $\mathbb{R}^n$ então $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ também tem medida nula. Isto é, uma união numerável de conjuntos com medida nula, tem medida nula.
   (c) Se $I \subset \mathbb{R}^n$ é um intervalo e $f : I \to \mathbb{R}$ é uma função contínua então o gráfico de f tem medida nula em $\mathbb{R}^{n+1}$.

8. Uma propriedade $P(x_1, \ldots, x_n)$ dos pontos de um conjunto de $\mathbb{R}^n$ é satisfeita *quase em toda a parte* (abreviado q.t.p.) se o conjunto dos pontos onde P não é satisfeita tem medida nula.

Date: June 6, 2002.

9. Seja $I \subset \mathbb{R}^n$ um intervalo. Uma função $f : I \to \mathbb{R}$ diz-se uma *função limite superior* se existe uma sucessão de funções em escada $s_k : I \to \mathbb{R}$ tal que
(a) $s_k(x_1, \ldots, x_n) \leq s_{k+1}(x_1, \ldots, x_n)$ q.t.p em I.
(b) $\lim s_k(x_1, \ldots x_n) = f(x_1, \ldots, x_n)$ q.t.p. em I.
(c) A sucessão dos integrais $\{\int_I s_k\}$ é limitada.

O *integral* de uma função limite superior f define-se da seguinte forma:

$$\int_I f = \lim_{k \to \infty} \int_I s_k.$$

10. Se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é uma função integrável no sentido de Riemann (isto é no sentido da Análise Matemática II) então f é uma função limite superior e o integral definido no ponto anterior coincide com o integral de Riemann (o integral que aprenderam em Análise Matemática II).

11. Se $I \subset \mathbb{R}^n$ é um intervalo compacto e $f : I \to \mathbb{R}$ é uma função contínua, então f é uma função limite superior.

12. Seja $I \subset \mathbb{R}^n$ um intervalo. Uma função $f : I \to \mathbb{R}$ diz-se *integrável* se existem funções limite superior $u, v : I \to \mathbb{R}$ tais que $f = u - v$. Nesse caso define-se o integral de f pela fórmula

$$\int_I f := \int_I u - \int_I v.$$

O conjunto das funções integráveis no intervalo I designa-se por $\mathcal{L}(I)$.

13. *Propriedades do integral:* Seja $I \subset \mathbb{R}^n$ um intervalo.
(1) O conjunto $\mathcal{L}(I)$ é um espaço vectorial. Isto é, se $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e $f, g \in \mathcal{L}(I)$ então $\alpha f + \beta g \in \mathcal{L}(I)$.
(2) Se $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e $f, g \in \mathcal{L}(I)$ então

$$\int_I (\alpha f + \beta g) = \alpha \int_I f + \beta \int_I g.$$

(3) Se $f \in \mathcal{L}(I)$ e $g = f$ q.t.p. em I então $g \in \mathcal{L}(I)$ e $\int_I g = \int_I f$.
(4) Se $f, g \in \mathcal{L}(I)$ e $f \leq g$ q.t.p em I então $\int_I f \leq \int_I g$.
(5) Se $f \in \mathcal{L}(I)$ então $|f| \in \mathcal{L}(I)$ e

$$\left| \int_I f \right| \leq \int_I |f|.$$

(6) Se $J \subset I$ é um intervalo e $f \in \mathcal{L}(I)$, então $f \in \mathcal{L}(J)$.
(7) Se $I = I_1 \cup I_2$ com I_1, I_2 intervalos disjuntos então

$$\int_I f = \int_{I_1} f + \int_{I_2} f.$$

2. Cálculo de integrais e aplicações físicas.

1. Teorema de Fubini: Se $A \subset \mathbb{R}^n, B \subset \mathbb{R}^m$ são intervalos e $f \in \mathcal{L}(A \times B)$ então:

(1) A função $y \to f(x,y)$ é integrável em B para quase todo o $x \in A$.

(2) A função $x \to \int_B f(x,y)dy$ é integrável em A.

(3)

$$\int_{A\times B} f = \int_A \left(\int_B f(x,y)dy \right) dx.$$

Claro que podemos trocar x e y no enunciado anterior. Portanto também temos

$$\int_{A\times B} f = \int_B \left(\int_A f(x,y)dx \right) dy.$$

2. Seja $S \subset \mathbb{R}^n$ um subconjunto de $\mathbb{R}^n$ qualquer. Uma função $f : S \to \mathbb{R}$ diz-se *integrável em* S se a função $\overline{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definida por

$$\overline{f}(x_1, \ldots, x_n) = \begin{cases} f(x_1, \ldots, x_n) & \text{se } (x_1, \ldots, x_n) \in S \\ 0 & \text{se } (x_1, \ldots, x_n) \notin S \end{cases}$$

é integrável em $\mathbb{R}^n$. Nesse caso define-se o *integral de* f *em* S por

$$\int_S f = \int_{\mathbb{R}^n} \overline{f}.$$

3. *Notações para integrais múltiplos:* Para integrais duplos e triplos sobre um conjunto S é costume utilizar a seguinte notação para $\int_S f$:

$$\int\int_S f(x,y)dxdy \qquad \text{e} \qquad \int\int\int_S f(x,y,z)dxdydz.$$

4. As propriedades do integral vistas em **1.13** para integrais de funções sobre intervalos generalizam-se da forma natural[1] a funções sobre conjuntos arbitrários.

5. *Aplicações do integral:*

(a) Cálculo de áreas e volumes: Se $S \subset \mathbb{R}^2$

$$\int\int_S 1 \; dxdy = \text{área}(S).$$

Se $S \subset \mathbb{R}^3$,

$$\int\int\int_S 1 \; dxdydz = \text{Vol}(S).$$

Mais geralmente, para $S \subset \mathbb{R}^n$, $\int_S 1$ é o volume n-dimensional do conjunto S.

[1] As únicas excepções são as propriedades (6) e (7) que só são válidas se os conjuntos envolvidos forem *mensuráveis*. No entanto, todos os conjuntos que aparecem na prática são mensuráveis, logo na prática também as propriedades (6) e (7) são válidas.

(b) Se $t : S \to \mathbb{R}$ descreve uma quantidade associada a cada ponto de S (e.g. a temperatura desse ponto), a *média* dessa quantidade em S é dada pela fórmula

$$\overline{t} = \frac{\int_S t}{\int_S 1}.$$

(c) Se $f : S \to \mathbb{R}$ é a função densidade de massa (ou carga), a massa (ou carga) total em S é dada pela fórmula

$$M(\text{ ou } Q) = \int_S f.$$

(d) Se $f : S \to \mathbb{R}$ é a função densidade de massa, a i-ésima coordenada do centro de massa é dada pela expressão:

$$x_{iCM} = \frac{\int_S x_i f}{\int_S f}.$$

(e) Se a densidade de massa é constante, o centro de massa chama-se o *centróide* de S. As coordenadas são dadas pelas fórmulas:

$$\overline{x_i} = \frac{\int_S x_i}{\int_S 1}.$$

(f) O momento de inércia de um sólido $S \subset \mathbb{R}^3$ com densidade de massa $f : S \to \mathbb{R}^+$ em relação a um eixo L é dado pela fórmula

$$I_L = \int\int\int_S d_L(x,y,z)^2 f(x,y,z)dxdydz,$$

onde $d_L(x,y,z)$ é a distância de (x,y,z) ao eixo L.
Análogamente, se $S \subset \mathbb{R}^2$ representar uma placa fina com densidade de massa $f(x,y)$, o momento de inércia em relação a um eixo $L \subset \mathbb{R}^2$ é dado pela fórmula

$$I_L = \int\int_S d_L(x,y)^2 f(x,y)dxdy,$$

onde $d_L(x,y)$ é a distância de (x,y) ao eixo L.

6. Seja $U \subset \mathbb{R}^n$ um aberto. Uma *mudança de variável* ou *transformação de coordenadas* é uma transformação $g : U \to \mathbb{R}^n$ satisfazendo as seguintes propriedades:
(1) g é injectiva,
(2) g é de classe C^1 (isto é, as derivadas parciais de g são contínuas).
(3) $\det Dg(t) \neq 0$ para todo o $t \in U$.

7. *Exemplos importantes de mudança de variável*

(1) *Coordenadas polares:* A mudança de variável de coordenadas polares para coordenadas cartesianas é dada pela aplicação $g :]0,+\infty[\times]0,2\pi[\to \mathbb{R}^2$ definida por

$$g(r,\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta).$$

O determinante da matriz Jacobiana é $\det Dg(r,\theta) = r$.

(2) *Coordenadas cilíndricas:* A mudança de variável de coordenadas cilíndricas para coordenadas cartesianas é dada pela aplicação $g :]0, +\infty[\times]0, 2\pi[\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ definida por

$$g(r, \theta, z) = (r\cos\theta, r\sin\theta, z).$$

O determinante da matriz Jacobiana é $\det Dg(r, \theta, z) = r$.

(3) *Coordenadas esféricas:* A mudança de variável de coordenadas esféricas para coordenadas cartesianas é dada pela aplicação $g :]0, +\infty[\times]0, 2\pi[\times]0, \pi[\to \mathbb{R}^3$ definida por

$$g(\rho, \theta, \phi) = (r\cos\theta\sin\phi, r\sin\theta\sin\phi, r\cos\phi).$$

O determinante da matriz Jacobiana é $\det Dg(\rho, \theta, \phi) = -\rho^2\sin\phi$.

8. Teorema de mudança de variável: Seja $U \subset \mathbb{R}^n$ um aberto e $g : U \to \mathbb{R}^n$ uma mudança de variável. Seja $A \subset g(U)$ e $f : A \to \mathbb{R}$ uma função. Então

$$\int_A f(x)dx = \int_{g^{-1}(A)} f(g(t))|\det Dg(t)|dt.$$

A fórmula anterior significa que f é integrável em A sse $f \circ g|\det Dg|$ é integrável em $g^{-1}(A)$ e se esse for o caso, os integrais coincidem.

Nota: Na fórmula acima: $g^{-1}(A)$ é a região de integração escrita nas novas variáveis, $f(g(t))$ é a função escrita nas novas variáveis e $|\det Dg(t)|$ é o factor de conversão de volumes da mudança de variável.

3. Integrais de linha

1. Um *caminho* é uma função contínua $g : I \to \mathbb{R}^n$, onde I é um intervalo de $\mathbb{R}$. Um caminho diz-se *regular* se g é de classe C^1 e $g'(t) \neq 0$ para todo o $t \in I$. Um caminho $g : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ diz-se *fechado* se $g(a) = g(b)$. Um caminho diz-se *simples* se g é injectiva ou se g é um caminho fechado e a restrição de g a $[a, b[$ é injectiva. Um caminho diz-se *seccionalmente regular* se g é de classe C^1 e $g'(t) \neq 0$ excepto possivelmente num número finito de pontos.

2. Uma *curva* C é a imagem de um caminho g. Nesse caso diz-se que g é uma *parametrização* ou uma *representação paramétrica* de C. Uma curva diz-se *regular/seccionalmente regular/fechada/simples* se algum dos caminhos que a parametriza tem essa propriedade.

3. Seja $C \subset \mathbb{R}^n$ uma curva seccionalmente regular e $f : C \to \mathbb{R}$ uma função (também se diz que f é um *campo escalar*). Seja $g : I \to C$ uma parametrização seccionalmente regular de C. Define-se o **integral de linha do campo escalar f ao longo da curva C** pela fórmula

$$\int_C f ds := \int_I f(g(t))||g'(t)||dt.$$

4. A definição anterior é independente da parametrização. Isto é, se g_1 e g_2 são dois caminhos seccionalmente regulares que parametrizam a curva C, então

$$\int_I f(g_1(t))||g_1'(t)||dt = \int_I f(g_2(t))||g_2'(t)||dt.$$

5. *Propriedades do integral:*

(1) *Linearidade:* Se C é uma curva seccionalmente regular, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, e $f, g : C \to \mathbb{R}$ são campos escalares, então

$$\int_C (\alpha f + \beta g)ds = \alpha \int_C f ds + \beta \int_C g ds.$$

(2) *Aditividade:* Se C_1 e C_2 são curvas seccionalmente regulares que se intersectam quando muito num número finito de pontos, $C = C_1 \cup C_2$ é uma curva seccionalmente regular. Dado um campo escalar $f : C \to \mathbb{R}$ tem-se

$$\int_C f ds = \int_{C_1} f ds + \int_{C_2} f ds$$

6. *Aplicações do integral:* Seja C uma curva seccionalmente regular.

(1) O *comprimento* da curva C é dado pelo integral $\int_C 1 ds$.

(2) Se $f : C \to \mathbb{R}_0^+$ é a função densidade de massa (ou carga) do filamento C então a *massa (ou carga)* do filamento C é dada por $M = \int_C f ds$.

(3) As coordenadas do *centro de massa* do filamento C com densidade de massa f são dadas pela fórmula

$$x_{i_{CM}} = \frac{\int_C x_i f ds}{\int_C f ds}.$$

(4) As coordenadas do *centróide* de C são dadas por

$$\overline{x_i} = \frac{\int_C x_i ds}{\int_C 1 ds}$$

(5) O momento de inércia em relação ao eixo L do filamento C é dado pela fórmula

$$I_L = \int_C f d_L^2 ds.$$

onde d_L designa a distância ao eixo L.

7. Seja C uma curva seccionalmente regular, $g : I \to C$ uma parametrização de C e $F : C \to \mathbb{R}^n$ um campo vectorial. O **integral de linha do campo vectorial** F **ao longo do caminho** g é definido pela fórmula:

$$\int_C F \cdot dg := \int_I F(g(t)) \cdot g'(t) dt.$$

8. O significado geométrico do integral de linha de um campo vectorial é dado pela igualdade

$$\int_C F \cdot dg = \int_C (F \cdot \vec{t}) ds,$$

onde $\vec{t}$ é um vector unitário tangente a C que aponta na direcção em que o caminho g percorre a curva C. Ou seja, o integral de um campo vectorial é a soma das componentes do campo tangentes à curva C no sentido em que C é percorrida.

9. *Aplicação física:* Se $g(t)$ descreve o vector de posição de uma partícula e F é um campo de forças que actua sobre a partícula, $\int F \cdot dg$ é o *trabalho realizado pela força F sobre a partícula* quando ela percorre o caminho g.

10. Sejam g_1 e g_2 dois caminhos seccionalmente regulares que percorrem a mesma curva C e $F : C \to \mathbb{R}^n$ um campo vectorial. Então

$$\int_C F \cdot dg_1 = \pm \int_C F \cdot dg_2$$

consoante g_1 e g_2 percorrem C no mesmo sentido (sinal $+$) ou em sentidos contrários (sinal $-$).

11. *Propriedades do integral:*

(1) *Linearidade:* Se C é uma curva seccionalmente regular, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, e $F, G : C \to \mathbb{R}^n$ são campos vectoriais, então

$$\int_C (\alpha F + \beta G) \cdot dg = \alpha \int_C F \cdot dg + \beta \int_C G \cdot dg.$$

(2) *Aditividade:* Se g_1, g_2 são caminhos seccionalmente regulares parametrizando as curvas C_1 e C_2, $C = C_1 \bigcup C_2$ e $F : C \to \mathbb{R}^n$ é um campo vectorial, então escrevendo g para o caminho que se obtem percorrendo primeiro o caminho g_1 seguido de g_2 temos

$$\int_C F \cdot dg = \int_{C_1} F \cdot dg_1 + \int_{C_2} F \cdot dg_2.$$

4. Teorema fundamental do cálculo para integrais de linha e Teorema de Green

1. Seja $U \subset \mathbb{R}^n$ um aberto e $\phi : U \to \mathbb{R}$ um campo escalar. O *gradiente* de ϕ é o campo vectorial

$$\nabla \phi = \left(\frac{\partial \phi}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial \phi}{\partial x_n} \right).$$

Dado um campo vectorial $F : U \to \mathbb{R}^n$, se existe $\phi : U \to \mathbb{R}^n$ tal que $F = \nabla \phi$ diz-se que F é um *gradiente* e que ϕ é um *potencial* ou *potencial escalar* para F.

2. **Teorema fundamental do cálculo para integrais de linha:** Seja $U \subset \mathbb{R}^n$ um aberto e $\phi : U \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^1. Então, dado um caminho seccionalmente regular $g : I \to \mathbb{R}^n$ com ponto inicial A e ponto final B tem-se
$$\int_A^B \nabla\phi \cdot dg = \phi(B) - \phi(A).$$
3. **Condições necessárias e suficientes para que um campo seja um gradiente:** Seja $U \subset \mathbb{R}^n$ um aberto e $F : U \to \mathbb{R}^n$ um campo vectorial contínuo. Então as seguintes condições são equivalentes
   (1) Existe uma função $\phi : U \to \mathbb{R}^n$ tal que $F = \nabla\phi$.
   (2) O integral de linha $\int_A^B F \cdot dg$ é independente do caminho seccionalmente regular $g : [a, b] \to U$ (só depende de $A = g(a)$ e $B = g(b)$).
   (3) $\oint_C F \cdot dg = 0$ para toda a curva fechada $C \subset U$.
4. Um campo de $F : U \to \mathbb{R}^n$, de classe C^1 diz-se **fechado** se
$$\frac{\partial F_i}{\partial x_j} = \frac{\partial F_j}{\partial x_i}$$
para todo o i, j.
5. **Condição necessária para que um campo seja gradiente:** Seja $F : U \to \mathbb{R}^n$ um campo vectorial de classe C^1. Se F é um gradiente então F é fechado.
6. O campo $F : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^2$ definido por
$$F(x, y) = \left(-\frac{y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2}\right)$$
é um exemplo de um campo vectorial que é fechado mas não é um gradiente (o integral ao longo de uma circunferência centrada na origem é $\neq 0$).
7. Um subconjunto $U \subset \mathbb{R}^n$ diz-se um *conjunto em estrela* se existe um ponto $A \in U$ tal que para todo o $x \in U$, o segmento de recta que une A a x está contido em U.
8. Se U é um conjunto em estrela e $F : U \to \mathbb{R}^n$ é um campo vectorial de classe C^1 então F é um gradiente sse F é fechado.
9. O potencial para o campo $F : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, y) : y \leq 0\} \to \mathbb{R}^2$ definido por
$$F(x, y) = \left(-\frac{y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2}\right)$$
é (a menos de uma constante) o ângulo das coordenadas polares:
$$\phi(x, y) = \begin{cases} \arctan\left(\frac{y}{x}\right) & \text{se } x > 0 \\ \frac{\pi}{2} & \text{se } x = 0 \\ \pi + \arctan\left(\frac{y}{x}\right) & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

10. Seja $r = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}$ e

$$\vec{e_r} = \left(\frac{x_1}{r}, \ldots, \frac{x_n}{r}\right)$$

o vector unitário que, em cada ponto de $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ aponta na direção oposta à da origem.

Um campo vectorial $F : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^n$ diz-se *radial* se é da forma

$$F(x_1, \ldots, x_n) = f(r)\, \vec{e_r}$$

para alguma função $f :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$.

11. Um campo radial contínuo é um gradiente. Um potencial é dado por

$$\phi(x_1, \ldots, x_n) = V\left(\sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}\right)$$

com $V(r) = \int f(r)dr$.

12. *Notação para integrais de linha de campos vectoriais:* Dado um campo vectorial $F = (F_1, \ldots, F_n)$ também se costuma escrever

$$\int_C F \cdot dg = \int_C F_1 dx_1 + \ldots + F_n dx_n.$$

13. Uma região $D \subset \mathbb{R}^2$ diz-se *elementar* se existem funções $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ e $h, j : [c, d] \to \mathbb{R}$ seccionalmente de classe C^1 tais que

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, f(x) \leq y \leq g(x)\}$$

e

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : c \leq y \leq d, h(y) \leq x \leq j(y)\}.$$

14. Teorema de Green: Seja $D \subset \mathbb{R}^2$ uma união finita de regiões elementares e $F : D \to \mathbb{R}^2$ um campo vectorial de classe C^1. Então escrevendo $F = (P, Q)$ tem-se

$$\int\int_D \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} dxdy = \oint_C P dx + Q dy$$

onde C designa a fronteira de D (que é uma união finita de curvas fechadas seccionalmente regulares) percorrida de tal forma que D esteja para a esquerda.

15. Quando $F = (P, Q)$ é um caminho fechado, o teorema de Green diz que para calcular o integral de linha de F se pode "deformar" o caminho dentro do domínio de F.

16. Seja $S \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto, e $g_0 : [a, b] \to S$ e $g_1 : [a, b] \to S$ dois caminhos com $g_0(a) = g_1(a) = A$ e $g_0(b) = g_1(b) = B$. Uma *homotopia* entre g_0 e g_1 é uma função contínua $H : [0, 1] \times [a, b] \to S$ tal que

$$H(0, t) = g_0(t) \qquad H(1, t) = g_1(t) \qquad H(s, 0) = A \quad H(s, 1) = B.$$

Dois caminhos g_0 e g_1 dizem-se *homotópicos* se existe uma homotopia entre eles.

17. Se $S \subset \mathbb{R}^n$ é um conjunto aberto, $F : S \to \mathbb{R}^n$ é um campo fechado e $g_0, g_1 : [a, b] \to S$ são caminhos homotópicos, então

$$\int F \cdot dg_0 = \int F \cdot dg_1.$$

18. Um conjunto aberto $S \subset \mathbb{R}^n$ diz-se *simplesmente conexo* se qualquer caminho fechado em S é homotópico a um caminho constante.

19. Um conjunto em estrela é um conjunto simplesmente conexo.

20. **Condição necessária e suficiente para que um campo seja gradiente:** Se S é um conjunto simplesmente conexo e $F : S \to \mathbb{R}^n$ é um campo de classe C^1, então F é gradiente sse F é fechado.

5. Teoremas da função inversa e implícita

1. **Teorema da função inversa:** Seja $S \subset \mathbb{R}^n$ um aberto, $F; S \to \mathbb{R}^n$ uma função de classe C^k com $k \geq 1$ e $x \in S$. Se $\det DF(x) \neq 0$, então

(i) Existe um aberto $U \subset S$ contendo x tal que a restrição de F a U é injectiva,
(ii) F(U) é um aberto,
(iii) A função inversa $F^{-1} : F(U) \to U$ é de classe C^k, e
(iv) $DF^{-1}(F(x)) = DF(x)^{-1}$.

2. A função $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por $F(x, y) = (e^x \cos y, e^x \sin y)$ é um exemplo de uma função que satisfaz as hipóteses do teorema da função inversa para todo o $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ mas que não é injectiva.

3. A regra de derivação da função inversa tem a seguinte consequência: Se $(y_1, \ldots, y_n) = g(x_1, \ldots, x_n)$ é uma mudança de variável, então escrevendo $\frac{\partial(u_1,\ldots,u_n)}{\partial(v_1,\ldots,v_n)}$ para o determinante da matriz $n \times n$ com entradas $[\frac{\partial u_i}{\partial v_j}]$, temos

$$\frac{\partial(x_1, \ldots, x_n)}{\partial(y_1, \ldots, y_n)} = \frac{1}{\frac{\partial(y_1,\ldots,y_n)}{\partial(x_1,\ldots,x_n)}},$$

o que nos permite calcular o factor de conversão de volumes da mudança de variável

$$\left|\frac{\partial(x_1, \ldots, x_n)}{\partial(y_1, \ldots, y_n)}\right|$$

mesmo que não consigamos obter a expressão para $(x_1, \ldots, x_n) = g^{-1}(y_1, \ldots, y_n)$.

4. **Teorema da função implícita:** Seja $S \subset \mathbb{R}^n$ um aberto, $m < n$ e $F : S \to \mathbb{R}^m$ uma função de classe C^k com $k \geq 1$. Escrevemos os pontos de $\mathbb{R}^n$ na forma (x, y) com $x \in R^{n-m}$ e $y \in \mathbb{R}^m$. Então dado $(x_0, y_0) \in S$ com

$$F(x_0, y_0) = 0 \quad \text{e} \quad \det \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0,$$

existem abertos $V \subset \mathbb{R}^{n-m}$ contendo x_0 e $W \subset \mathbb{R}^m$ contendo y_0 e uma função $g : V \to W$, de classe C^k tal que

$$(x, y) \in V \times W \quad \text{e } F(x, y) = 0 \iff y = g(x).$$

5. O teorema anterior pode ser interpretados de duas maneiras equivalentes:
(1) *Maneira analítica:* Dá condições suficientes para que o sistema $F(x, y) = 0$ possa ser reslvido de forma única em relação às variáveis y (isto é, para que $F(x, y) = 0 \iff y = g(x)$) numa vizinhança de uma solução dada do sistema.
(2) *Maneira geométrica:* Dá condições suficientes para que o conjunto de nível $F(x, y) = 0$ da função F seja o gráfico de uma função de classe C^1 das variáveis x, isto é, que $\{(x, y) : F(x, y) = 0\} = \{(x, g(x))\}$ (numa vizinhança de um ponto do conjunto de nível).

6. Para calcular derivadas parciais de uma função $g(x)$ definida implicitamente basta derivar a identidade

$$F(x, g(x)) = 0.$$

Obtem-se um sistema para as derivadas parciais de $g(x)$ em termos das derivadas parciais de F que sabemos calcular.

6. Variedades e multiplicadores de Lagrange

1. Um subconjunto $M \subset \mathbb{R}^n$ diz-se uma *variedade* de dimensão k se para todo o $x \in M$ existe um aberto $U \subset \mathbb{R}^n$ e uma função $\Phi : U \to \mathbb{R}^{n-k}$ de classe C^1 tal que
(i) $M \cap U = \{x \in U : \Phi(x) = 0\}$,
(ii) $D\Phi(x)$ tem característica $n - k$.

2. Uma variedade de dimensão 1 é simplesmente uma curva regular, isto é uma curva com uma linha tangente em todos os pontos (com a linha a variar continuamente). Uma variedade de dimensão 2 é uma superfície regular, isto é uma superfície que admite um plano tangente em cada ponto (com o plano a variar continuamente).

3. Um subconjunto $M \subset \mathbb{R}^n$ é uma variedade de dimensão k sse para todo o $x \in M$ existe uma vizinhança U de x e uma escolha de k coordenadas $x_{i_1}, \ldots, x_{i_k}$ tais que $M \cap U$ é o gráfico de uma função $f(x_{i_1}, \ldots, x_{i_k})$ com $f : V \subset \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^{n-k}$ de classe C^1 com V aberto.

4. Se $M \subset \mathbb{R}^n$ é uma variedade de dimensão k, uma *parametrização* é uma função $g : V \to M$ com $V \subset \mathbb{R}^k$ aberto, que satisfaz as seguintes condições
(a) g é de classe C^1,
(b) g é injectiva,
(c) $Dg(t)$ é injectiva (isto é as colunas da matriz $Dg(t)$ são linearmente independentes).

5. Se $M \subset \mathbb{R}^n$ é uma variedade e $x \in M$. Um vector $v \in \mathbb{R}^n$ diz-se *tangente a M em x* se existe um caminho $g :]-\epsilon, \epsilon[\to M$ de classe C^1 tal que $g(0) = x$ e $g'(0) = v$. O conjunto de todos os vectores tangentes chama-se o *espaço tangente a M em x* e designa-se por T_xM. O *espaço normal a M em x* é o conjunto $(T_xM)^\perp = \{w \in \mathbb{R}^n : w \cdot v = 0 \text{ para todo o } v \in T_xM\}$ dos vectores ortogonais ao espaço tangente a M em x.

6. O *plano tangente a M em x* é o plano $x+T_xM = \{x+v : v \in T_xM\}$.

7. Se M é uma variedade e $g : V \to M$ é uma parametrização então uma base para o espaço tangente é dada pelas colunas da matriz $Dg(t)$.

8. Se M é uma variedade, $x \in M$ e Φ é uma função satisfazendo as condições na definição de variedade, então T_xM é o núcleo de $D\Phi(x)$ e o espaço normal é o espaço gerado pelas linhas da matriz $D\Phi(x)$.

9. Método dos multiplicadores de Lagrange: Seja $U \subset \mathbb{R}^n$ um aberto e $f : U \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^1. Se M é uma variedade e a restrição de f a M tem um extremo relativo em $x_0 \in M$ então

$$\nabla f(x_0) \in T_{x_0}(M)^\perp.$$

Equivalentemente, se $x_0 \in M$ é um ponto de extremo relativo da restrição de f a M, e M é definida pelas equações $\Phi(x) = 0$ (com $\Phi : U \to \mathbb{R}^{n-k}$ de classe C^1, e $D\Phi(x)$ com característica $n-k$) então existem $\lambda_i \in \mathbb{R}$ tais que

$$f + \lambda_1\Phi_1 + \ldots + \lambda_{n-k}\Phi_{n-k}$$

tem um ponto de estacionariedade em x_0.

7. Integrais em variedades

1. Seja M uma variedade de dimensão k, $g : U \to M$ com $U \subset \mathbb{R}^k$ uma parametrização. Dado um conjunto $A \subset g(U)$ e uma função $f : A \to \mathbb{R}$ define-se o **integral do campo escalar** f sobre A pela fórmula

$$\int_A f dV_k = \int_{g^{-1}(A)} f(g(t))\sqrt{\det Dg(t)^t Dg(t)}dt.$$

2. A definição do integral é independente da escolha de parametrização. Isto é, se $g_1 : U_1 \to M$ e $g_2 : U_2 \to M$ são parametrizações e $A \subset g_1(U_1) \cap g_2(U_2)$ então

$$\int_{g_1^{-1}(A)} f(g_1(t))\sqrt{\det Dg_1(t)^t Dg_1(t)}dt = \int_{g_2^{-1}(A)} f(g_2(s))\sqrt{\det Dg_2(s)^t Dg_2(s)}ds.$$

3. No caso em que $k = 1$ (isto é, no caso em que a variedade é uma linha) o integral anterior reduz-se ao integral de linha de um campo escalar que foi definido previamente porque

$$\sqrt{\det Dg(t)^t Dg(t)} = ||g'(t)||.$$

Neste caso usa-se também a notação $\int_A f ds$ para o integral.

4. No caso em que $k = 2$ (isto é, no caso em que a variedade é uma superfície), usa-se também a notação $\int_A f dS$ para o integral de um campo escalar.

5. *Aplicações do integral de superfície de um campo escalar:* Seja A um subconjunto de uma variedade de dimensão 2.

(1) A *àrea* de A é dada pelo integral $\int_A 1 dS$.

(2) Se $f : A \to \mathbb{R}$ é a função densidade de massa (ou carga) de A então a *massa (ou carga)* de A é dada por $\int_A f dS$.

(3) As coordenadas do *centro de massa* de A são dadas pela fórmula

$$x_{i_{CM}} = \frac{\int_A x_i f dS}{\int_A f dS}.$$

(4) As coordenadas do *centróide* de A são dadas por

$$\overline{x_i} = \frac{\int_A x_i dS}{\int_C 1 dS}$$

(5) O *momento de inércia* em relação ao eixo L é dado pela fórmula

$$I_L = \int_A f d_L^2 dS.$$

onde d_L designa a distância ao eixo L.

6. *Propriedades do integral:*

(1) *Linearidade:* Se A é um subconjunto de uma variedade, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, e $f, g : A \to \mathbb{R}$ são campos escalares, então

$$\int_A (\alpha f + \beta g) dV_k = \alpha \int_A f dV_k + \beta \int_A g dV_k.$$

(2) *Aditividade:* Se A_1 e A_2 são subconjuntos disjuntos de uma variedade de dimensão k e $A = A_1 \cup A_2$, então dado um campo escalar $f : A \to \mathbb{R}$ tem-se

$$\int_A f dV_k = \int_{A_1} f dV_k + \int_{A_2} f dV_k.$$

7. Se $P(v_1, v_2)$ designa o paralelogramo em $\mathbb{R}^3$ com arestas $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^3$, então

$$\text{área}(P(v_1, v_2)) = ||v_1 \times v_2|| = \sqrt{\det A^t A}$$

onde A é a matriz 3×2 que tem por colunas os vectores v_1 e v_2.

8. *Fórmula alternativa para o integral de um campo escalar sobre uma superfície:* Se $g : U \subset \mathbb{R}^2 \to M$ é uma parametrização de uma variedade de dimensão 2 em $\mathbb{R}^3$, $A \subset g(U)$ e $f : A \to \mathbb{R}$ é uma função, então

$$\int_A f dS = \int\int_{g^{-1}(A)} f(g(t,s)) || \frac{\partial g}{\partial t} \times \frac{\partial g}{\partial s} || dt ds.$$

9. Se $M \subset \mathbb{R}^n$ é uma variedade de dimensão $n-1$ em $\mathbb{R}^n$, $\vec{n} : M \to \mathbb{R}^n$ é um vector normal unitário contínuo, e $\vec{F} : M \to \mathbb{R}^n$ é um campo vectorial, define-se o **fluxo** de $\vec{F}$ através de M no sentido de n por

$$\int_M (\vec{F} \cdot \vec{n}) dS.$$

10. Se M é uma variedade-2 em $\mathbb{R}^3$, $g : U \to M$ é uma parametrização e $A \subset g(U)$ então o fluxo de $\vec{F} : A \to \mathbb{R}^3$ através de A no sentido da normal $\vec{n}$ é dado por

$$\int_A \vec{F} \cdot \vec{n} dS = \pm \int \int_{g^{-1}(A)} \vec{F}(g(t,s)) \cdot \left(\frac{\partial g}{\partial t} \times \frac{\partial g}{\partial s} \right) ds dt$$

onde o sinal é + ou − consoante o sentido do vector $\frac{\partial g}{\partial t} \times \frac{\partial g}{\partial s}$ tem o sentido do vector normal $\vec{n}$ dado, ou o sentido contrário.

11. O fluxo de um campo vectorial é linear e aditivo em relação à região de integração. Isto é:
(1) $\int_M (\alpha \vec{F}_1 + \beta \vec{F}_2) \cdot \vec{n} = \alpha \int_M \vec{F}_1 \cdot \vec{n} + \beta \int_M \vec{F}_2 \cdot \vec{n}$.
(2) $\int_{M_1 \cup M_2} \vec{F} \cdot \vec{n} = \int_{M_1} \vec{F} \cdot \vec{n} + \int_{M_2} \vec{F} \cdot \vec{n}$ se $M_1 \cap M_2 = \emptyset$.

12. *Aplicação física:* Se $\vec{F}$ é a densidade de fluxo de um fluido (isto é, se $\vec{F} = \rho \vec{v}$ com ρ a densidade de massa do fluido e $\vec{v}$ a velocidade instantânea em cada ponto) então

$$\int_M \vec{F} \cdot \vec{n} dS$$

é a quantidade de massa que atravessa a superfície M no sentido da normal $\vec{n}$ por unidade de tempo.

8. Teoremas da divergência e de Stokes

1. Se $U \subset \mathbb{R}^n$ é um aberto e $F : U \to \mathbb{R}^n$ é um campo vectorial de classe C^1, a *divergência* de $\vec{F}$ é o campo escalar

$$\operatorname{div} \vec{F} = \frac{\partial F_1}{\partial x_1} + \frac{\partial F_2}{\partial x_2} + \ldots + \frac{\partial F_n}{\partial x_n}.$$

Também se usa a notação $\nabla \cdot \vec{F}$ para a divergência de $\vec{F}$.

2. Um conjunto $D \subset \mathbb{R}^n$ diz-se um *domínio regular* se é limitado, $D = \operatorname{int} \overline{D}$ e a fronteira ∂D é uma variedade de dimensão $n-1$.

3. **Teorema da divergência:** Se $D \subset \mathbb{R}^n$ é um domínio regular e $\vec{F} : \overline{D} \to \mathbb{R}^n$ é um campo vectorial de classe C^1, então

$$\int_D \operatorname{div} \vec{F} dV_n = \int_{\partial D} \vec{F} \cdot \vec{n}^{\text{ext}} dV_{n-1}$$

onde $\vec{n}^{\text{ext}}$ designa a normal exterior a D.

4. No caso $n = 3$ o teorema da divergência chama-se também Teorema de Gauss.

5. No caso em que $n = 2$, o teorema de divergência é equivalente ao Teorema de Green.

6. O teorema da divergência pode aplicar-se mesmo quando D não é um domínio regular. Basta que a região D seja tal que $D = \operatorname{int} \overline{D}$, D é limitado e existe um subconjunto A de ∂D tal que $D \setminus A$ é uma variedade de dimensão $n-2$ e A está contido numa união finita de variedades de dimensão $n-1$. Exemplos de domínios que satisfazem estas condições mas que não são domĩnios regulares são $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \sqrt{x^2+y^2} < z < 1\}$ e $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 < x,y,z < 1\}$.

7. *Significado geométrico da divergência:* Se $\vec{F}$ é um campo vectorial de classe C^1, e $B_\epsilon(x_0)$ representa a bola de raio ϵ centrada em x_0, então

$$\operatorname{div} \vec{F}(x_0) = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{\int_{\partial B_\epsilon(x_0)} \vec{F} \cdot \vec{n}^{\text{ext}} dV_{n-1}}{\operatorname{Vol}(B_\epsilon(x_0))}.$$

A fórmula anterior diz que a divergência mede a criação de fluxo do campo no ponto x_0. Por exemplo, se $\operatorname{div} \vec{F}(x_0) > 0$ então o fluxo de $\vec{F}$ para fora de uma bola de raio suficientemente pequeno centrada em x_0 é positivo - isto é, o campo tem uma fonte em x_0.

8. Uma variedade de dimensão 2 $M \subset \mathbb{R}^3$ diz-se *orientável* se existe um campo vectorial $\vec{n} : M \to \mathbb{R}^3$ contínuo tal que $||\vec{n}|| = 1$ e $\vec{n}(x) \in T_x M^\perp$. Um campo vectorial $\vec{n} : M \to \mathbb{R}^3$ que satisfaz as condições anteriores diz-se uma *orientação* de M.

9. Uma variedade de dimensão 2 $M \subset \mathbb{R}^3$ orientável e conexa tem exactamente duas orientações que diferem num sinal.

10. *Exemplos:*

(1) A superfície esférica $M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 = 1\}$ é orientável. As duas orientações são

$$\vec{n}^{\text{ext}}(x,y,z) = (x,y,z)$$

e

$$\vec{n}^{\text{int}}(x,y,z) = (-x,-y,-z).$$

(2) A banda de Möbius não é orientável.

11. Se $M \subset \mathbb{R}^3$ é uma variedade de dimensão 2, um subconjunto $A \subset M$ diz-se um domínio regular se A é aberto em relação a M, A é limitado, e o *bordo de* A

$$\partial A = \overline{A} \setminus A$$

é uma variedade de dimensão 1.

12. Se $U \subset \mathbb{R}^3$ é um aberto e $\vec{F} : U \to \mathbb{R}^3$ é um campo vectorial de classe C^1, o *rotacional* de $\vec{F}$ é o campo vectorial

$$\operatorname{rot} \vec{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}, \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}, \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right).$$

Também se usa a notação $\nabla \times \vec{F}$ para o rotacional de $\vec{F}$.

13. **Teorema de Stokes:** Seja $M \subset \mathbb{R}^3$ uma variedade de dimensão 2, $\vec{n} : M \to \mathbb{R}^3$ uma orientação para M, $A \subset \mathbb{R}^3$ um domínio regular em M, e $\vec{F} : \overline{A} \to \mathbb{R}^3$ um campo vectorial de classe C^1. Então

$$\int\int_A \operatorname{rot} \vec{F} \cdot \vec{n} dS = \int_{\partial A} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

onde o bordo de A é percorrido no sentido dado pela regra da mão direita.

14. O teorema de Green é um caso particular do teorema de Stokes. Corresponde ao caso em que $M = \{(x, y, 0) \in \mathbb{R}^3 : x, y \in \mathbb{R}^2\}$ e $\vec{n} = (0, 0, 1)$.

15. *Significado geométrico do rotacional:* Se $\vec{F}$ é um campo vectorial de classe C^1, e $D_\epsilon(x_0)$ representa o disco de raio ϵ centrado em x_0 no plano perpendicular ao vector $\vec{n}$, então

$$(\operatorname{rot} \vec{F})(x_0) = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{\int_{\partial D_\epsilon(x_0)} \vec{F} \cdot d\vec{r}}{\operatorname{area}(D_\epsilon(x_0))}.$$

Isto significa que $(\operatorname{rot} \vec{F})(x_0)$ aponta na direcção perpendicular à do plano em que a circulação de F é máxima. O comprimento de $\operatorname{rot} F$ é uma medida da intensidade da circulação de F nesse plano.

16. *Relação entre divergência, gradiente e rotacional:*

(i) $\nabla \times \vec{F} = 0 \iff \vec{F}$ é fechado.

(ii) Logo

$$\nabla \times (\nabla \phi) = 0$$

e se o domínio de $\vec{F}$ é um conjunto em estrela, então

$$\nabla \times \vec{F} = 0 \implies \text{ existe } \phi \text{ tal que } \vec{F} = \nabla \phi.$$

(iii) Do mesmo modo,

$$\nabla \cdot (\nabla \times \vec{A}) = 0.$$

(iv) *Proposição:* Se o domínio de $\vec{F}$ é um conjunto em estrela e $\nabla \cdot \vec{F} = 0$ então existe $\vec{A}$ tal que $\vec{F} = \nabla \times \vec{A}$.

17. Dado um campo vectorial $\vec{F}$, se $\nabla \cdot \vec{F} = 0$ diz-se que $\vec{F}$ é *solenoidal*. Se existe $\vec{A}$ tal que $\vec{F} = \nabla \times \vec{A}$ diz-se que $\vec{F}$ é um *rotacional* e que $\vec{A}$ é um *potencial vector* para $\vec{F}$. A proposição anterior diz que num conjunto em estrela todo o campo solenoidal é um rotacional.

18. O teorema de Stokes implica que se S é uma superfície fechada (isto é se S não tem bordo) então o fluxo de um rotacional através de S é nulo. Assim para provar que um campo vectorial não é um rotacional basta arranjar uma superfície fechada através da qual o fluxo do campo não é nulo.

19. *Exemplo:* O campo vectorial $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^3$ definido por

$$\vec{F}(x,y,z) = \left(\frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}, \frac{y}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}, \frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} \right)$$

é um campo solenoidal que não é um rotacional (isto é possível uma vez que $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ não é um conjunto em estrela). De facto o fluxo de $\vec{F}$ através de uma superfície esférica centrada na origem é diferente de 0.

9. Integrabilidade e teoremas de convergência

1. Seja $S \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto. Uma sucessão de funções $f_k : S \to \mathbb{R}$ diz-se *monótona crescente* se $f_k(x) \leq f_{k+1}(x)$ para todo o k, x. Diz-se *monótona decrescente* se $f_k(x) \geq f_{k+1}(x)$ para todo o k, x.

2. O *limite de uma sucessão de funções* $f_k : S \to \mathbb{R}$ é a função $f : S \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \lim_{k\to\infty} f_k(x)$.

3. Teorema da convergência monótona: Seja $S \subset \mathbb{R}^n$ e $f_k : S \to \mathbb{R}$ uma sucessão de funções integráveis. Se

(i) f_k é uma sucessão monótona,

(ii) A sucessão $\int_S f_k$ é limitada,

então $\lim f_k(x)$ existe para quase todo o $x \in S$ e

$$\int_S \lim f_k = \lim_{k\to\infty} \int_S f_k.$$

4. *Integrais de funções potência:*

(i) A função $f(x) = \frac{1}{x^\alpha}$ é integrável em $[1, +\infty[$ sse $\alpha > 1$.

(ii) A função $f(x) = \frac{1}{x^\alpha}$ é integrável em $]0, 1]$ sse $\alpha < 1$.

5. Teorema da convergência dominada: Seja $S \subset \mathbb{R}^n$ e $f_k : S \to \mathbb{R}$ uma sucessão de funções integráveis. Se

(i) $\lim_{k\to\infty} f_k(x)$ existe para quase todo o $x \in S$,

(ii) Existe uma função $h : S \to \mathbb{R}$ tal que

$$|f_k(x)| \leq h(x)$$

para quase todo o $x \in S$,

então $\lim f_k$ é integrável em S e

$$\int_S \lim f_k = \lim_{k\to\infty} \int_S f_k.$$

6. Se $S \subset \mathbb{R}^n$ é um conjunto, uma função $f : S \to \mathbb{R}$ diz-se *mensurável* se a função $\overline{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definida por

$$\overline{f}(x) = \begin{cases} f(x) \text{ se } x \in S \\ 0 \text{ caso contrário} \end{cases}$$

é igual quase em toda a parte ao limite de uma sucessão de funções em escada $s_k : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

7. *Propriedades das funções mensuráveis:*

(i) Se S é um conjunto aberto e $f : S \to \mathbb{R}$ é contínua, então f é mensurável.
(ii) Se $f = \lim f_k$ quase em toda a parte e as funções f_k são mensuráveis, então f é mensurável.

8. Usando as propriedades anteriores, é fácil ver que qualquer função que apareça na prática é mensrável. No entanto, *em testes ou exames não necessitam de justificar (ou sequer mencionar) que as funções são mensuráveis quando aplicarem um dos teoremas abaixo.*

9. Critério da comparação: Seja $S \subset \mathbb{R}^n$ e $f : S \to \mathbb{R}$ uma função mensurável. Se existe $h : S \to \mathbb{R}$ integrável tal que $|f(x)| \leq h(x)$ para quase todo o $x \in S$ então f é integrável.

10. Notem que o critério da comparação também pode ser utilizado para mostrar que uma função não é integrável. Como uma função f é integrável sse $|f|$ é integrável, se f é tal que $|f| \geq g \geq 0$ e g não é integrável, então, pelo critério da comparação, f também não é integrável.

11. Teorema de Tonelli: Sejam $J \subset \mathbb{R}^n$ e $K \subset \mathbb{R}^m$ intervalos. Se $f : J \times K \to \mathbb{R}$ é uma função mensurável tal que o integral iterado

$$\int_J \left(\int_K |f(x,y)| dx \right) dy$$

existe, então f é integrável em $J \times K$.

12. Seja $U \subset \mathbb{R}^m$ um conjunto aberto, $S \subset \mathbb{R}^n$ e $f : U \times S \to R$ uma função tal que $x \mapsto f(t,x)$ é integrável em S para todo o $t \in U$. Considere-se o *integral paramétrico* $F : U \to \mathbb{R}$ definido por

$$F(t) = \int_S f(t,x) dx.$$

(i) *Continuidade dos integrais paramétricos:* Se
1. $t \mapsto f(t,x)$ é contínua para quase todo o $x \in S$,
2. Existe uma função integrável $h : S \to \mathbb{R}$ tal que

$$|f(t,x)| \leq h(x)$$

para todo o $t \in U$ e quase todo o $x \in S$,
então o integral paramétrico $F(t)$ é uma função contínua de t em U.

(ii) **Regra de Leibniz:** Se
1. $t \mapsto f(t,x)$ tem derivada parcial em ordem a t_i para quase todo o $x \in S$,
2. Existe uma função integrável $h : S \to \mathbb{R}$ tal que

$$|\frac{\partial f}{\partial t_i}(t,x)| \leq h(x)$$

para todo o $t \in U$ e quase todo o $x \in S$,

então o integral paramétrico $F(t)$ tem derivada parcial em ordem a t_i em U e

$$\frac{\partial F}{\partial t_i}(t) = \int_S \frac{\partial f}{\partial t_i}(t,x)dx.$$

13. Por vezes podem aplicar-se os seguintes corolários dos resultados anteriores que têm hipóteses mais fácilmente verificáveis:

(i) Se S é compacto e $f(t,x)$ é contínua então F é contínua em U.

(ii) Se S é compacto e $f(t,x)$ é de classe C^1, então F é de classe C^1 e

$$\frac{\partial F}{\partial t_i}(t) = \int_S \frac{\partial f}{\partial t_i}(t,x)dx.$$