Análise Matemática III
2º semestre de 2001/2002

Exercício teste 9

Considere a função definida por

$$f(x,y) = (\log \frac{x}{y}, y + \pi/4 - \arctan x).$$

(a) Determine o conjunto dos pontos (x,y) do domínio para os quais existe uma vizinhança na qual o teorema da função inversa garante que f é invertível.

(b) Sendo f^{-1} uma inversa para a restrição de f a uma vizinhança do ponto $(1,1)$ e $(x,y) = f^{-1}(u,v)$, calcule $\frac{\partial x}{\partial u}(0,1)$.

Resolução:

(a) A função é de classe C^1 no seu domínio

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x}{y} > 0\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0 \text{ e } y > 0 \text{ ou } x < 0 \text{ e } y < 0\}.$$

O teorema da função inversa garante que f tem inversa local em torno do ponto $(x,y) \in D$ desde que o determinante

$$\det(DF) = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{vmatrix}$$

seja não nulo. Temos

$$\det(DF) = \begin{vmatrix} \frac{1/y}{x/y} & \frac{-x/y^2}{x/y} \\ -\frac{1}{1+x^2} & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{x} - \frac{1}{y(1+x^2)} = \frac{y(1+x^2)-x}{xy(1+x^2)} \neq 0$$

Ou seja, f tem inversa local nos pontos $(x,y) \in D$ tais que

$$y \neq \frac{x}{1+x^2}.$$

(b) O ponto $(x,y) = (1,1)$ verifica a desigualdade anterior, donde o teorema da função inversa garante que f^{-1} existe localmente. Ao mesmo tempo, $f(1,1) = (0,1)$.

Obtemos

$$Df(1,1) = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1/2 & 1 \end{bmatrix}$$

e ento

$$Df^{-1}(0,1) = Df^{-1}(f(1,1)) = [Df(1,1)]^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1/2 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Conclumos pois que $\frac{\partial x}{\partial u}(0,1) = 2$.