Análise Matemática III
2º semestre de 2001/2002

Exercício teste 8

Seja $F : \mathbb{R}^2 \setminus \{(-1,0),(1,1),(0,0)\} \to \mathbb{R}^2$ o campo vectorial $F = (P,Q)$ definido por

$$P(x,y) = \frac{y}{(x+1)^2+y^2} - \frac{y-1}{(x-1)^2+(y-1)^2} + \frac{5x}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$Q(x,y) = -\frac{x+1}{(x+1)^2+y^2} + \frac{x-1}{(x-1)^2+(y-1)^2} + \frac{5y}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

(a) Calcule o integral

$$\int_C P dx + Q dy$$

onde C é a elipse $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1$ percorrida uma vez no sentido directo (isto é no sentido contrário ao dos ponteiros do relógio).

(b) Indique justificadamente se o campo F é um gradiente no conjunto

$$\mathbb{R}^2 \setminus \left(\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2},\ -1 \le x \le 1\} \bigcup \{(0,0)\} \right).$$

Resolução:

(a) Se definirmos

$$F_1(x,y) = \left(\frac{y}{(x+1)^2+y^2}, -\frac{x+1}{(x+1)^2+y^2} \right),$$

$$F_2(x,y) = \left(-\frac{y-1}{(x-1)^2+(y-1)^2}, \frac{x-1}{(x-1)^2+(y-1)^2} \right),$$

$$F_3(x,y) = \left(\frac{5x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{5y}{\sqrt{x^2+y^2}} \right),$$

temos

$$F = F_1 + F_2 + F_3$$

e portanto

$$\oint_C F \cdot dg = \oint_C F_1 \cdot dg + \oint_C F_2 \cdot dg + \oint_C F_3 \cdot dg.$$

O campo F_3 é o campo radial $F(r) = 5\vec{e}_r$ (onde $\vec{e}_r$ designa o vector unitário que aponta na direcção radial) e portanto é um gradiente (com potencial $V(x,y) = 5r = 5\sqrt{x^2+y^2}$). Conclui-se que $\oint_C F_3 \cdot dg = 0$.

O campo F_1 obtem-se do campo

$$G(x,y) = \left(-\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2} \right)$$

fazendo a substituição $x \mapsto x-(-1)$ e multiplicando por -1, enquanto que F_2 se obtem fazendo a substituição $x \mapsto x-1, y \mapsto y-1$. Portanto, tal como G, F_1 e F_2 são campos fechados mas não gradientes.

Para calcular o integral de F_1 ao longo de C podemos aplicar o teorema de Green à região

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x+1)^2 + y^2 \geq 1, \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} \leq 1\}$$

para concluir que o integral ao longo de C coincide com o integral ao longo da circunferência de raio 1 centrada em $(-1,0)$ percorrida no sentido directo. Uma parametrização desta circunferência é dada por

$$g(t) = (-1+\cos t, \sin t), 0 \leq t \leq 2\pi,$$

logo

$$\begin{aligned} \oint_C F_1 \cdot dg &= \int_0^{2\pi} F_1(-1+\cos t, \sin t) \cdot (-\sin t, \cos t) dt \\ &= \int_0^{2\pi} -1 dt = -2\pi. \end{aligned}$$

Da mesma maneira, podemos aplicar o teorema de Green para concluir que o integral de F_2 ao longo de C coincide com o integral de F_2 ao longo de uma circunferência de centro em $(1,1)$ e de raio 1 percorrida no sentido directo. Portanto

$$\begin{aligned} \oint_C F_2 \cdot dg &= \int_0^{2\pi} F_2(1+\cos t, 1+\sin t) \cdot (-\sin t, \cos t) dt \\ &= \int_0^{2\pi} 1 dt = 2\pi \end{aligned}$$

e concluimos finalmente que

$$\oint_C P dx + Q dy = -2\pi + 2\pi + 0 = 0.$$

(b) O campo F é um gradiente no conjunto S indicado sse

$$\int_\alpha F \cdot dg = 0$$

para toda a curva fechada α contida em S. Podemos, como na alínea anterior, escrever $F = F_1 + F_2 + F_3$, e uma vez que F_3 é um gradiente, precisamos apenas de decidir se $F_1 + F_2$ é um gradiente em S.

$F_1 + F_2$ está definido e é fechado em

$$S \cup \{(0,0)\} = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = \frac{x}{2} + \frac{1}{2},\ 0 \leq x \leq 1\}$$

e qualquer curva em $S \cup \{(0,0)\}$ é homotópica ou a um ponto, ou à elipse C percorrida um certo número de vezes (ou no sentido directo ou no sentido dos ponteiros do relógio). Portanto o teorema de Green garante que se α dá k voltas à origem,

$$\oint_\alpha (F_1 + F_2) = k \oint_C (F_1 + F_2) = 0.$$

Conclui-se que $F_1 + F_2$ é um gradiente em $S \cup \{(0,0)\}$, o que por sua vez implica que F é um gradiente em S.