Análise Matemática III
2º semestre de 2001/2002

Exercício teste 7

Determine quais dos seguintes campos F são gradientes no domínio indicado. Se F for um gradiente determine um potencial. Caso contrário, determine uma curva fechada C contida no domínio do campo tal que $\oint_C F \cdot dg \neq 0$.

(a) $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definido por $F(x, y) = (\sin y + y, x \cos y + x + 3y^2)$,

(b) $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definido por $F(x, y, z) = (x, -z, y)$,

(c) $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definido por $F(x, y, z) = (2xyz, x^2z + 2yz^2, x^2y + 2y^2z)$,

(d) $F : \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, z) : z \in \mathbb{R}\} \to \mathbb{R}^3$ definido por

$$F(x, y, z) = (-\frac{y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2}, z^2).$$

Resolução:

(a) A função F é de classe C^1. Calculando as derivadas cruzadas, obtemos

$$\frac{\partial(\sin y + y)}{\partial y} = \cos y + 1 = \frac{\partial(x \cos y + x + 3y^2)}{\partial x}$$

logo F é um campo fechado. Uma vez que $\mathbb{R}^2$ é um conjunto em estrela, concluimos que F é um gradiente. Para calcular um potencial $\phi(x, y)$, resolvemos o sistema

$$\begin{cases} \frac{\partial \phi}{\partial x} = \sin y + y \\ \frac{\partial \phi}{\partial y} = x \cos y + x + 3y^2 \end{cases} \iff \begin{cases} \phi(x, y) = x \sin y + xy + C(y) \\ x \cos y + x + C'(y) = x \cos y + x + 3y^2 \end{cases}$$

Resolvendo a segunda equação do segundo sistema obtem-se $C(y) = y^3 + C$ onde $C \in \mathbb{R}$ é uma constante. Conclui-se que um potencial para F é dado, por exemplo, por

$$\phi(x, y) = x \sin y + xy + y^3.$$

(b) O campo F não é fechado uma vez que

$$\frac{\partial F_2}{\partial z} = -1 \neq 1 = \frac{\partial F_3}{\partial y}$$

portanto não é um gradiente. Para determinar uma curva fechada ao longo do qual o integral de F é não nulo, notamos que as componentes y e z do campo são $(-z, y)$, o que significa que o campo é tangente a qualquer cilindro com eixo igual ao eixo Ox. Assim, se calcularmos o integral de

linha do campo ao longo de uma circunferência com centro no eixo dos xx e contida num plano perpendicular ao eixo dos xx, o integral será não nulo. Por exemplo, podemos tomar a circunferência C parametrizada por

$$g(t) = (0, 10\cos t, 10sint) \qquad 0 \leq t \leq 2\pi$$

e obtemos

$$\oint_C F \cdot dg = \int_0^{2\pi} F(0, 10\cos t, 10\sin t) \cdot (0, -10\sin t, 10\cos t)dt$$
$$= \int_0^{2\pi} 100(\cos^2 t + \sin^2 t)dt = 200\pi \neq 0.$$

(c) O campo F é de classe C^1. Calculando as derivadas cruzadas obtemos

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = 2xz = \frac{\partial F_2}{\partial x}$$
$$\frac{\partial F_1}{\partial z} = 2xy = \frac{\partial F_3}{\partial x}$$
$$\frac{\partial F_2}{\partial z} = x^2 + 4yz = \frac{\partial F_3}{\partial y}$$

pelo que o campo é fechado. Uma vez que $\mathbb{R}^3$ é um conjunto em estrela, concluimos que F é um gradiente. Para achar um potencial $\phi(x, y, z)$ resolvemos o sistema

$$\begin{cases} \frac{\partial \phi}{\partial x} = 2xyz \\ \frac{\partial \phi}{\partial y} = x^2z + 2yz^2 \\ \frac{\partial \phi}{\partial z} = x^2y + 2y^2z \end{cases} \iff \begin{cases} \phi(x, y, z) = x^2yz + C_1(y, z) \\ \phi(x, y, z) = x^2yz + y^2z^2 + C_2(x, z) \\ \phi(x, y, z) = x^2yz + y^2z^2 + C_3(x, y) \end{cases}$$

donde se conclui que um potencial é dado, por exemplo, por

$$\phi(x, y, z) = x^2yz + y^2z^2.$$

(d) O campo F é de classe C^1 e calculando as derivadas cruzadas vemos que é um campo fechado. No entanto, uma vez que $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, z) : z \in \mathbb{R}\}$ não é um conjunto simplesmente conexo, nada podemos concluir quanto a F ser ou não um gradiente.

Para decidirmos se F é ou não um gradiente, temos portanto de determinar se existe ou não uma curva fechada ao longo da qual o integral de F é não nulo. Para isso devemos tentar perceber qual é o aspecto geométrico do campo. As duas primeiras componentes mostram que F é tangente aos cilindros com eixo igual ao eixo dos zz pelo que se calcularmos um integral ao longo de uma circunferência centrada num ponto do eixo dos zz e paralela ao plano xy o integral de F será não nulo. Podemos, por exemplo, calcular o integral ao longo da circunferência parametrizada por

$$g(t) = (\cos t, \sin t, 0) \qquad 0 \leq t \leq 2\pi$$

e obtemos

$$\oint F \cdot dg = \int_0^{2\pi} F(\cos t, \sin t, 0) \cdot (-\sin t, \cos t, 0) dt =$$

$$\int_0^{2\pi} \cos^2 t + \sin^2 t dt = 2\pi \neq 0.$$

Conclui-se que o campo F não é um gradiente.

Nota: Uma vez que o campo é fechado, sabemos de um corolário do Teorema de Green que o integral de F ao longo de caminhos é invariante por deformação. Uma vez que qualquer curva fechada em $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,z) : z \in \mathbb{R}\}$ pode ser deformada numa circunferência centrada em torno do eixo zz (possivelmente percorrida várias vezes) ou num ponto concluimos que um campo fechado $F : \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,z) : z \in \mathbb{R}\} \to \mathbb{R}^3$ é um gradiente se e só se o integral ao longo de uma circunferência em torno do eixo dos zz é 0.