Análise Matemática III
2º semestre de 2001/2002

Exercício teste 6

1. Ache uma parametrização para cada uma das seguintes curvas:
   (a) Um segmento de recta percorrido desde o ponto $(1, 0, 1)$ até ao ponto $(0, 0, -1)$,
   (b) O arco da circunferência de raio 1 centrada no ponto $(0, 0, 1)$ e contida no plano $z = 1$, percorrida no sentido que visto da origem é o dos ponteiros do relógio, desde o ponto $(-1, 0, 1)$ até ao ponto $(1, 0, 1)$,
   (c) A porção da curva de intersecção das superfícies $x = y^2$ e $x^2+y^2+z^2 = 1$ contida na região $z \geq 0$, percorrida da esquerda para a direita quando vista da origem.
2. (a) Calcule as coordenadas do centro de massa de um filamento com a forma da curva da alínea (b) acima, se a função densidade de massa for dada por $f(x, y, z) = x^2 + z^2$.
   (b) Considere o campo vectorial $F : \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\} \to \mathbb{R}^3$ definido por

$$F(x, y, z) = \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2}(x, y, z).$$

   Determine o valor do integral

$$\int_\alpha F \cdot dg$$

   para as curvas α das alíneas (a) e (b) percorridas no sentido indicado.

Resolução:

1. (a) Para o caso deste segmento de recta, obtemos

$$g_1(t) = (1, 0, 1) + t[(0, 0, -1) - (1, 0, 1)]$$

   com $t \in [0, 1]$. Ou seja,

$$g_1(t) = (1 - t, 0, 1 - 2t)$$

   (b) Dado que o arco de circunferência está contido no plano $z = 1$, esta última coordenada aparecerá constante na parametrização. Como a curva é percorrida no sentido dos ponteiros do relógio vista da origem, obtemos:

$$g_2(t) = (\cos t, \sin t, 1)$$

   A variação do parâmetro t deduz-se dos pontos inicial $(-1, 0, 1)$ e final $(1, 0, 1)$: temos portanto $t \in [-\pi, 0]$.

(c) Para esta curva podemos tomar como variável independente o y, usando-o pois como parâmetro. Como a curva é percorrida da esquerda para a direita quando vista da origem, o y deve decrescer ao longo dessa curva. Obtemos:

$$y = -t$$
$$x = y^2 = t^2$$
$$z = \sqrt{1 - x^2 - y^2} = \sqrt{1 - t^4 - t^2}$$

(Porque, de acordo com o enunciado, z deve ser sempre positivo)
Para descobrir os limites do intervalo da parametrização, resolvemos, para $z = 0$, o sistema

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ x = y^2 \end{cases}$$

Tirando o valor de y, obtemos

$$y^4 + y^2 = 1$$

donde $y^2 = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$, ou seja $y = \sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}$ ou $y = -\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}$
Temos pois

$$g_3(t) = (t^2, -t, \sqrt{1 - t^4 - t^2})$$

com $t \in [-\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}, \sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}]$.

2. (a) Escrevendo (x_{CM}, y_{CM}, z_{CM}) para as coordenadas do centro de massa, podemos concluir imediatamente por simetria que $z_{CM} = 1$ e, uma vez que a função de densidade de massa e o filamento são simétricos em relação ao plano yz, que $x_{CM} = 0$. A coordenada y_{CM} é dada pela fórmula:

$$y_{CM} = \frac{\int_{\alpha_2} y f(x,y,z) ds}{\int_{\alpha_2} f(x,y,z) ds}$$

Tem-se

$$g_2'(t) = (-\sin t, \cos t, 0) \qquad ||g_2'(t)|| = 1,$$

logo

$$\int_{\alpha_2} y(x^2+z^2) ds = \int_{-\pi}^{0} \sin t(1+\cos^2 t) dt = (-\cos t - \frac{1}{3}\cos^3 t)\Big|_{-\pi}^{0} = -\frac{8}{3},$$

e

$$\int_{\alpha_2} (x^2 + z^2) ds = \int_{-\pi}^{0} (1 + \cos^2 t) dt = \pi + \int_{-\pi}^{0} \frac{1 + \cos 2t}{2} dt = \frac{3\pi}{2}$$

logo

$$y_{CM} = -\frac{16}{9\pi},$$

e portanto as coordenadas do centro de massa são

$$(0, -\frac{16}{9\pi}, 1).$$

(b) Por definição, temos que

$$\begin{aligned}
\int_{\alpha_1} F \cdot dg &= \int_0^1 F(g_1(t)) \cdot g_1'(t) dt \\
&= \int_0^1 F(1-t, 0, 1-2t) \cdot (-1, 0, -2) dt \\
&= \int_0^1 \frac{1}{(1-t)^2 + (1-2t)^2} (1-t, 0, 1-2t) \cdot (-1, 0, -2) dt \\
&= \int_0^1 \frac{5t-3}{5t^2 - 6t + 2} dt \\
&= \frac{1}{2} \log |5t^2 - 6t + 2||_{t=0}^{t=1} \\
&= \frac{1}{2}[\log 1 - \log 2] = -\frac{\log 2}{2}.
\end{aligned}$$

Para a segunda curva, vem

$$\begin{aligned}
\int_{\alpha_2} F \cdot dg &= \int_{-\pi}^0 F(g_2(t)) \cdot g_2'(t) dt \\
&= \int_{-\pi}^0 F(\cos t, \sin t, 1) \cdot (-\sin t, \cos t, 0) dt \\
&= \int_{-\pi}^0 \frac{1}{2} (\cos t, \sin t, 1) \cdot (-\sin t, \cos t, 0) dt \\
&= \int_{-\pi}^0 0 dt = 0.
\end{aligned}$$