# Análise Matemática III
# 2º semestre de 2001/2002

## Exercício teste 5

(a) Mostre que a transformação de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}^2$ definida pela expressão

$$\begin{cases} u = x \\ v = y + x^2 \end{cases}$$

é uma mudança de variável.

(b) Sendo $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y > -x^2, y < 3 - x^2 - 3x\}$, utilize a mudança de variável anterior para calcular o integral

$$\int\int_S e^{y+x^2} dxdy.$$

**Resolução:**

(a) Seja $g$ a transformação definida por $(u, v) = g(x, y) = (x, y + x^2)$. Então,

(1) $g$ é de classe $C^1$ uma vez que

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 1 \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \quad \frac{\partial v}{\partial x} = 2x \quad \frac{\partial v}{\partial y} = 1$$

são funções contínuas.

(2) $g$ é injectiva:

$$\begin{cases} u = x \\ v = y + x^2 \end{cases} \iff \begin{cases} x = u \\ y = v - u^2 \end{cases}$$

isto é, $g$ tem uma inversa $g^{-1}(u, v) = (u, v - u^2)$ e portanto $g$ é injectiva.

(3)

$$\det Dg(x, y) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2x & 1 \end{bmatrix} = 1 \neq 0$$

Conclui-se que $g$ é uma mudança de variável.

(b) Para escrevermos $S$ nas coordenadas $(u, v)$ substitui-se $u = x$ e $v = y + x^2$ nas condições que definem a região $S$:

$$\begin{aligned} x > 0 &\iff & u > 0 &\iff & u > 0 \\ y > -x^2 &\iff & y + x^2 > 0 &\iff & v > 0 \\ y < 3 - x^2 - 3x &\iff & y + x^2 < 3 - 3x &\iff & v < 3 - 3u \end{aligned}$$

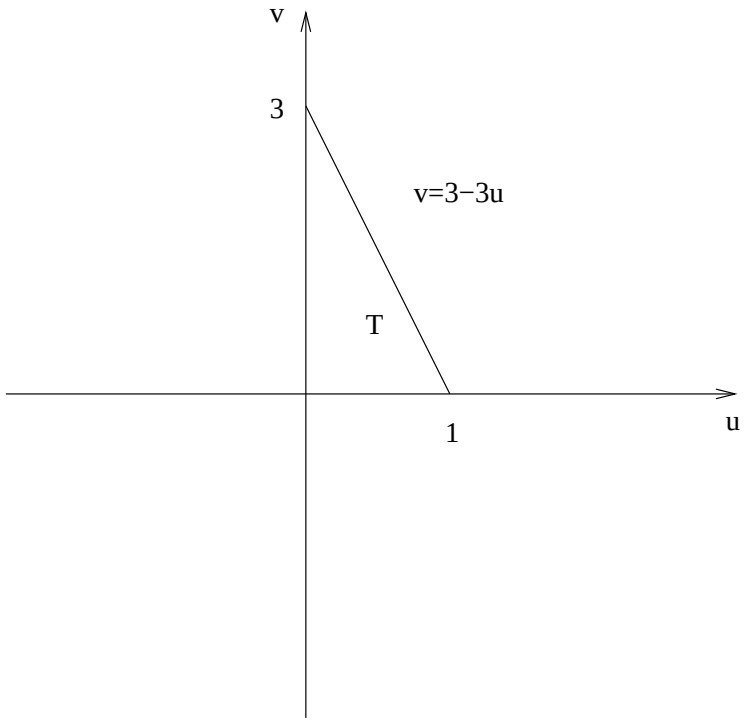



Figura 1: A região $S$ escrita nas coordenadas $u, v$.

A região $T$ definida por estas condições está representada na Figura 1. Aplicando o teorema da mudança de variável obtem-se

$$\begin{aligned}
\int\int_S e^{y+x^2}dxdy &= \int\int_T e^v |\det \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{bmatrix}| \quad dudv \\
&= \int_0^1 \left( \int_0^{3-3u} e^v |\det \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2u & 1 \end{bmatrix}| dv \right) du \\
&= \int_0^1 \left( \int_0^{3-3u} e^v dv \right) du \\
&= \int_0^1 (e^{3-3u} - 1) du \\
&= -\frac{1}{3}\left(1 - e^3\right) - 1 \\
&= \frac{e^3}{3} - \frac{4}{3}.
\end{aligned}$$