Análise Matemática III
2º semestre de 2001/2002

Exercício teste 4

Um sólido S é dado em coordenadas cartesianas pela expressão

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z^2 < \frac{1}{3}(x^2 + y^2), x^2 + y^2 + z^2 < 4, x^2 + y^2 > 1, y > 0\}.$$

(a) Calcule o volume de S usando coordenadas esféricas

(b) Assumindo que a densidade de massa de S é dada pela expressão

$$f(x, y, z) = \frac{1}{x^2 + y^2},$$

calcule o momento de inércia de S em torno do eixo Oz usando coordenadas cilíndricas.

Resolução:

(a) O volume de S é dado por

$$\text{Vol}(S) = \int\int\int_S 1 \; dxdydz.$$

A mudança de variável de coordenadas esféricas para coordenadas cartesianas é dada por

$$\begin{aligned} x &= \rho \sin\phi \cos\theta \\ y &= \rho \sin\phi \sin\theta \\ z &= \rho \cos\phi \end{aligned}$$

com $\rho > 0,\ 0 < \theta < 2\pi,\ 0 < \phi < \pi$. Em coordenadas esféricas, a região de integração escreve-se

$$\begin{aligned} z^2 < \frac{1}{3}(x^2 + y^2) &\iff \rho^2 \cos^2\phi < \frac{1}{3}\rho^2 \sin^2\phi \\ &\iff \tan^2\phi > 3 \\ &\iff \tan\phi > \sqrt{3} \text{ ou } \tan\phi < -\sqrt{3} \\ &\iff \frac{\pi}{3} < \phi < \frac{2\pi}{3} \\ x^2 + y^2 + z^2 < 4 &\iff \rho < 2 \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
x^2+y^2>1 &\iff \rho^2\sin^2\phi>1\\
&\iff \rho>\frac{1}{\sin\phi}\\
y>0 &\iff \rho\sin\phi\sin\theta>0\\
&\iff \cos\theta>0\\
&\iff 0<\theta<\pi.
\end{aligned}
$$

Conclui-se que o volume de S é dado por

$$
\begin{aligned}
\int_0^{\pi}\left(\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}}\left(\int_{\frac{1}{\sin\phi}}^{2}\rho^2\sin\phi d\rho\right)d\phi\right)d\theta &= \int_0^{\pi}\left(\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}}\left(\frac{8}{3}-\frac{1}{3\sin^3\phi}\right)\sin\phi d\phi\right)d\theta\\
&= \int_0^{\pi}\left(\frac{8}{3}\left(-\cos(\frac{2\pi}{3})+\cos(\frac{\pi}{3})\right)+\frac{1}{3}\left.\frac{\cos\phi}{\sin\phi}\right|_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}}\right)d\theta\\
&= \pi\left(\frac{8}{3}-\frac{2}{3\sqrt{3}}\right).
\end{aligned}
$$

(b) O momento de inércia de S em relação ao eixo Oz é dado pela fórmula

$$
I_z=\int\int\int_S\frac{1}{x^2+y^2}(x^2+y^2)dxdydz.
$$

A mudança de variável de coordenadas cilíndricas para coordenadas cartesianas é dada por

$$
\begin{aligned}
x&=r\cos\theta\\
y&=r\sin\theta\\
z&=z
\end{aligned}
$$

com $r>0,\ 0<\theta<2\pi,\ z\in\mathbb{R}$. Em coordenadas cilíndricas, a região de integração escreve-se (ver Figura 1).

$$
\begin{aligned}
z^2<\frac{1}{3}(x^2+y^2) &\iff z^2<\frac{1}{3}r^2\\
&\iff |z|<\frac{1}{\sqrt{3}}r\\
x^2+y^2+z^2<4 &\iff r^2+z^2<4\\
x^2+y^2>1 &\iff r>1\\
y>0 &\iff 0<\theta<\pi.
\end{aligned}
$$

Portanto o momento de inércia (que neste caso irá coincidir com o volume)

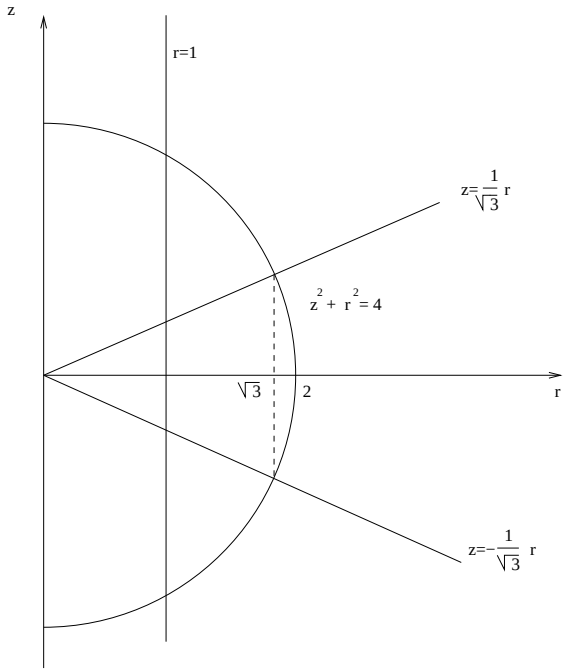


Figura 1: O sólido S em coordenadas cilíndricas (θ fixo entre 0 e π).

é dado por

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi}\left(\int_1^{\sqrt{3}}\left(\int_{-\frac{1}{\sqrt{3}}r}^{\frac{1}{\sqrt{3}}r} r\,dz\right)dr+\int_{\sqrt{3}}^{2}\left(\int_{-\sqrt{4-r^2}}^{\sqrt{4-r^2}} r\,dz\right)dr\right)d\theta &= \\ &= \pi\left(\int_1^{\sqrt{3}}\frac{2}{\sqrt{3}}r^2dr+\int_{\sqrt{3}}^{2}2r\sqrt{4-r^2}dr\right) \\ &= \pi\left(2-\frac{2}{3\sqrt{3}}-\left.\frac{(4-r^2)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right|_{\sqrt{3}}^{2}\right) \\ &= \pi\left(\frac{8}{3}-\frac{2}{3\sqrt{3}}\right).\end{aligned}$$