# Análise Matemática III
# 2º semestre de 2001/2002

## Exercício teste 3

1. Determine o valor do integral
$$\int\int_S (x+y)dxdy$$
onde
$$S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x+y| \leq 1, |x-y| \leq 1\}.$$

2. Considere o sólido tridimensional definido por
$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \sqrt{x^2+y^2} - 2 \leq z \leq \sqrt{4-x^2-y^2} \text{ se } x^2+y^2 \leq 1;$$
$$\sqrt{x^2+y^2} - 2 \leq z \leq 0 \text{ se } 1 \leq x^2+y^2 \leq 4\}$$
Supondo que este sólido tem uma densidade de massa dada por uma função $f(x,y,z)$, escreva expressões para a sua massa usando integrais iterados da forma

(a) $\int(\int(\int dz)dy)dx$;
(b) $\int(\int(\int dx)dy)dz$

**Resolução:**

1. A região de integracão pretendida é a representada na figura 1.
O integral fica então:
$$\begin{aligned}
\int_S (x+y)dxdy &= \int_{-1}^{0}\left(\int_{-1-x}^{1+x}(x+y)dy\right)dx + \int_0^1\left(\int_{x-1}^{1-x}(x+y)dy\right)dx \\
&= \int_{-1}^{0}[xy+y^2/2]_{y=-1-x}^{y=1+x}dx + \int_0^1[xy+y^2/2]_{y=x-1}^{y=1-x}dx \\
&= \int_{-1}^{0} x(1+x)+(1+x)^2/2 - x(-1-x) - (-1-x)^2/2dx + \\
&\quad + \int_0^1 x(1-x)+(1-x)^2/2 - x(x-1) - (x-1)^2/2dx \\
&= \int_{-1}^{0}(2x^2+2x)dx + \int_0^1(-2x^2+2x)dx \\
&= [2x^3/6+x^2]_{-1}^{0} + [-2x^3/6+x^2]_0^1 \\
&= 0.
\end{aligned}$$

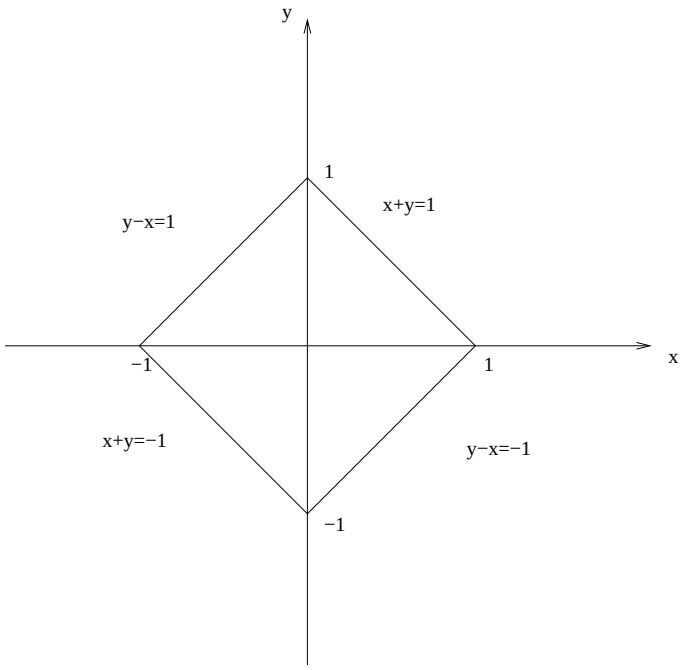



Figura 1: Esboço da região $S$.

2. O sólido pretendido é o esboçado na figura 2.

   (a) A massa é o integral da densidade de massa:

$$\int\int\int_S f(x,y,z)dxdydz.$$

   Para escrevermos este integral em termos de um integral iterado na ordem de integração pretendida consideramos a projecção do sólido no plano $xy$ (ver figura 3) e obtemos os seguintes extremos de integracão:

$$\begin{aligned}\int(\int(\int_S f(x,y,z)dz)dy)dx = &\int_{-2}^{-1}\left(\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}\left(\int_{\sqrt{x^2+y^2}-2}^{0} f(x,y,z)dz\right)dy\right)dx\\ &+\int_{-1}^{1}\left(\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{-\sqrt{1-x^2}}\left(\int_{\sqrt{x^2+y^2}-2}^{0} f(x,y,z)dz\right)dy\right)dx\\ &+\int_{-1}^{1}\left(\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\left(\int_{\sqrt{x^2+y^2}-2}^{\sqrt{4-x^2-y^2}} f(x,y,z)dz\right)dy\right)dx\end{aligned}$$

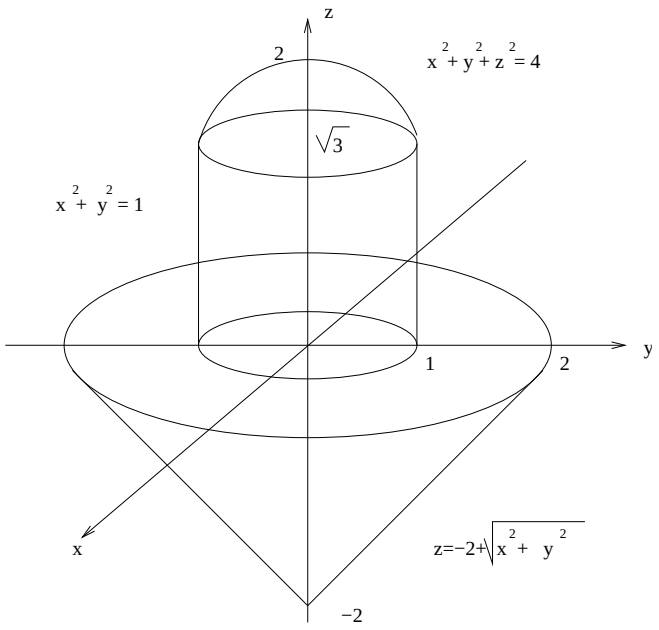



Figura 2: Esboço do sólido $S$.

$$+\int_{-1}^{1}\left(\int_{\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}\left(\int_{\sqrt{x^2+y^2}-2}^{0} f(x,y,z)dz\right)dy\right)dx$$
$$+\int_{1}^{2}\left(\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}\left(\int_{\sqrt{x^2+y^2}-2}^{0} f(x,y,z)dz\right)dy\right)dx$$

(b) Para escrevermos este integral em termos de um integral iterado na ordem de integração pretendida consideramos a projecção do sólido no plano $yz$ (figura 4) e obtemos então os extremos de integracão seguintes.

$$\begin{aligned}\int\left(\int\left(\int_S f(x,y,z)dx\right)dy\right)dz = &\int_{-2}^{0}\left(\int_{-z-2}^{z+2}\left(\int_{-\sqrt{(z+2)^2-y^2}}^{\sqrt{(z+2)^2-y^2}} f(x,y,z)dx\right)dy\right)dz\\ &+\int_{0}^{\sqrt{3}}\left(\int_{-1}^{1}\left(\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y,z)dx\right)dy\right)dz\\ &+\int_{\sqrt{3}}^{2}\left(\int_{-\sqrt{4-z^2}}^{\sqrt{4-z^2}}\left(\int_{-\sqrt{4-y^2-z^2}}^{\sqrt{4-y^2-z^2}} f(x,y,z)dx\right)dy\right)dz.\end{aligned}$$

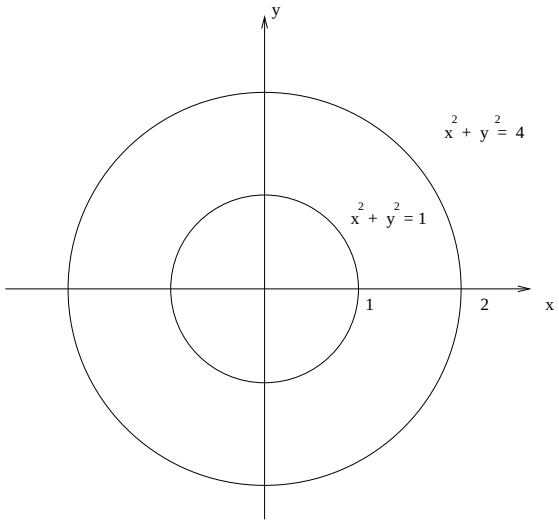



Figura 3: Projecção de $S$ no plano $xy$.

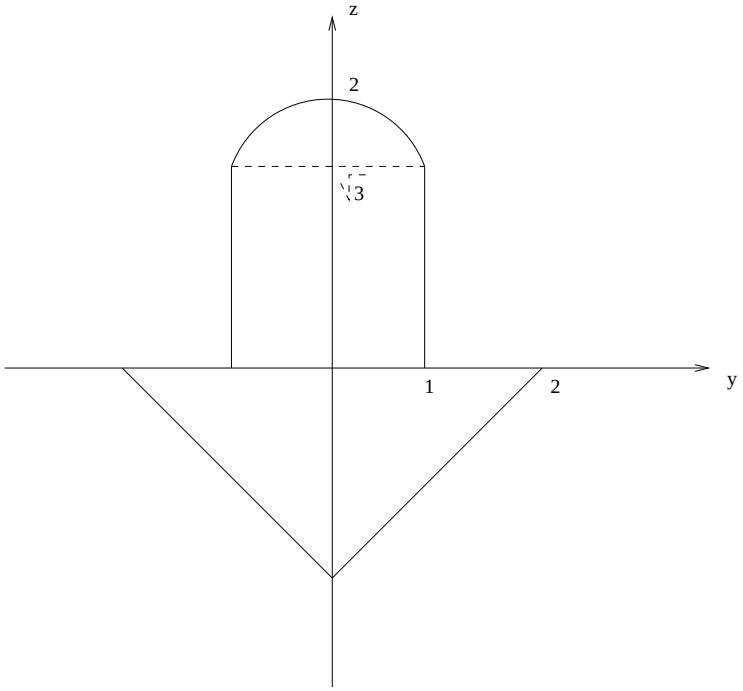



Figura 4: Projecção de $S$ no plano $yz$.