Análise Matemática III
2º semestre de 2001/2002

Resolução do exercício teste 2

1. Calcule o integral da função em escada

$$s : [0,1] \times [1,2] \times [-2,2] \to \mathbb{R}$$

definida por:

$$s(x,y,z) = \begin{cases} -2 & \text{se } x < \frac{1}{2} \text{ e } y < \frac{4}{3}, \\ 1 & \text{se } x \geq \frac{2}{3}, y \geq \frac{5}{3} \text{ e } z \geq 0, \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

2. Indique justificadamente quais dos seguintes conjuntos têm medida nula.
   (a) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = x^2 + y^2\}$,
   (b) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \sin(xy) = 0\}$,
   (c) $\{x \in \mathbb{R} : \lim_{n\to\infty} e^{nx} = 0\}$.

Resolução:

1. Pela definição do integral de uma função em escada temos

$$\begin{aligned} \int_{[0,1]\times[1,2]\times[-2,2]} s &= -2\,\mathrm{Vol}\left([0,\frac{1}{2}] \times [1,\frac{4}{3}] \times [-2,2]\right) + 1\,\mathrm{Vol}\left([\frac{2}{3},1] \times [\frac{5}{3},2] \times [0,2]\right) \\ &= -\frac{4}{3} + \frac{2}{9} = -\frac{10}{9}\ . \end{aligned}$$

2. (a) Este conjunto é o gráfico da função contínua $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x,y) = x^2 + y^2$. Portanto o conjunto tem medida nula em $\mathbb{R}^3$.
   (b) Temos

$$\sin(xy) = 0 \iff xy = k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

   Assim, o conjunto em questão pode ser escrito como a união

$$\bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : xy = k\pi\}.$$

   Para $k \neq 0$, $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : xy = k\pi\}$ é a união do gráfico da função contínua $f(x) = \frac{k\pi}{x}$ sobre o intervalo $]-\infty, 0[$ com o gráfico da mesma função sobre o intervalo $]0, +\infty[$. Para $k = 0$, o conjunto $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : xy = 0\}$ é a união dos eixos dos xx e dos yy que são gráficos de funções contínuas (constantes iguais a 0).
   Uma vez que $\mathbb{Z}$ é numerável, conclui-se que o conjunto em questão é uma união numerável de conjuntos de medida nula, pelo que tem medida nula.

(c) Temos

$$\lim_{n\to\infty} e^{nx} = 0 \iff x < 0,$$

logo o conjunto em questão é o intervalo aberto $]-\infty, 0[$ que não tem medida nula.