Análise Matemática III
2º semestre de 2001/2002

Solução do exercício teste 1

Considere o conjunto $S \subset \mathbb{R}^3$ definido por

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 < x < y,\ z^2 > x^2 + y^2,\ 0 < z < 4,\ x^2 + y^2 + (z-2)^2 > 1\}.$$

(a) Esboce o conjunto S.

(b) Descreva detalhadamente os cortes por planos perpendiculares aos eixos dos xx e dos zz.

Resolução:

(a) A região S é limitada pelos planos verticais $x = 0$ e $x = y$, pelos planos horizontais $z = 0$ e $z = 4$, pela superfície cónica [1] $z^2 = x^2 + y^2 \iff z = \pm\sqrt{x^2 + y^2}$, e pela superfície esférica de centro em $(0, 0, 2)$ e raio 1, dada pela equação $x^2 + y^2 + (z-2)^2 = 1$.

O sólido S tem portanto o aspecto indicado na Figura 1.

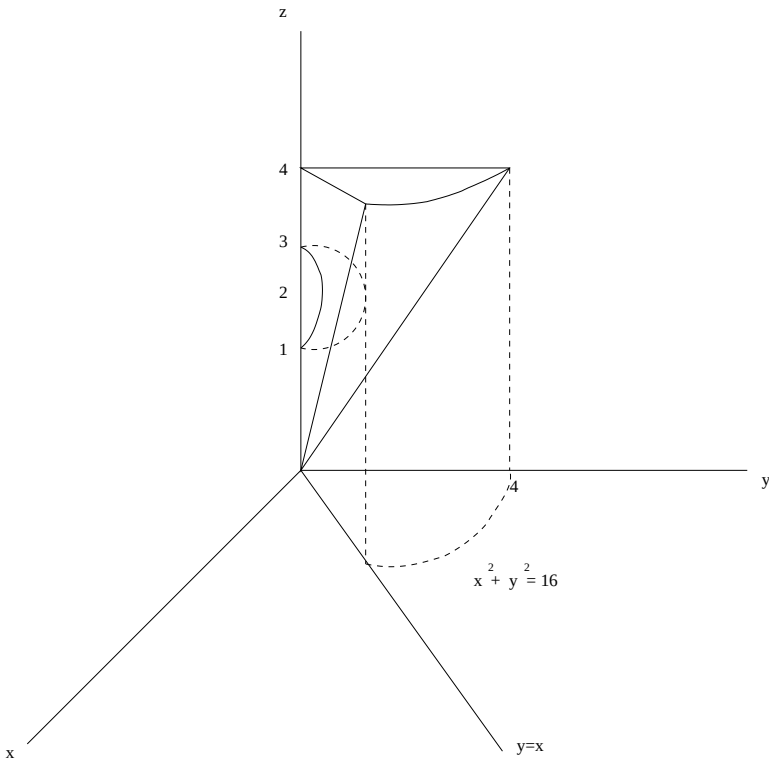


Figura 1: Esboço do sólido S.

[1] Para ver que a equação $z = \pm\sqrt{x^2 + y^2}$ define uma superfície cónica, note-se que $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ é a distância de um ponto (x, y, z) ao eixo dos zz. Logo, os pontos que satisfazem $z = \pm r$ são os pontos que se obtêm rodando a recta $z = x$ no plano xz em torno do eixo dos zz, ou seja os pontos de um cone que tem como eixo o eixo dos zz e que tem uma abertura de 45 graus.

(b) Os planos perpendiculares ao eixo Ox são os planos definidos por equações da forma $x = c$ com c uma constante (que podemos assumir ≥ 0, senão a intersecção com S é vazia). O corte por este plano é formado pelo conjunto $\{(c, y, z) \in \mathbb{R}^3 : c < y, z^2 > c^2 + y^2, 0 < z < 4, c^2 + y^2 + (z-2)^2 > 1\}$. No plano (y, z) esta região consiste no conjunto dos pontos que estão à direita da recta $y = c$, acima da hipérbole $z = \sqrt{c^2 + y^2}$, na faixa $0 < z < 4$ e que satisfazem a relação $y^2 + (z-2)^2 > 1 - c^2$.

Esta última equação é automáticamente satisfeita se $1 - c^2 < 0 \iff 0 \leq c \leq 1$ uma vez que $y^2 + z^2 \geq 0$. Por outro lado, mesmo para $0 \leq c \leq 1$, se $\sqrt{1-c^2} \leq c$ então o círculo $y^2 + (z-2)^2 \leq 1 - c^2$ está contido na região à esquerda da recta vertical $y = c$ e portanto a relação $y^2 + (z-2)^2 > 1 - c^2$ pode ser ignorada (é mais fraca do que a condição $y > c$).

$$\sqrt{1-c^2} = c \iff 1 - c^2 = c^2 \iff 2c^2 = 1 \iff c = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

(onde usámos o facto de c ser ≥ 0) logo temos de entrar em conta com a relação $c^2 + y^2 + (z-2)^2 > 1$ apenas se $c \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$. Outra forma de pensar nisto é a seguinte: $\frac{1}{\sqrt{2}}$ é o valor a partir do qual um plano paralelo ao plano zy não toca no "buraco" do cone. Corresponde ao raio do buraco multiplicado pelo coseno de 45 graus.

Assim, para $0 \leq c \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$, o corte do sólido pelo plano $x = c$ tem o aspecto indicado na Figura 2.

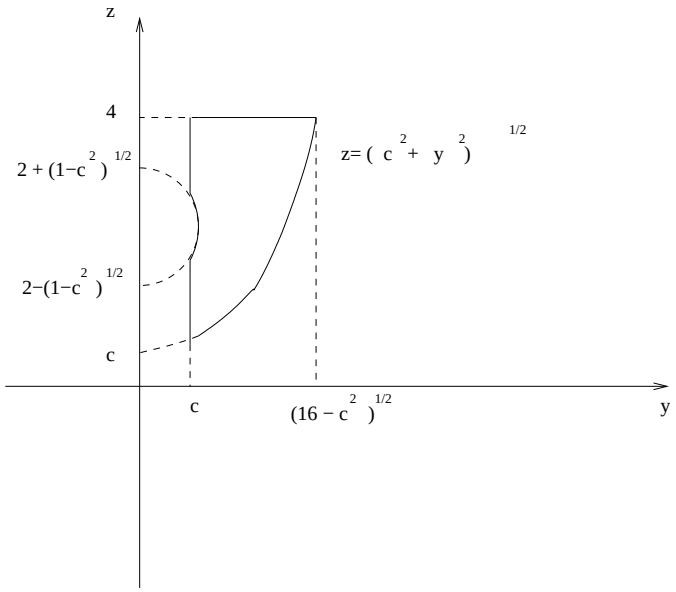


Figura 2: Cortes de S por planos $x = c$ com $0 \leq c \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$.

O maior valor que c pode tomar para que a intersecção de S com $x = c$ seja não vazia é a abcissa do ponto sobre a circunferência de raio 4 que faz um ângulo de 45 graus com o eixo dos xx (esta é a coordenada do vértice de S mais próximo do observador na Figura 1). Este valor é $4 \cos \frac{\pi}{4} = 2\sqrt{2}$.

Outra maneira de chegar a este valor máximo de c seria calcular qual é o valor de c em que a recta vertical $y = c$ e a hipérbole $z = \sqrt{c^2 + y^2}$ se intersectam em $z = 4$.

Para $\frac{1}{\sqrt{2}} \leq c \leq 2\sqrt{2}$ temos então que o corte pelo plano $x = c$ é o indicado na Figura 3 (a única diferença é que a condição de estar fora da esfera de raio 1 centrada em $(0, 0, 2)$ não tem influência no corte).

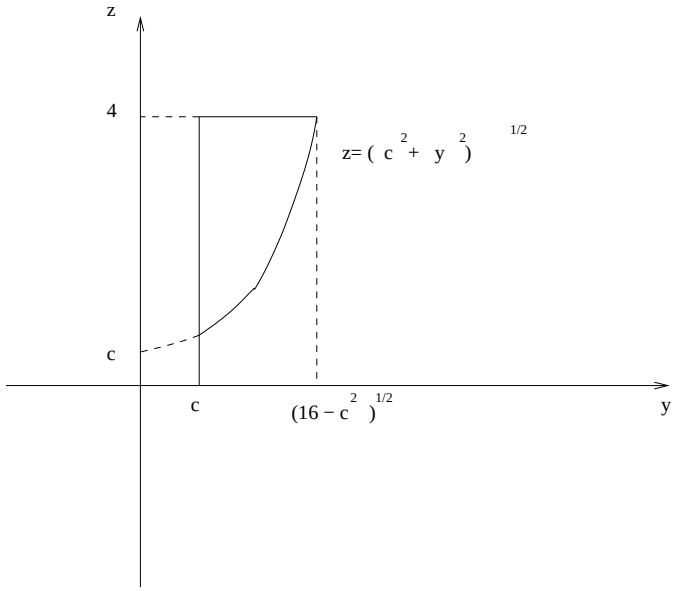


Figura 3: Cortes de S por planos $x = c$ com $\frac{1}{\sqrt{2}} \leq c \leq 2\sqrt{2}$.

Os cortes por planos perpendiculares ao eixo dos zz, isto é por planos $z = c$ com $0 \leq c \leq 4$ fazem-se de forma análoga: o corte é o conjunto dos pontos

$$\{(x, y, c) \in \mathbb{R}^3 : 0 < x < y, x^2 + y^2 < c^2, x^2 + y^2 > 1 - (c-2)^2\}.$$

Se $1-(c-2)^2 \leq 0 \iff c \leq 1$ ou $c \geq 3$ a última condição é automática (os planos horizontais a altura c não intersectam o buraco para estes valores de c) e portanto o corte consiste num sector do círculo de raio c (ver Figura 4). Se $1 \leq c \leq 3$ então o corte consiste num sector entre

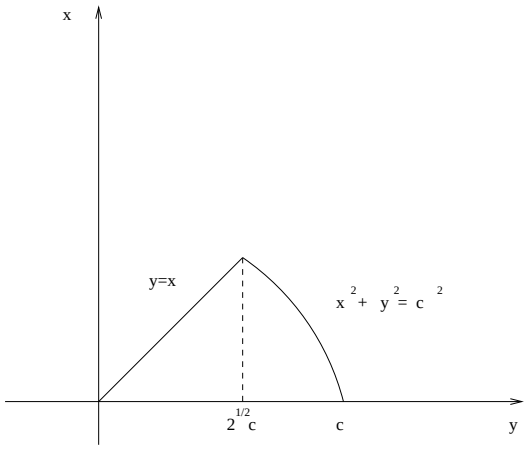


Figura 4: Cortes de S por planos $z = c$ com $0 \leq c \leq 1$ ou $3 \leq c \leq 4$.

as circunferências de raio $\sqrt{1-(c-2)^2}$ e c (ver Figura 5).

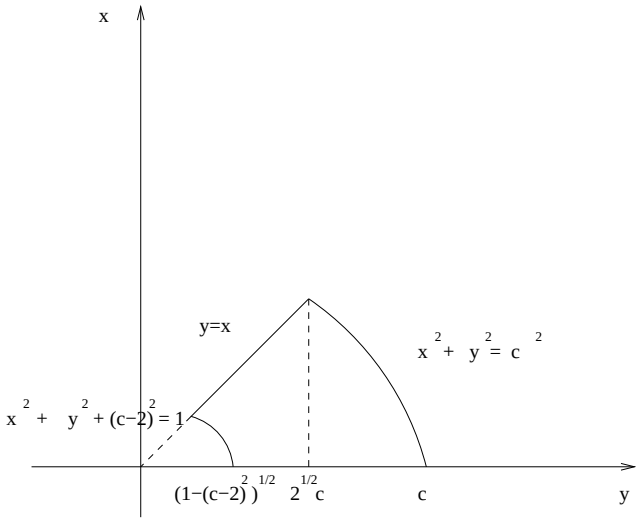


Figura 5: Cortes de S por planos $z = c$ com $1 \leq c \leq 3$.