Análise Matemática III
2º semestre de 2001/2002

Exercício teste 13

Considere a superfície

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = z^2 + 1,\ -1 < z < 3\}$$

e o campo vectorial

$$\vec{F}(x, y, z) = (x, y, -2z)$$

Calcule o fluxo de $\vec{F}$ através de S no sentido da normal que aponta para fora (isto é no sentido contrário àquele em que fica o eixo dos zz),

(a) pela definição de fluxo.

(b) usando o teorema da divergência.

(c) usando o teorema de Stokes.

Resolução:

(a) Em coordenadas cilíndricas (r, θ, z), S é definida por $r^2 = z^2 + 1 \iff r = \sqrt{z^2+1}$ com $-1 < z < 3$ logo S trata-se de uma hipérbole rodada em torno do eixo dos zz, ou seja de um hiperbolóide.

Uma parametrização para S é dada por

$$g(z, \theta) = (\sqrt{z^2+1}\cos\theta, \sqrt{z^2+1}\sin\theta, z), \quad 0 < \theta < 2\pi, -1 < z < 3.$$

Temos

$$\frac{\partial g}{\partial z} \times \frac{\partial g}{\partial \theta} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{z}{\sqrt{z^2+1}}\cos\theta & \frac{z}{\sqrt{z^2+1}}\sin\theta & 1 \\ -\sqrt{z^2+1}\sin\theta & \sqrt{z^2+1}\cos\theta & 0 \end{vmatrix} = (-\sqrt{z^2+1}\cos\theta, -\sqrt{z^2+1}\sin\theta, z).$$

Quando z é positivo, a terceira componente de $\frac{\partial g}{\partial z} \times \frac{\partial g}{\partial \theta}$ é positiva portanto este vector tem o contrário ao da normal dada à superfície. Conclui-se que

$$\begin{aligned}
&\int\int_S \vec{F} \cdot \vec{n} dS = \\
&= -\int_0^{2\pi}\int_{-1}^{3} \vec{F}(\sqrt{z^2+1}\cos\theta, \sqrt{z^2+1}\sin\theta, z) \cdot (-\sqrt{z^2+1}\cos\theta, -\sqrt{z^2+1}\sin\theta, z) dz d\theta \\
&= -\int_0^{2\pi}\int_{-1}^{3} (\sqrt{z^2+1}\cos\theta, \sqrt{z^2+1}\sin\theta, -2z) \cdot (-\sqrt{z^2+1}\cos\theta, -\sqrt{z^2+1}\sin\theta, z) dz d\theta \\
&= -\int_0^{2\pi}\int_{-1}^{3} -(z^2+1) - 2z^2 dz d\theta = -2\pi(-4-28) = 64\pi.
\end{aligned}$$

(b) $\vec{F}$ é um campo vectorial de classe C^1 em $\mathbb{R}^3$ logo podemos aplicar o teorema da divergência à região

$$D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 < z^2 + 1 \ , -1 < z < 3\}.$$

A fronteira de D, é formada por S e pelas dois discos

$$S_1 = \{(x,y,3) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2 \leq 10\} \quad \text{e } S_2 = \{(x,y,-1) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2 \leq 2\}.$$

Uma vez que a normal a S dada, $\vec{n}$, é a normal exterior a D, o teorema da divergência diz que

$$\int\int\int_D \nabla\cdot\vec{F}dxdydz = \int\int_S \vec{F}\cdot\vec{n} + \int\int_{S_1} \vec{F}\cdot(0,0,1)dS + \int\int_{S_2} \vec{F}\cdot(0,0,-1)dS.$$

Como

$$\nabla\cdot\vec{F} = 1+1-2 = 0$$

conclui-se que

$$\begin{aligned}
\int\int_S \vec{F}\cdot\vec{n}dS &= -\int\int_{S_1} \vec{F}\cdot(0,0,1)dS - \int\int_{S_2} \vec{F}\cdot(0,0,-1)dS \\
&= -\int\int_{S_1} -2zdS - \int\int_{S_2} 2zdS \\
&= \int\int_{S_1} 6dS - \int\int_{S_2} -2dS \\
&= 6\text{área}(S_1) + 2\text{área}(S_2) = 6\pi 10 + 2\pi 2 = 64\pi.
\end{aligned}$$

(c) Uma vez que $\vec{F}$ é solenoidal (isto é $\nabla\cdot\vec{F} = 0$) e o domínio de $\vec{F}$ é $\mathbb{R}^3$ que é um conjunto em estrela, concluimos que $\vec{F}$ é um rotacional. Para achar um potencial vector $\vec{A}$ temos de resolver o sistema

$$\begin{aligned}
\nabla\times\vec{A} = \vec{F} &\iff \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_1 & A_2 & A_3 \end{vmatrix} = (x,y,-2z) \\
&\iff \begin{cases} \frac{\partial A_3}{\partial y} - \frac{\partial A_2}{\partial z} = x \\ \frac{\partial A_1}{\partial z} - \frac{\partial A_3}{\partial x} = y \\ \frac{\partial A_2}{\partial x} - \frac{\partial A_1}{\partial y} = -2z \end{cases}
\end{aligned}$$

Fazendo, por exemplo, $A_3 = 0$ obtemos,

$$\begin{cases} -\frac{\partial A_2}{\partial z} = x \\ \frac{\partial A_1}{\partial z} = y \\ \frac{\partial A_2}{\partial x} - \frac{\partial A_1}{\partial y} = -2z \end{cases} \iff \begin{cases} A_2(x,y,z) = -xz + C_1(x,y) \\ A_1(x,y,z) = yz + C_2(x,y) \\ \frac{\partial A_2}{\partial x} - \frac{\partial A_1}{\partial y} = -2z \end{cases}$$

Substituindo na última equação obtemos

$$-z + \frac{\partial C_1}{\partial x}(x,y) - z - \frac{\partial C_2}{\partial y}(x,y) = -2z$$

pelo que podemos fazer $C_1(x,y) = C_2(x,y) = 0$. Conclui-se que um potencial vector para $\vec{F}$ é dado por

$$\vec{A}(x,y,z) = (yz, -xz, 0).$$

Pelo teorema de Stokes,

$$\int\int_S \vec{F}\cdot\vec{n}dS = \int\int_S (\nabla\times\vec{A})\cdot\vec{n}dS = \oint_{\partial S}\vec{A}\cdot d\vec{r}.$$

O bordo de S é constituído por duas curvas:

$$\alpha_1 = \{(x,y,3)\in\mathbb{R}^3 : x^2+y^2 = 10\}$$

e

$$\alpha_2 = \{(x,y,-1)\in\mathbb{R}^3 : x^2+y^2 = 2\}.$$

De acordo com a regra da mão direita, quando vistas de muito acima do plano xy, α_1 deve ser percorrida no sentido dos ponteiros do relógio e α_2 no sentido directo.

Uma parametrização de α_1 é

$$g_1(t) = (\sqrt{10}\cos t, \sqrt{10}\sin t, 3) \quad 0 < t < 2\pi$$

que no entanto percorre a curva no sentido directo, enquanto que uma parametrização para α_2 é

$$g_2(t) = (\sqrt{2}\cos t, \sqrt{2}\sin t, -1) \quad 0 < t < 2\pi$$

que percorre a curva α_2 no sentido desejado. Assim,

$$\begin{aligned}\int\int_S \vec{F}\cdot\vec{n} &= \int_{\alpha_1}\vec{A}\cdot d\vec{r} + \int_{\alpha_2}\vec{A}\cdot d\vec{r}\\ &= -\int_0^{2\pi}(3\sqrt{10}\sin t, 3\sqrt{10}\cos t, 0)\cdot(-\sqrt{10}\sin t, \sqrt{10}\cos t, 0)dt\\ &\quad + \int_0^{2\pi}(-\sqrt{2}\sin t, \sqrt{2}\cos t, 0)\cdot(-\sqrt{2}\sin t, \sqrt{2}\cos t, 0)dt\\ &= \int_0^{2\pi} 30dt + \int_0^{2\pi} 2dt = 64\pi.\end{aligned}$$