Análise Matemática III
2º semestre de 2001/2002

Exercício teste 12

Considere a seguinte variedade de dimensão 2 em $\mathbf{R}^3$:

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : \left(\sqrt{x^2 + y^2} - 2\right)^2 + z^2 = 1, z > 0\}.$$

(a) Calcule a área de S.

(b) Determine a expressão para a normal unitária com terceira componente positiva em cada ponto da superfície S.

(c) Calcule o fluxo através de S, segundo a normal unitária com terceira componente positiva, do campo vectorial

$$F(x, y, z) = (0, 0, 1).$$

Resolução:

(a) Uma parametrização para a variedade é dada por:

$$g : [1, 3] \times [0, 2\pi] \to \mathbf{R}^3$$

$$g(r, \theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta, \sqrt{1 - (r-2)^2})$$

Obtemos então:

$$\frac{\partial g}{\partial r} = (\cos\theta, \sin\theta, -\frac{r-2}{\sqrt{1-(r-2)^2}})$$

$$\frac{\partial g}{\partial \theta} = (-r\sin\theta, r\cos\theta, 0)$$

$$\frac{\partial g}{\partial r} \times \frac{\partial g}{\partial \theta} = \left(\frac{r(r-2)}{\sqrt{1-(r-2)^2}}\cos\theta, \frac{r(r-2)}{\sqrt{1-(r-2)^2}}\sin\theta, r\right)$$

Donde:

$$||\frac{\partial g}{\partial r} \times \frac{\partial g}{\partial \theta}|| = \frac{r}{\sqrt{1-(r-2)^2}}$$

Logo a área de S é dada por

$$\int_0^{2\pi}\int_1^3 \frac{r}{\sqrt{1-(r-2)^2}} dr d\theta = \int_0^{2\pi}\int_1^3 \frac{r-2}{\sqrt{1-(r-2)^2}} + \frac{2}{\sqrt{1-(r-2)^2}} dr d\theta$$

$$= 2\pi\left[-\sqrt{1-(r-2)^2} + 2\arcsin(r-2)\right]_1^3 = 4\pi^2.$$

(b) Da alínea anterior tiramos que:

$$n = \frac{\frac{\partial g}{\partial r} \times \frac{\partial g}{\partial \theta}}{||\frac{\partial g}{\partial r} \times \frac{\partial g}{\partial \theta}||} = \frac{1}{\frac{r}{\sqrt{1-(r-2)^2}}} \times (\frac{r(r-2)}{\sqrt{1-(r-2)^2}} \cos\theta, \frac{r(r-2)}{\sqrt{1-(r-2)^2}} \sin\theta, r)$$

$$= ((r-2)\cos\theta, (r-2)\sin\theta, \sqrt{1-(r-2)^2}).$$

(c) Uma vez que a terceira componente de $\frac{\partial g}{\partial r} \times \frac{\partial g}{\partial \theta}$ é positiva, e portanto este vector tem o sentido da normal a S dada, o fluxo é dado por:

$$\int_S F \cdot n = \int_0^{2\pi} \int_1^3 F(g(r,\theta)) \cdot (\frac{\partial g}{\partial r} \times \frac{\partial g}{\partial \theta}) dr d\theta = \int_0^{2\pi} \int_1^3 r dr d\theta = 2\pi [r^2/2]_1^3 = 8\pi.$$