Análise Matemática III
2º semestre de 2001/2002

Exercício teste 11

Considere o seguinte subconjunto de $\mathbb{R}^3$:

$$C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 = y^2 + z^2, 2x + z = 2\}$$

(a) Mostre que C é uma variedade e indique a sua dimensão.

(b) Determine o espaço tangente e o plano normal (não o espaço normal) a C no ponto $(1, 1, 0)$.

(c) Utilizando o método dos multiplicadores de Lagrange determine os pontos de C cuja distância à origem é máxima e mínima.

Resolução:

(a) Seja $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ a função definida por

$$F(x, y, z) = (x^2 - y^2 - z^2, 2x + z - 2).$$

Então $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : F(x, y, z) = (0, 0)\}$. F é uma função de classe C^1. A matriz Jacobiana de F é dada por

$$DF(x, y, z) = \begin{bmatrix} 2x & -2y & -2z \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Esta matriz tem característica 2 excepto quando $(2x, -2y, -2z)$ é um múltiplo de $(2, 0, 1)$, isto é, quando $y = 0$ e $2x = 2(-2z) \iff x = -2z$.

Uma vez que o sistema

$$\begin{cases} x^2 = y^2 + z^2 \\ 2x + z = 2 \\ x = -2z \\ y = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x^2 = z^2 \\ z = -\frac{2}{3} \\ x = \frac{4}{3} \\ y = 0 \end{cases}$$

não tem soluções, concluimos que DF tem característica 2 em todos os pontos de C e portanto C é uma variedade de dimensão $3 - 2 = 1$.

(b) As linhas da matriz $DF(1,1,0)$ formam uma base para o espaço normal no ponto $(1,1,0)$. Isto é

$$\big(T_{(1,1,0)}C\big)^{\perp} = \{\alpha(2,-2,0) + \beta(2,0,1) : \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}.$$

O espaço tangente tem dimensão 1 e é gerado pelo produto externo de $(2,-2,0)$ e $(2,0,1)$. Como

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (-2,-2,4)$$

conclui-se que o espaço tangente é

$$T_{(1,1,0)}C = \{\alpha(-2,-2,4) : \alpha \in \mathbb{R}\}.$$

O plano normal à curva C é o plano paralelo ao espaço normal que passa pelo ponto $(1,1,0)$. É portanto o plano com equação paramétrica

$$(1,1,0) + \alpha(2,-2,0) + \beta(2,0,1), \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

ou, equivalentemente, o plano com equação cartesiana

$$-2(x-1) - 2(y-1) + 4(z-0) = 0 \iff x + y + 2z = 2$$

(uma vez que $(-2,-2,4)$ é um vector perpendicular ao plano normal e $(1,1,0)$ pertence ao plano).

(c) Os pontos de C cuja distância à origem é máxima e mínima são os pontos de máximo e mínimo da restrição a C da função $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$ (uma vez que $u \to \sqrt{u}$ é uma função monótona). A função f é diferenciável logo pelo método dos multiplicadores de Lagrange os máximos e mínimos têm de ocorrer nos pontos que são solução do seguinte sistema

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x}\left(x^2+y^2+z^2+\lambda_1(x^2-y^2-z^2)+\lambda_2(2x+z-2)\right) = 0 \\ \frac{\partial}{\partial y}\left(x^2+y^2+z^2+\lambda_1(x^2-y^2-z^2)+\lambda_2(2x+z-2)\right) = 0 \\ \frac{\partial}{\partial z}\left(x^2+y^2+z^2+\lambda_1(x^2-y^2-z^2)+\lambda_2(2x+z-2)\right) = 0 \\ x^2 = y^2 + z^2 \\ 2x + z = 2 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 2x + 2\lambda_1 x + 2\lambda_2 = 0 \\ 2y - 2\lambda_1 y = 0 \iff y = 0 \text{ ou } \lambda_1 = 1 \\ 2z - 2\lambda_1 z + \lambda_2 = 0 \\ x^2 = y^2 + z^2 \\ 2x + z = 2 \end{cases}$$

Se $\lambda_1 = 1$ obtem-se o sistema

$$\begin{cases} x = 0 \\ \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 = 0 \\ 0 = y^2 + z^2 \\ z = 2 \end{cases}$$

que não tem soluções. Por outro lado, se $y = 0$, obtem-se o sistema

$$\begin{cases} 2x + 2\lambda_1 x + 2\lambda_2 = 0 \\ y = 0 \\ 2(1 - \lambda_1)z + \lambda_2 = 0 \\ x^2 = z^2 \iff x = \pm z \\ 2x + z = 2 \end{cases}$$

que tem duas soluções: $(\frac{2}{3}, 0, \frac{2}{3})$ e $(2, 0, -2)$. São estes os únicos candidatos a pontos de máximo e mínimo.

Uma vez que C é um conjunto limitado e fechado e f é contínua, o teorema de Weierstrass garante que f tem um máximo e mínimo sobre C. Como $f(\frac{2}{3}, 0, \frac{2}{3}) = \frac{8}{9} < 8 = f(2, 0, -2)$ conclui-se que o ponto de C que está à distância máxima é $(2, 0, -2)$ e o ponto que está à distância mínima é $(\frac{2}{3}, 0, \frac{2}{3})$.