Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

ANÁLISE MATEMÁTICA III

TODOS OS CURSOS

9 DE JULHO DE 2002 - 9 HORAS

SEGUNDO EXAME. DURAÇÃO: 3H

Apresente todos os cálculos

(2 val.) (1) Considere o sólido

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z < 2,\ x + y < 1,\ x > 0,\ y > 0, z > 0\}.$$

Escreva uma expressão para o volume de V em termos de integrais iterados na ordem $\int(\int(\int dy)dx)dz$.

(2 val.) (2) Sendo

$$V = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq 1 + \sqrt{x^2 + y^2}, z \leq 2, x > 0\right\},$$

use uma mudança de coordenadas apropriada para calcular

$$\int\int\int_V \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} dxdydz.$$

(1.5 val.) (3) Calcule o comprimento da linha parametrizada por

$$\alpha(t) = (e^{-t}\cos t, e^{-t}\sin t) \qquad 0 \leq t \leq +\infty.$$

(4) Considere o campo vectorial

$$\vec{F}(x, y) = (x\sqrt{x^2 + y^2 - 4}, y\sqrt{x^2 + y^2 - 4}).$$

(1.5 val.) (a) Determine se o campo $\vec{F}$ é um gradiente no seu domínio.

(1.5 val.) (b) Calcule o integral de $\vec{F}$ ao longo do caminho

$$\alpha(t) = (3 + 2e^t, \sin t) \quad 0 \leq t \leq \pi.$$

(5) Considere a superfície

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z - 3 + xy = 0.\}$$

(1.5 val.) (a) Calcule a área da intersecção de M com o cilindro

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 < 1\}.$$

(1.5 val.) (b) Escreva a equação cartesiana do plano tangente a M no ponto $(2, 2, -1)$.

(2 val.) (c) Determine o(s) ponto(s) de M que se encontram mais perto da origem.

(6) Considere o campo vectorial

$$\vec{G}(x,y,z) = (z, x, 3y)$$

e a superfície

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 4,\ x > 0,\ z > 0\}.$$

Calcule o fluxo de $\nabla \times \vec{G}$ através de S no sentido da normal interior à superfície esférica,

(2 val.) (a) usando Teorema de Stokes,

(2.5 val.) (b) usando o Teorema da Divergência.

(2 val.) (7) Mostre que a equação

$$\int_0^{y^2} e^{-yxt^2} dt = 1$$

define implicitamente y como uma função de x em torno do ponto $(0,1)$ e calcule

$$\frac{dy}{dx}(0).$$