Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

ANÁLISE MATEMÁTICA III

TODOS OS CURSOS

20 DE JUNHO DE 2002 - 9 HORAS

PRIMEIRO EXAME: TODOS OS GRUPOS. DURAÇÃO: 3H
SEGUNDO TESTE: GRUPOS 6 A 9. DURAÇÃO: 1H30M

(1) Considere o sólido

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z < 2,\ 0 < y < 1,\ x > 0,\ z > 0\}.$$

Escreva uma expressão para o volume de V em termos de integrais iterados na ordem $\int(\int(\int dy)dx)dz$.
Resolução: O volume é dado por

$$\mathrm{Vol}(V) = \int\int\int_V dx\ dy\ dz.$$

Uma vez que $x, y, z > 0$ e $x + y + z < 2$ conclui-se que $0 < z < 2$. Para cada z fixo, o corte do sólido V é definido pelas condições:

$$x > 0, \quad 0 < y < 1, \quad x + y < 2 - z.$$

Quando $2 - z < 1 \iff z > 1$ a condição $y < 1$ é automática portanto devemos considerar os dois casos $0 < z \leq 1$ e $1 < z < 2$ separadamente. Concluimos então que, pelo Teorema de Fubini, o volume é dado pelo seguinte integral iterado:

$$\begin{aligned}\mathrm{Vol}(V) = &\int_0^1 \left(\int_0^{1-z}\left(\int_0^1 dy\right)dx + \int_{1-z}^{2-z}\left(\int_0^{2-x-z} dy\right)dx\right)dz \\ &+ \int_1^2 \left(\int_0^{2-z}\left(\int_0^{2-x-z} dy\right)dx\right)dz.\end{aligned}$$

(2) Use *coordenadas esféricas* para calcular a massa total do sólido

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 2, x^2 + y^2 > 1, 0 < x < y\}$$

se a densidade de massa for dada por

$$f(x, y, z) = \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Resolução: A massa total é dada pelo integral sobre V da densidade de massa. Em coordenadas esféricas (ρ, θ, ϕ), a região de integração escreve-se

$$\rho < \sqrt{2}, \quad \rho^2 \sin^2\phi > 1 \iff \rho > \frac{1}{\sin\phi}, \quad \frac{\pi}{4} < \theta < \frac{\pi}{2}.$$

Como

$$\frac{1}{\sin\phi} < \sqrt{2} \iff \sin\phi > \frac{1}{\sqrt{2}} \iff \frac{\pi}{4} < \phi < \frac{3\pi}{4},$$

conclui-se que

$$\begin{aligned}\int_V f &= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \left(\int_{\frac{1}{\sin\phi}}^{\sqrt{2}} \frac{1}{\rho^2} \rho^2 \sin\phi d\rho \right) d\phi \right) d\theta \\ &= \frac{\pi}{4} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \left(\int_{\frac{1}{\sin\phi}}^{\sqrt{2}} \sin\phi d\rho \right) d\phi \\ &= \frac{\pi}{4} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \left(\sqrt{2}\sin\phi - 1 \right) d\phi \\ &= \frac{\pi}{4} \left(2 - \frac{\pi}{2} \right).\end{aligned}$$

(3) Calcule o momento de inércia em torno do eixo dos zz da curva definida por

$$C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1,\ x + y = 0\}$$

se a densidade de massa for dada por

$$f(x,y,z) = 1.$$

Resolução: O momento de inércia é dado pelo integral

$$I_z = \int_C (x^2 + y^2) ds$$

Como

$$\left\{ \begin{array}{l} x + y = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{l} y = -x \\ 2x^2 + z^2 = 1 \iff \frac{x^2}{\frac{1}{2}} + z^2 = 1, \end{array} \right.$$

a projecção de C no plano xz é uma elipse centrada na origem. Portanto uma parametrização para C é dada por

$$g(t) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \cos t, -\frac{1}{\sqrt{2}} \cos t, \sin t \right), \quad 0 < t < 2\pi.$$

Portanto

$$g'(t) = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \sin t, \frac{1}{\sqrt{2}} \sin t, \cos t \right)$$

e

$$||g'(t)|| = \frac{1}{2}\sin^2 t + \frac{1}{2}\sin^2 t + \cos^2 t = 1$$

conclui-se que

$$\begin{aligned}\int_C (x^2 + y^2) ds &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} \left(\cos^2 t + \cos^2 t \right) ||g'(t)|| dt \\ &= \int_0^{2\pi} \cos^2 t dt = \pi.\end{aligned}$$

(4) Calcule o trabalho realizado pela força

$$\vec{F}(x,y,z) = \left(2xy, x^2, 1 \right)$$

sobre uma partícula que descreve a trajectória

$$\alpha(t) = (e^{t^2} \sin t, e^t, t), \qquad 0 \leq t \leq \pi.$$

Resolução: O trabalho realizado pela força é dado pelo integral

$$\int_{\alpha(0)}^{\alpha(\pi)} \vec{F} \cdot d\alpha.$$

Substituindo na fórmula que define o integral de um campo vectorial obtem-se uma expressão muito complicada. Devemos portanto tentar aplicar o teorema fundamental do cálculo. É fácil verificar que o campo $\vec{F}$ é fechado. Uma vez que $\vec{F}$ é de classe C^1 em $\mathbb{R}^3$, e $\mathbb{R}^3$ é um conjunto em estrela, $\vec{F}$ é um gradiente. Um potencial ϕ para $\vec{F}$ é uma solução do sistema

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \phi}{\partial x} = 2xy \\ \frac{\partial \phi}{\partial y} = x^2 \\ \frac{\partial \phi}{\partial z} = 1 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{l} \phi(x,y,z) = x^2y + C_1(y,z) \\ \phi(x,y,z) = x^2y + C_2(x,z) \\ \phi(x,y,z) = z + C_3(x,y) \end{array} \right.$$

Conclui-se que

$$\phi(x,y,z) = x^2y + z$$

é um potencial para $\vec{F}$. Pelo teorema fundamental do cálculo, conclui-se que o trabalho realizado pela força $\vec{F}$ é

$$\begin{aligned} \int \vec{F} \cdot d\alpha &= \int \nabla\phi \cdot \vec{d\alpha} \\ &= \phi(\alpha(\pi)) - \phi(\alpha(0)) \\ &= \phi(0, e^\pi, \pi) - \phi(0,1,0) \\ &= \pi. \end{aligned}$$

(1 val.) (5) (a) Enuncie o teorema da função inversa.

(1 val.) (b) Dê um exemplo de uma função $G : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ que satisfaça as condições do teorema da função inversa em todos os pontos do seu domínio mas que não seja invertível.

Resolução:

(a) Se $U \subset \mathbb{R}^n$ é um aberto, $F : U \to \mathbb{R}^n$ é uma função de classe C^1, $x \in U$ e $\det DF(x) \neq 0$ então existe um aberto V contendo x e contido em U tal que
   (i) A restrição de F a V é injectiva,
   (ii) $F(V)$ é um aberto,
   (iii) A inversa $F^{-1} : F(V) \to V$ é de classe C^1,
   (iv) $DF^{-1}(F(x)) = DF(x)^{-1}$.

(b) A função $G : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por

$$G(x,y) = (e^x \cos y, e^x \sin y)$$

não é injectiva (por exemplo $G(0,0) = G(0,2\pi)$). No entanto é claramente de classe C^1 e

$$\det DG(x,y) = \left| \begin{array}{cc} e^x \cos y & e^x \sin y \\ -e^x \sin y & e^x \cos y \end{array} \right| = e^{2x} \neq 0$$

para todo o $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

(6) Considere a superfície

$$M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = (1+z^2)^2\}.$$

(a) Sendo S a porção de M limitada pelos planos $z = 1$ e $z = -1$, calcule

$$\int_S \frac{1}{\sqrt{1+4z^2}}\, dS.$$

(b) Determine o conjunto dos pontos $(x, y, z) \in M$ tais que a recta perpendicular a M em (x, y, z) é horizontal (ou seja, paralela ao plano xy).

Resolução:

(a) Em coordenadas cilíndricas, a superfície M é definida pela equação

$$r^2 = (1+z^2)^2 \iff r = 1+z^2.$$

Uma parametrização para S é dada por

$$g(\theta, z) = ((1+z^2)\cos\theta, (1+z^2)\sin\theta, z), \quad 0 < \theta < 2\pi, -1 < z < 1$$

logo

$$Dg(\theta, z) = \begin{bmatrix} -(1+z^2)\sin\theta & (1+z^2)\cos\theta & 0 \\ 2z\cos\theta & 2z\sin\theta & 1 \end{bmatrix}$$

e

$$\sqrt{\det Dg^t(\theta,z)Dg(\theta,z)} = \sqrt{\begin{vmatrix} (1+z^2)^2 & 0 \\ 0 & 1+4z^2 \end{vmatrix}} = (1+z^2)\sqrt{1+4z^2}.$$

Portanto o integral é dado por:

$$\begin{aligned} \int_S \frac{1}{\sqrt{1+4z^2}}\, dS &= \int_0^{2\pi}\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1+4z^2}}\sqrt{\det Dg^t(\theta,z)Dg(\theta,z)}\, dz\, d\theta \\ &= \int_0^{2\pi}\left(\int_{-1}^{1}(1+z^2)dz\right)d\theta \\ &= 2\pi\left(2+\frac{2}{3}\right) = \frac{16\pi}{3}. \end{aligned}$$

(b) A recta perpendicular é horizontal sse os vectores perpendiculares têm componente z nula. Uma vez que um vector perpendicular a M é dado por

$$\nabla\left(x^2+y^2-(1+z^2)^2\right) = (2x, 2y, -2z(1+z^2))$$

conclui-se que a recta perpendicular é horizontal quando

$$-2z(1+z^2) = 0 \iff z = 0,$$

ou seja, nos pontos

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2 = 1,\ z = 0\}.$$

(7) Calcule o máximo de $f(x, y) = x^2 - x + y^2$ na região

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq 1\}.$$

Resolução: A é um conjunto compacto e f é contínua logo pelo teorema de Weierstrass, f tem máximo e mínimo em A. Uma vez que f é diferenciável, os pontos de extremo no interior têm de ser pontos de estacionariedade de f:

$$\nabla f = 0 \iff 2x - 1 = 0 \text{ e } 2y = 0$$

logo o único ponto de estacionariedade no interior é $(\frac{1}{2},0)$. Os pontos de extremo na fronteira têm de satisfazer as condições do método dos multiplicadores de Lagrange:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x}\left(f+\lambda(x^2+y^2-1)\right)=0 \\ \frac{\partial}{\partial y}\left(f+\lambda(x^2+y^2-1)\right)=0 \\ x^2+y^2=1 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x-1+2\lambda x=0 \\ 2y(1+\lambda)=0 \\ x^2+y^2=1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x-1+2\lambda x=0 \\ y=0 \\ x=\pm 1 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} -1=0 \\ \lambda=-1 \\ x^2+y^2=1 \end{cases}$$

portanto os únicos pontos de estacionariedade na fronteira são

$$(1,0) \qquad \text{e} \qquad (-1,0).$$

Uma vez que

$$f(-1,0)=2, \quad f(\frac{1}{2},0)=-\frac{1}{4}, \quad f(1,0)=0$$

conclui-se que o máximo de f em A é 2.

(8) Considere o campo vectorial

$$\vec{F}(x,y,z)=\big(x,x^2,3y-z\big)$$

e a superfície

$$S=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x^2=y^2+z^2, 1<x<4\}.$$

Calcule o fluxo de $\vec{F}$ através de S no sentido da normal que tem componente x negativa no ponto $(2,0,2)$,

(a) pela definição de fluxo;
(b) usando o teorema da divergência;
(c) usando o teorema de Stokes.

Resolução:

(a) Em coordenadas cilíndricas em torno do eixo dos xx, S é dada pela equação $x^2=r^2$ logo uma parametrização para S é dada por

$$g(r,\theta)=(r,r\cos\theta,r\sin\theta), \quad 1<r<4,\ 0<\theta<2\pi.$$

O vector normal determinado por g é dado por

$$\frac{\partial g}{\partial r}\times\frac{\partial g}{\partial \theta}=\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & -r\sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix}=(r,-r\cos\theta,-r\sin\theta)$$

que tem componente x positiva, logo o fluxo pretendido é dado por

$$\begin{aligned}\int_S \vec{F}\cdot\vec{n} &= -\int_1^4\int_0^{2\pi} \vec{F}(r, r\cos\theta, r\sin\theta)\cdot\frac{\partial g}{\partial r}\times\frac{\partial g}{\partial\theta}dr\ d\theta\\ &= -\int_1^4\int_0^{2\pi}(r, r^2, 3r\cos\theta - r\sin\theta)\cdot(r, -r\cos\theta, -r\sin\theta)drd\theta\\ &= -\int_1^4\left(\int_0^{2\pi} r^2 - r^3\cos\theta - 3r^2\sin\theta\cos\theta + r^2\sin^2\theta d\theta\right)dr\\ &= -\int_1^4(2\pi r^2 + \pi r^2)dr\\ &= -63\pi\end{aligned}$$

(b) Podemos aplicar o teorema da divergência ao campo $\vec{F}$ e ao sólido

$$V = \{(x, y, z)\in\mathbb{R}^3 : 1 < x < 4, y^2 + z^2 \leq x^2\}.$$

A fronteira do sólido ∂V é formada pela união de S com os dois discos $S_1 = \{(1, y, z)\in\mathbb{R}^3 : y^2 + z^2 \leq 1\}$ e $S_2 = \{(4, y, z)\in\mathbb{R}^3 : y^2 + z^2 \leq 16\}$

A normal a S dada no enunciado é a normal exterior a V. A normal exterior a S_1 é constante igual a $(-1, 0, 0)$ e a normal exterior a S_2 é constante igual a $(1, 0, 0)$. Uma vez que

$$\nabla\cdot\vec{F} = 1 + 0 - 1 = 0$$

o teorema da divergência diz que

$$0 = \int_S \vec{F}\cdot\vec{n}dS + \int_{S_1}\vec{F}\cdot(-1, 0, 0)dS + \int_{S_2}\vec{F}\cdot(1, 0, 0)dS.$$

Como

$$\int_{S_1}\vec{F}\cdot(-1, 0, 0)dS = \int_{S^1} -xdS = \int_{S^1} -1dS = -\pi$$

e

$$\int_{S_2}\vec{F}\cdot(1, 0, 0)dS = \int_{S^2} xdS = \int_{S^1} 4dS = 64\pi$$

conclui-se que

$$\int_S \vec{F}\cdot\vec{n}dS = -\int_{S_1}\vec{F}\cdot(-1, 0, 0)dS - \int_{S_2}\vec{F}\cdot(1, 0, 0)dS = -63\pi.$$

(c) Vimos antes que $\nabla\cdot\vec{F} = 0$. Uma vez que o campo $\vec{F}$ é de classe C^1 em $\mathbb{R}^3$ que é um conjunto em estrela, conclui-se que $\vec{F}$ é um rotacional. Um potencial vector $\vec{A}$ é uma solução do sistema

$$\begin{cases}\frac{\partial A_2}{\partial z} - \frac{\partial A_3}{\partial y} = x\\ \frac{\partial A_3}{\partial x} - \frac{\partial A_1}{\partial z} = x^2\\ \frac{\partial A_2}{\partial x} - \frac{\partial A_1}{\partial y} = 3y - z\end{cases}$$

Fazendo por exemplo $A_2 = 0$ obtem-se

$$\begin{cases}\frac{\partial A_3}{\partial y} = x\\ \frac{\partial A_3}{\partial x} - \frac{\partial A_1}{\partial z} = x^2\\ \frac{\partial A_1}{\partial y} = -3y + z\end{cases}\iff\begin{cases}A_3 = xy + C_1(x, z)\\ y + \frac{\partial C_1}{\partial x} - y - \frac{\partial C_2}{\partial z} = x^2\\ A_1 = -\frac{3}{2}y^2 + yz + C_2(x, z)\end{cases}$$

portanto podemos tomar $C_1(x,z)=0$ e $C_2(x,z)=-x^2z$ e concluimos que um potencial vector é dado por

$$\vec{A}(x,y,z)=(-\frac{3}{2}y^2+yz-x^2z,0,xy).$$

Pelo teorema de Stokes

$$\int_S \vec{F}\cdot\vec{n}dS=\int_S \nabla\times\vec{A}\cdot\vec{n}dS=\int_{\partial S}\vec{A}\cdot d\vec{r}.$$

O bordo ∂S é formado pelas duas circunferências

$$D_1=\{(1,y,z)\in\mathbb{R}^3 : y^2+z^2=1\}$$

e

$$D_2=\{(4,y,z)\in\mathbb{R}^3 : y^2+z^2=16\}.$$

De acordo com a regra da mão direita, D_1 deve ser percorrida num sentido que para um observador na origem é o dos ponteiros do relógio, enquanto que D_2 deve ser percorrida num sentido que para um observador na origem parece o contrário ao dos ponteiros do relógio.
Parametrizações para D_1 e D_2 são dadas respectivamente por

$$g_1(t)=(1,\cos t,\sin t), 0<t<2\pi$$

e

$$g_2(t)=(4,4\cos t,4\sin t), 0<t<2\pi.$$

A parametrização g_2 tem o sentido contrário ao desejado, enquanto que g_1 tem o sentido correcto. Logo

$$\begin{aligned}\int_S \vec{F}\cdot\vec{n}dS &= \oint_{D_1}\vec{A}\cdot d\vec{r}+\oint_{D_2}\vec{A}\cdot d\vec{r}\\ &=\int_0^{2\pi}(-\frac{3}{2}\cos^2 t+\sin t\cos t-\sin t,0,\cos t)\cdot(0,-\sin t,\cos t)dt\\ &-\int_0^{2\pi}(-\frac{3}{2}16\cos^2 t+16\sin t\cos t-64\sin t,0,16\cos t)\cdot(0,-4\sin t,4\cos t)dt\\ &=\int_0^{2\pi}\cos^2 t dt-\int_0^{2\pi}64\cos^2 t dt\\ &=\pi-64\pi=-63\pi.\end{aligned}$$

(9) Determine se existe o integral

$$\int_0^\infty \frac{e^{-x}}{\sqrt{|x^2-3x+2|}}\,dx.$$

Resolução: Além do intervalo de integração ser ilimitado, a função integranda

$$f(x)=\frac{e^{-x}}{\sqrt{|x^2-3x+2|}}$$

não está definida e tende para ∞ nos pontos

$$x^2-3x+2=0 \iff (x-1)(x-2)=0 \iff x=1 \text{ ou } x=2.$$

Temos de analisar cada um destes problemas separadamente.

Para $0 \leq x \leq \frac{3}{2}$ temos

$$|f(x)| = \frac{e^{-x}}{\sqrt{|x-2|}} \frac{1}{\sqrt{|x-1|}} \leq \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}}} \frac{1}{\sqrt{|x-1|}}$$

uma vez que $\frac{1}{\sqrt{|x-1|}}$ é integrável em $\left[0, \frac{3}{2}\right]$ (uma vez que é uma potência de expoente menor que 1), conclui-se pelo critério da comparação que f também é integrável em $\left[0, \frac{3}{2}\right]$.

Análogamente para $\frac{3}{2} \leq x \leq 3$ temos

$$|f(x)| = \frac{e^{-x}}{\sqrt{|x-1|}} \frac{1}{\sqrt{|x-2|}} \leq \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}}} \frac{1}{\sqrt{|x-2|}}$$

e novamente pelo critério da comparação conclui-se que f é integrável em $\left[\frac{3}{2}, 3\right]$.

Finalmente, para $x > 3$ temos

$$|f(x)| = \frac{e^{-x}}{\sqrt{|(x-1)(x-2)|}} \leq e^{-x}$$

e novamente pelo critério da comparação concluimos que f também é integrável em $[3, +\infty[$, e portanto é integrável em $[0, +\infty[$.