Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

ANÁLISE MATEMÁTICA III

TODOS OS CURSOS

20 DE JUNHO DE 2002 - 9 HORAS

PRIMEIRO EXAME: TODOS OS GRUPOS. DURAÇÃO: 3H
SEGUNDO TESTE: GRUPOS 6 A 9. DURAÇÃO: 1H30M

Apresente todos os cálculos

(2 val.) (1) Considere o sólido

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z < 2,\ 0 < y < 1,\ x > 0,\ z > 0\}.$$

Escreva uma expressão para o volume de V em termos de integrais iterados na ordem $\int(\int(\int dy)dx)dz$.

(2 val.) (2) Use *coordenadas esféricas* para calcular a massa total do sólido

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 2, x^2 + y^2 > 1, 0 < x < y\}$$

se a densidade de massa for dada por

$$f(x, y, z) = \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2}.$$

(2 val.) (3) Calcule o momento de inércia em torno do eixo dos zz da curva definida por

$$C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1,\ x + y = 0\}$$

se a densidade de massa for dada por

$$f(x, y, z) = 1.$$

(2 val.) (4) Calcule o trabalho realizado pela força

$$\vec{F}(x, y, z) = \big(2xy, x^2, 1\big)$$

sobre uma partícula que descreve a trajectória

$$\alpha(t) = (e^{t^2} \sin t, e^t, t), \qquad 0 \leq t \leq \pi.$$

(1 val.) (5) (a) Enuncie o teorema da função inversa.

(1 val.) (b) Dê um exemplo de uma função $G : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ que satisfaça as condições do teorema da função inversa em todos os pontos do seu domínio mas que não seja invertível.

Volte S. F. F.

(6) Considere a superfície

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = (1 + z^2)^2\}.$$

(1.5 val.) (a) Sendo S a porção de M limitada pelos planos $z = 1$ e $z = -1$, calcule

$$\int_S \frac{1}{\sqrt{1 + 4z^2}}\, dS.$$

(1 val.) (b) Determine o conjunto dos pontos $(x, y, z) \in M$ tais que a recta perpendicular a M em (x, y, z) é horizontal (ou seja, paralela ao plano xy).

(1.5 val.) (7) Calcule o máximo de $f(x, y) = x^2 - x + y^2$ na região

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

(8) Considere o campo vectorial

$$\vec{F}(x, y, z) = \big(x, x^2, 3y - z\big)$$

e a superfície

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 = y^2 + z^2, 1 < x < 4\}.$$

Calcule o fluxo de $\vec{F}$ através de S no sentido da normal que tem componente x negativa no ponto $(2, 0, 2)$,

(1.5 val.) (a) pela definição de fluxo;
(1.5 val.) (b) usando o teorema da divergência;
(1.5 val.) (c) usando o teorema de Stokes.

(1.5 val.) (9) Determine se existe o integral

$$\int_0^\infty \frac{e^{-x}}{\sqrt{|x^2 - 3x + 2|}}\, dx.$$