Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

2º Teste de Análise Matemática III - Turma E

5 de Janeiro de 2006

Duração: 1 hora e 30 minutos.
Apresente todos os cálculos e justificações relevantes.

1. Considere a superfície

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon 1 < x^2 + y^2 < 4,\ x > 0,\ z = \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right)\}$$

(a) Calcule $\int_S \sqrt{x^2+y^2}dV_2$.

(b) Use o Teorema de Stokes para calcular

$$\int_{S^\mu} dx \wedge dy$$

em termos de um integral de uma forma-1 onde μ é a orientação dada pela normal a S com terceira componente negativa.

2. Seja U um aberto de $\mathbb{R}^n$, $\alpha \in \Omega^k(U), \beta \in \Omega^l(U)$. Mostre que se α, β são fechadas, $\alpha \wedge \beta$ é fechada e que se além disso α ou β são exactas o mesmo sucede com $\alpha \wedge \beta$.

3. Determine os valores de $\alpha \in \mathbb{R}$ para os quais a função

$$f(x) = \frac{1}{x \log^\alpha x}$$

é integrável em $[1, +\infty[$.

4. Seja $U \subset \mathbb{R}^3$ um aberto e $\phi : U \times \mathbb{R} \to U$ uma aplicação de classe C^1 representando a evolução de um fluido com o tempo. Assuma que para cada $t \in \mathbb{R}$ a aplicação

$$\phi_t(\mathbf{x}) = \phi(\mathbf{x}, t)$$

é um difeomorfismo de U em U. Seja $\rho : U \times \mathbb{R} \to [0, +\infty[$ a função de densidade de massa e

$$\mathbf{v}(\phi_t(\mathbf{x}), t) = \frac{\partial \phi}{\partial t}(\mathbf{x}, t)$$

a velocidade instantânea de um elemento de fluido. A lei de conservação de massa traduz-se no facto de a função

$$M(V,t) = \int_{\phi_t(V)} \rho dV_3$$

ser constante em t para todo o aberto $V \subset U$ tal que ∂V é uma variedade-2.

Usando o Teorema da Divergência, mostre que se verifica a *equação da continuidade*

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = 0$$

para todos os $(\mathbf{x}, t) \in U \times \mathbb{R}$.