Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

2º Teste de Análise Matemática III - Turma E

Teste para praticar

Duração: 1 hora e 30 minutos.
Apresente todos os cálculos e justificações relevantes.

1. Considere a superfície

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon x^2 + y^2 + z^2 = 1, x \geq 0, y \geq 0\}$$

e o campo vectorial $\mathbf{F} \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dado por

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (z, y, -x).$$

Calcule o fluxo de $\nabla \times \mathbf{F}$ através de S no sentido da normal que tem primeira componente não positiva,

(a) Usando o Teorema de Stokes para campos vectoriais.

(b) Usando o Teorema da divergência.

2. Considere a forma-1 definida em $\mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}\}$ por

$$\omega = -\frac{x^2 y}{(x^2 + y^2)^2}\, dx + \frac{x^3}{(x^2 + y^2)^2} dy.$$

Sejam γ_1, γ_2 e γ_3 as circunferências centradas em $(0, 0)$, $(3, 0)$ e $(1, 0)$ com raios 1, 1 e 10 respectivamente, percorridas no sentido horário. Calcule $\oint_{\gamma_i} \omega$ para $i = 1, 2, 3$.

3. Determine os valores de $\alpha \in \mathbb{R}$ para os quais a superfície

$$M_\alpha = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon z > 1, x^2 + y^2 = z^{2\alpha}\}$$

tem área finita.

4. Sejam

$$B^n = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \colon \|\mathbf{x}\| \leq 1\}, \quad S^{n-1} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \colon \|\mathbf{x}\| = 1\}.$$

Seja $\mathbf{F} \colon \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\} \to \mathbb{R}^n$ o campo vectorial definido por

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|^n}.$$

(a) Mostre que $d\Omega_{\mathbf{F}} = 0$.

(b) Mostre que $\int_{S^{n-1}} \Omega_{\mathbf{F}} = V_{n-1}(S^{n-1})$. $\Omega_{\mathbf{F}}$ é exacta?

(c) Mostre que não existe nenhuma aplicação $\mathbf{g} \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ de classe C^2 tal que $\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$ para $\mathbf{x} \in S^{n-1}$ e $\mathbf{g}(B^n) \subset S^{n-1}$.

(d) Prove a seguinte versão do *Teorema do Ponto Fixo de Brouwer:* qualquer aplicação

$$\mathbf{f} \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$

de classe C^2 tal que $\mathbf{f}(B^n) \subset B^n$ tem pelo menos um ponto fixo em B^n.

Sugestão: Assuma que o resultado é falso e considere a recta que une $\mathbf{x}$ *a* $\mathbf{f}(\mathbf{x})$.